

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

79. Band, Heft 2

15. Mai 1959

S. 241–480

Geschichte.

● **Becker, Oskar:** *Das mathematische Denken der Antike.* (Studienhefte zur Altertumswissenschaft. Heft 3.) Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1957. 128 S. Brosch. DM 9,50.

Die spannenden Ausführungen des Verf. schildern zuerst (Historische Übersicht: S. 7–25) die Entwicklung der griechischen Mathematik, die auf vorgriechischen Kenntnissen aufbaut, bald aber über sie hinauswächst, indem an die Stelle früherer Berechnungsrezepte durch Beweis gesicherte Sätze treten, womit sich erstmals abendländische Wissenschaft offenbart. Auf die Grundlegung in vorsokratischer und attischer Zeit folgt die hellenistische Epoche, in der sich die reine Mathematik von der Bindung zur Philosophie freimacht und mit Euklid, Archimedes und Apollonios ihre Vollendung erreicht. Später ist das theoretische Interesse nur mehr auf die Herausgabe und Erklärung der klassischen Werke gerichtet, während — abgesehen von Diophant, der auf babylonischer Tradition fußt — hauptsächlich die Anwendungen (die auch Archimedes berücksichtigt hatte) im Vordergrund stehen. — Im 2. Teil (S. 26–123) wird der Leser an Hand zahlreicher, aus der Fülle des Stoffes vorzüglich ausgewählter Beispiele in griechisches Denken eingeführt, so daß er sieht, wie die damaligen Probleme und Methoden, auch die aus vorgriechischer Zeit, im einzelnen wirklich ausgesehen haben. Dabei bringt der Verf. vielfach neue Gesichtspunkte, besonders wenn Lücken in der Dokumentation überbrückt werden sollen, wie bei der Entwicklung des Winkelbegriffs, bei der Psephoarithmetik, bei der Heronischen Kubikwurzelapproximation, bei der Entstehung der Trigonometrie usw. Besonders sei noch hingewiesen auf die Untersuchungen zur Raumkurve des Archytas und zur Quadratrix des Deinostratos, wobei der Verf. auf die berühmte Produktentwicklung von Vieta (1593) kommt. — Zu der Bemerkung (S. 10), daß Ägypter und Babylonier das Volumen des Pyramidenstumpfes und „damit auch“ das der Pyramide berechnen konnten, sei betont, daß dies aus den Texten nicht gesichert ist, wenn man nicht vielleicht annimmt, daß nach Einsetzen von $b = 0$ in die Formel $\frac{1}{3} h \cdot (a^2 + ab + b^2)$ das Pyramidenvolumen sich in einem ähnlichen Gedankengang ergibt, wie beim Übergang vom Viereck zum Dreieck in den Texten aus Edfu. Zu dem Beispiel MC 950 (S. 30) sei bemerkt, daß man hier auch ohne Ähnlichkeitssätze lediglich durch Flächenbetrachtungen zum Ziel kommt, wie es besonders E. M. Bruins vertritt. Hier kann man die nicht aus der Figur ersichtliche Proportion $b':(b + b') = l':(2l' + l)$ durch eine Gnomonbetrachtung umgehen.

K. Vogel.

Baron, Roger: *Note sur les variations au XII^e siècle de la triade géométrique, altimetria, planimetria, cosmimetria,* Isis 48, 30–32 (1957).

Die Triade findet sich sowohl in der *Geometria practica* (ed. R. Baron, 1956, dies. Zbl. 72, 245) wie im *Didascalion* (ed. Ch. Buttimer, Washington 1939) des Hugo de S. Victor (1096/1141), ferner in leichter Abwandlung in des Dom. Gundisalvi (um 1150) *Divisio philosophiae* (ed. L. Baur, Münster 1904) und in der von Gundisalvi besorgten lateinischen Übersetzung des *Catalogus scientiarum* des al-Fârâbî (870–950/51), nicht aber in der von Gerhard v. Cremona (1114/87) besorgten (beide zusammen mit dem arabischen Original und einer castilianischen Übersetzung ed. A. G. Palencia, Madrid 1932).

J. E. Hofmann.

Pasquale, Luigi di: *I cartelli di matematica disfida di Ludovico Ferrari e i controcartelli di Nicolò Tartaglia.* Periodico Mat., IV. Ser. 35, 253–278 (1957).

Verdienstvolle Übersicht über den Inhalt der 1547 gewechselten herausfordernden Kampfschriften unter eingehenderer Darlegung der geometrischen Einzelheiten über die Teilung von Figuren und ihren Zusammenhang mit Euklid.

J. E. Hofmann.

Tosi, Armida: „De centro gravitatis solidorum“ di Luca Valerio. Periodico Mat., IV. Ser. 35, 189—201 (1957).

Sorgfältige Inhaltsübersicht über das interessante Werk von 1604; das seinerzeit epochemachend gewirkt hat.

J. E. Hofmann.

● **Cassina, Ugo:** Sur l'histoire des concepts fondamentaux de la géométrie projective. (Les conférences du Palais de la Découverte. Sér. D, no. 50.) Paris: Université de Paris 1957. 35 p. 140 fr.

Lesenswerte Kurzdarstellung der Grundfragen mit Textproben und Literaturnachweisen.

J. E. Hofmann.

Bertoldi, I.: „Enumeratio linearum tertii ordinis“ di I. Newton. Periodico Mat., IV. Ser. 35, 14—43 (1957).

Es handelt sich um eine italienische Übersetzung der Enumeratio von 1704 mit einigen beigegeführten mathematischen Erklärungen, während die interessante Entwicklungsgeschichte unberücksichtigt bleibt. Der deutsche Leser findet hierüber Eingehenderes in der Übersetzung von M. Miller (s. dies. Zbl. 53, 196).

J. E. Hofmann.

Tenca, Luigi: La versiera di ... Guido Grandi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 458—460 (1957).

Verf. verweist auf das Auftreten der Versiera in G. Grandi: Quadratura circuli et hyperbolae (1703), also lange vor G. Agnesi (1748), nach der die Versiera heute häufig benannt wird. Daß die Kurve schon bei Fermat, Gregory und Leibniz zu finden ist (J. E. Hofmann: Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik, s. dies. Zbl. 32, 193), was Grandi vielleicht nicht ganz unbekannt war, bleibt unerwähnt.

J. E. Hofmann.

Truesdell, C.: Eulers Leistungen in der Mechanik. Enseignement math., II. Sér. 3, 251—262 (1957).

Verf. ist Herausgeber von Eulers Commentationes mechanicae ad theoriam corporum fluidorum pertinentes (Opera omnia II, 12/13). Sein hier vorliegender äußerst lebendiger Vortrag, der 1957 in Basel zu Eulers 250. Geburtstag gehalten wurde, ist den Forschungen Eulers im Gebiete der reinen Mechanik gewidmet, die 1727 mit der Dissertation über den Schall begannen. Fesselnd stellt Verf. das jahrzehntelange Ringen Eulers um ein allgemeines mechanisches Prinzip für allgemeine Körper dar. Ergebnis ist zunächst das Impulsgesetz (1750). Es folgen dann die Theorie der idealen Flüssigkeit (aus der auch die Theorie der partiellen Differentialgleichungen entsteht), die Ableitung der allgemeinen Kreiselgleichungen, eine ausführlichere Theorie der Flüssigkeitsbewegung im allgemeinen (1759) und die allgemeine Theorie des Drehimpulses (1765ff.). Die Mechanik trieb Euler als eine unabhängige mathematische Wissenschaft, als rationale Mechanik. *F. Klemm.*

Gasapina, Umberto: Il teorema fondamentale dell'algebra. Periodico Mat., IV. Ser. 35, 149—163 (1957).

Verf. schickt einige historische Hinweise voraus. Eingehend behandelt er das Vorgehen von Gauß (1. u. 3. Beweis), von Cauchy (1821), von Gordan (1876) und von Mourey-Holst (1828).

J. E. Hofmann.

Fleckenstein, Joachim-Otto: Die Erweiterung des kosmischen Raumbegriffs in der Geschichte der Raummessung. Studium generale 11, 29—34 (1958).

Ein außerordentlich klar und fesselnd geschriebener, allgemeinverständlicher Überblick. Es werden behandelt: Das babylonische Maßsystem; der Kosmos der vorantiken Kulturen. — Die griechische Zeit: die Erde als Kugel; die griechische Planetengeometrie; das geozentrische System. — Der Rückfall des Mittelalters in

vorwissenschaftliche Zustände. — Die kopernikanische Wende; das heliozentrische System; Planetenbahnen noch als Kreise, aber die Fixsternsphäre rückt in die Weite des Raumes hinaus. — Die Bemühungen des 17. Jahrhunderts, die Distanz Erde-Sonne zu ermitteln; die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit; die Bestimmung der Erdfigur im 17./18. Jahrhundert; die Festlegung des Meters als Längeneinheit. — Die erste Messung einer Fixsternparallaxe (F. W. Bessel 1838). Die Ausmessung der Milchstraße mit Hilfe der Helligkeitsschwankungen der δ -Cepheiden. Novae und Supernovae in außergalaktischen Systemen. Die Fluchtbewegung der Sternsysteme. Unser Vordringen in den Weltenraum bis auf 1 Milliarde Lichtjahre. Die „Geburtsstunde der Welt“ vor einigen Milliarden Jahren. *F. Klemm.*

• **Scherz, Gustav:** *Vom Wege Niels Stensens. Beiträge zu seiner naturwissenschaftlichen Entwicklung.* (Acta Hist. Sci. Natur. Med. Vol. 14.) Kopenhagen: Ejnar Munksgaards Forlag 1956. 248 S., 1 Titelbild.

Der bestbekannte Herausgeber der großen Stensen-Ausgabe schildert im ersten Teil dieser seiner Habilitationsschrift (S. 1/140) das Leben und Wirken des berühmten Naturforschers bis zum Weggang von Kopenhagen (1674), der den großen Einschnitt (Priesterweihe) vorbereitet. Im zweiten Teil wird der *Indice di cose naturali*, ein vermutlich 1668 begonnenes Verzeichnis der Naturaliensammlung des Großherzogs Ferdinand II. in Florenz, in italienisch und deutsch wiedergegeben. Vom mathematisch-physikalischen Standpunkt aus sind vor allem die Beziehungen zu Viviani und Borelli interessant, dann die Myologie, worin Stensen eine auf mathematischer Grundlage stehende Erklärung der Vorgänge bei der Muskelbewegung versucht. Das Werk zeichnet sich durch sorgfältige Register und genaueste Belege für alles Vorgebrachte aus. *J. E. Hofmann.*

• **Scherz, G. (edited by):** *Nicolaus Steno and his indice.* Copenhagen: Ejnar Munksgaards Forlag 1958. 314 p. Dän. Kron. 32,—.

Dieses Sammelwerk wird eingeleitet durch eine vorzügliche biographische Studie des Herausgebers (S. 9/86). Unter den weiteren höchst interessanten Beiträgen sind vom mathematischen und physikalischen Standpunkt aus vor allem die Studie von H. Tertsch über die mathematisch so interessanten kristallographischen Arbeiten (Entdeckung der Winkelkonstanz; S. 120/39) und von A. Faller über die Stellung Stensens zum Cartesianismus (Anerkenntnis der Methode, Ablehnung zahlreicher unrichtiger Einzelbehauptungen; S. 140/66) von Bedeutung. Anschließend folgt die Wiedergabe des *Indice* (italienisch u. englisch; vgl. vorstehendes Referat) und das sehr sorgfältig gearbeitete Register. Ein gründliches, sowohl biographisch wie wissenschaftsgeschichtlich sehr bedeutungsvolles Werk, das wohl alsbald durch die Wiedergabe der glücklich wiedergefundenen Originalhandschrift der Myologie ergänzt werden kann. *J. E. Hofmann.*

Fiechefet, J.: *Un mathématicien namurois méconnu, François-Guillaume Poignard.* Bull. Soc. roy. Sci. Liège 26, 396—405 (1957).

Poignard (* 1653 Jemappes, † 1714 Valenciennes) ist 1667/71 Schüler des Jesuiten-Kollegs Namur, wirkt zu unbestimmter Zeit in Paris als Rechenmeister, wird 1681 Kleriker in Namur, erhält dort 1685 ein Benefiz, wird 1690 Kanoniker in Brüssel, ist Hofkaplan und stirbt bei Ausführung eines Auftrages für das Kapitel. Sein *Traité des quarrés sublimes*, Brüssel 1704 handelt von magischen Quadraten und enthält Ansätze einer Transformationstheorie; die *Arithmétique*, Brüssel 1718, 21733 ist unbedeutend. *J. E. Hofmann.*

Biermann, Kurt-R.: *Alexander von Humboldt als Protektor Gotthold Eisensteins und dessen Wahl in die Berliner Akademie der Wissenschaften.* Forsch. Fortschr. 32, 78—81 (1958).

Verf., der inzwischen die seit längerem als verschollen angesehenen Briefe Humboldts an Eisenstein wiederaufgefunden hat, berichtet hier unter sorg-

fältiger Beiziehung alles einschlägigen gedruckten Materials und weiterer ungedruckter Quellen über das tragische Lebensschicksal Eisensteins. Wir hören, wie Eisenstein während des Revolutionsjahres 1848 in erhebliche Schwierigkeiten geriet, wie sich Humboldt fortwährend für ihn einsetzte, ohne jedoch für Eisenstein eine gesicherte Lebensstellung erwirken zu können. So starb Eisenstein als ein hoffnungsvolles Talent, dem es nicht vergönnt war, zur Reife zu gelangen, in bedrängter Lage an Schwindsucht.

J. E. Hofmann.

Tank, Franz: Jakob Ackeret. *Z. angew. Math. Phys.* 9b, Festschrift Jakob Ackeret 9—16 (1958).

Ginsburg, Th., L. Meyer und H. Sprenger (zusammengestellt von): *Bibliographie Ackeret*. (Bis Dezember 1957.) *Ibid.* 17—25.

Gygi, Hans: Professor Dr. sc. techn. Jakob Ackeret und die schweizerische Maschinenindustrie. *Ibid.* 26—30.

Wattenwyl, René von: Professor Ackeret und die Landesverteidigung. *Ibid.* 31—33.

Betz, Albert: Ackeret in Göttingen. *Ibid.* 34—36.

Gerber, Alfred: Aus der Zusammenarbeit des Institutes für Aerodynamik mit der privaten Rüstungsindustrie. *Ibid.* 37—46.

Keller, Curt: Aus dem Werdegang der aerodynamischen Wärmekraftanlagen (AK-Anlage). *Ibid.* 47—52.

Arbeiten zur Würdigung Jakob Ackerets.

Hasse, Helmut: Wissenschaftlicher Nachruf auf Hermann Ludwig Schmid. *Math. Nachr.* 18, H. L. Schmid-Gedächtnisband, 1—18 (1958).

Mit Schriftenverzeichnis.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Emde, Günther: Kriterien für die Herleitbarkeit in Modalitätenstrukturen. *Arch. math. Logik Grundlagenforsch.* 3, 79—111 (1957).

Die Arbeit schließt sich an die Untersuchungen von Arnold Schmidt über Modalitätenstrukturen an, bei denen von einer Interpretation der modalen Begriffe abgesehen wird und rein mathematisch die Gleichheits- und Implikationsbeziehungen untersucht werden. Hier wird die Beschränkung auf den Fall der Idempotenz aufgehoben. Verf. kann seine Untersuchungen dadurch vereinfachen, da er sich, wie gezeigt wird, auf positive Modalitätenstrukturen beschränken kann. Die betrachteten Probleme sind: Aufstellung von Herleitbarkeitsbedingungen, Basisreduktion und Entscheidungsverfahren. Lösung dieser Probleme erfolgt für beliebige endliche, für charakterisierbare und für kommutative Modalitätenstrukturen. Eine Modalitätenstruktur \mathfrak{M} heißt dabei charakterisierbar, wenn es eine ganze Zahl k gibt, für die $M^{k+1} \rightarrow M^k$ in \mathfrak{M} herleitbar ist; sie heißt kommutativ, wenn $M N \leftrightarrow N M$ herleitbar ist. Nicht für jede Modalitätenstruktur läßt sich ein Entscheidungsverfahren angeben, da sonst das von M. Hall als unlösbar nachgewiesene Wortproblem für Halbgruppen mit zwei Erzeugenden lösbar sein müßte. Weiter wird der Begriff der Modalitätenstruktur erweitert zu dem der MA-Struktur durch Hinzunahme der aussagelogischen Verknüpfungen \wedge , \vee und beliebig vieler Aussagevariablen, während bei einer Modalitätenstruktur nur die modalen Formen einer einzigen Aussagevariablen behandelt werden. Bei geeigneten Voraussetzungen lassen sich die für Modalitätenstrukturen gefundenen Herleitbarkeits- und Entscheidungskriterien auf die MA-Strukturen übertragen. Bestimmte MA-Strukturen werden angegeben, die bei geeigneter Zuordnung der zweiwertigen Aussagenlogik oder aber der Lewis'schen strikten Logik äquivalent sind.

W. Ackermann.

Takeuti, Gaisi: Ordinal diagrams. *J. math. Soc. Japan* 9, 386—394 (1957). Verf. charakterisiert stammbaumförmige Beweisfiguren, wie sie in beweis-

theoretischen Überlegungen auftreten, durch gewisse Ordinalzahlen, deren Aufbau den Beweisfiguren angepaßt ist; er nennt diese Ordinaldiagramme. Zur Konstruktion dieser Ordnungszahlen werden zwei Funktionen benutzt, von denen die eine die natürliche Summe darstellt, während die andere von komplizierterem Charakter ist. Der Aufbau der Ordinalzahlen ist rein konstruktiv. Ihre Erreichbarkeit, d. h. die diesbezügliche Gültigkeit der transfiniten Induktion, wird gezeigt. Verf. beabsichtigt, diese Ordnungszahlen bei Führung von Widerspruchsfreiheitsbeweisen zu verwenden, in ähnlicher Weise, wie das für das System des Referenten (dies. Zbl. 42, 50) bereits geschehen ist.

W. Ackermann.

Mycielski, Jan: A characterisation of arithmetical classes. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 1025—1027 (1957).

Im Rahmen der Theorie der Modelle (vgl. Tarski, dies. Zbl. 58, 247) gibt Verf. ohne Beweis eine Reihe von Sätzen an, die hauptsächlich die beiden folgenden Begriffe betreffen: 1. „ K ist eine elementar definierbare Teilklasse einer Klasse A von relationalen Systemen (gleicher Gattung)“. 2. „Die relationalen Systeme M, N sind elementar ununterscheidbar“.

Gert H. Müller.

Craig, William: Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory. J. symbolic Logic 22, 269—285 (1957).

In a previous paper [J. symbolic Logic 22, 250—268 (1957)] the author derived, by using the Herbrand-Gentzen theorem, the following „interpolation“ result: if $\vdash A \supset A'$ and if A and A' have at least one predicate symbol in common, then there is a formula B such that $\vdash A \supset B$ and $\vdash B \supset A'$, and all predicate symbols in B also occur in both A and A' . Using various modifications and strengthenings of this as a lemma the author establishes several interesting theorems (here sketchily described): (I) A new proof of Beth's result [Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 330—339 (1953)] concerning the equivalence of a prooftheoretic and modeltheoretic notion of definability of one primitive predicate in terms of the others in a first-order axiom system; also an extension of Beth's result and a generalization from primitive predicates to predicates (and functions) in general. This establishes a conceptual completeness of first-order systems in that any relationship which holds of concepts expressible in the system is expressible and provable in the system. (II) A theorem concerning certain classes of formulas of the second-order predicate calculus. As an illustration of the theorem there is the special case that if $(\exists T^1) \dots (\exists T^n) A \equiv (S^1) \dots (S^m) B$ is valid, where A and B are first-order formulas (the T 's and S 's predicate variables), then there is a first-order formula C such that $(\exists T^1) \dots (\exists T^n) A \equiv C$ is valid. Comparisons, and differences, with the Kleene arithmetic hierarchy are pointed out; also a connection with certain model sets of Tarski. (III) A necessary and sufficient condition, in terms of a second-order formula being valid, that the extra-logical axioms of an arbitrary first-order system can be so grouped that certain of the primitive predicates occur only in one group and not in any other. T. Hailperin.

Mal'cev, A. I.: On derivative operations and predicates. Doklady Akad. Nauk SSSR 116, 24—27 (1957) [Russisch].

Sei A eine Algebra mit den Grundoperationen $f_i(x_1, \dots, x_{m_i})$ ($i = 1, 2, \dots$). Statt der f_i kann man natürlich auch Prädikate P_i mit $P_i(x_1, \dots, x_{m_i}, y) \leftrightarrow y = f_i(x_1, \dots, x_{m_i})$ verwenden. Jede mittels der Prädikatsymbole P_i aufgebaute Formel $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ des Prädikatenkalküls der ersten Stufe (PK) mit den freien Individuenvariablen x_1, \dots, x_n kann als „abgeleitetes Prädikat“ auf A betrachtet werden. Gilt insbesondere in A

$(x_1) \dots (x_m) (u) (v) (\exists y) [\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y) \& (\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, u) \& \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, v) \rightarrow u = v)]$, so definiert \mathfrak{A} eine „abgeleitete Operation“ auf A . In Satz 1 charakterisiert Verf. in formaler Weise die auf diese Weise entstehenden abgeleiteten Operationen auf einer

Klasse K von Algebren, die durch endlich oder unendlich viele universelle Axiome [d. h. Axiome der Form $(y_1) \cdots (y_p) \mathfrak{B} (y_1, \dots, y_p)$, wo \mathfrak{B} keine Quantoren enthält] definiert ist. In Satz 2 gibt Verf. auf einer Klasse K von Modellen eine abstrakte Charakterisierung derjenigen Prädikate $P(x_1, \dots, x_n)$ (nicht notwendig definiert durch Formeln des PK), welche sich auf K durch eine „Konjunktion“ von endlich oder unendlich vielen universellen Formeln des PK (d. h. von Formeln der Form $(y_1) \cdots (y_p) \mathfrak{B} (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$, wo \mathfrak{B} keine Quantoren enthält) darstellen lassen. Satz 2 enthält als Spezialfall einen Satz von Tarski (s. dies. Zbl. 58, 247) über die Charakterisierung derjenigen Unterklassen L von Modellen der Klasse K , die aus K durch ein System universeller Axiome ausgesondert werden, sowie den Satz von A. Robinson (s. dies. Zbl. 71, 7) über die in bezug auf Übergang zu Untermodellen invarianten Prädikate auf einer axiomatisierbaren Klasse K von Modellen. Die obigen Sätze 1 und 2 wendet Verf. noch an zum Beweis einiger weiterer Sätze; unter anderem: Stellt in einer durch universelle Axiome definierten Klasse K von Algebren die Formel $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ ein in bezug auf Übergang zu K -Ober- und -untermodellen invariantes Prädikat dar, so ist \mathfrak{A} in K äquivalent zu einer offenen Formel, die aus Ausdrücken der Form $g = h$ (g, h Terme) gebildet ist. Die in einer quasiprimitiven Klasse K [vgl. Verf., Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 187—190 (1956)] von Algebren durch eine Formel $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n, y)$ definierte abgeleitete Operation ist dann und nur dann ein Term, wenn sie homomorphie-invariant ist.

E. Burger.

Markov, A. A.: On the inversion complexity of function systems. Doklady Akad. Nauk SSSR 116, 917—919 (1957) [Russisch].

Sei f_1, \dots, f_m ein System von m Booleschen Funktionen von n Argumenten. Es kann auf verschiedene Weise durch m Formeln P_1, \dots, P_m definiert werden, wobei die P_1, \dots, P_m in üblicher Weise aus den Symbolen $0, 1, x_1, \dots, x_n, \&, \vee, \neg, (,)$ gebildet sind. Für jede solche Darstellung P_1, \dots, P_m betrachte man die Anzahl der verschiedenen in P_1, \dots, P_m vorkommenden Teilformeln, die mit dem Negationszeichen \neg beginnen. Sei $\text{Inv}(f_1, \dots, f_m)$ das Minimum dieser Anzahlen für alle Darstellungen P_1, \dots, P_m des Funktionssystems f_1, \dots, f_m . Verf. bezeichnet $\text{Inv}(f_1, \dots, f_m)$ als Inversions-Kompliziertheit (inversionnaja složnost') des Systems f_1, \dots, f_m . Sei $I(n, m)$ das Maximum von $\text{Inv}(f_1, \dots, f_m)$ genommen über alle Systeme f_1, \dots, f_m von m Funktionen mit n Argumenten. Verf. gibt einen expliziten Ausdruck für $I(n, m)$ an, ferner im Falle $m = 1$ einen Ausdruck für $\text{Inv}(f)$ mittels $\text{Alt}(f)$ (= Länge der längsten Kette von Argumentvektoren, die beginnend mit 1 abwechselnde Funktionswerte von f liefern und bei denen die Menge der mit 1 besetzten Argumentstellen immer zunimmt). Die vorliegende Note enthält keine Beweise. Verf. gibt lediglich ein Lemma an, das beim Beweis eine Rolle spielt, das jedoch hier aus Platzgründen nicht wiedergegeben werden kann. — Wegen des Ursprungs der Fragestellung vgl. man Gilbert, dies. Zbl. 55, 201. *E. Burger.*

Rice, H. G.: Recursive and recursively enumerable orders. Trans. Amer. math. Soc. 83, 277—300 (1956).

Es werden Folgen von natürlichen Zahlen ohne Wiederholungen betrachtet. Betrachtet man zwei solche Folgen als äquivalent, wenn sie dieselbe Menge aufzählen, so ist das System der Äquivalenzklassen natürlich isomorph zum System aller unendlichen Mengen von natürlichen Zahlen. Eine solche Äquivalenzklasse ist rekursiv-aufzählbar, wenn sie eine Folge enthält, die durch eine rekursive Funktion erzeugt wird. Eine Äquivalenzklasse ist rekursiv, wenn ihre „Hauptfolge“ (d. i. eine Folge von natürlichen Zahlen in aufsteigender Größe) durch eine rekursive Funktion erzeugt wird. — Während bei dieser Äquivalenzrelation zwischen Folgen von der Ordnung der Folgeglieder völlig abgesehen wird und nur die aufgezählte Menge beachtet wird, entwickelt Verf. nun umgekehrt eine analoge Theorie, bei der von der aufgezählten Menge abgesehen wird und nur die Ordnung der Folge beachtet wird.

Zwei Folgen werden demgemäß nun als äquivalent betrachtet, wenn durch dieselbe Permutation die Glieder beider Folgen in ihre natürliche Größenfolge gebracht werden können. Die entstehenden Äquivalenzklassen heißen Ordnungen (orders). Die Hauptfolge einer Ordnung ist diejenige Folge der Ordnung, die alle natürlichen Zahlen aufzählt. Dann werden die rekursiv-aufzählbaren und die rekursiven Ordnungen analog zu oben definiert. Vermöge der Beschreibung einer Ordnung durch ihre Hauptfolge kann die Gesamtheit V^* aller Ordnungen mit der Gruppe aller Permutationen der Menge aller natürlichen Zahlen identifiziert werden. Dann wird die Menge E^* aller rekursiven Ordnungen eine Untergruppe von V^* . Verf. beweist zunächst einige Sätze über diese Gruppe E^* , z. B.: Bezeichnet F^* die Menge aller rekursiv-aufzählbaren Ordnungen, so ist $F^* = E^*$ die Vereinigung von abzählbar vielen Linksrestklassen nach E^* . Eine Ordnung heißt rekursiv-beschränkt, wenn zu ihrer Hauptfolge $p(n)$ eine rekursive Funktion $f(n)$ mit $p(n) \leq f(n)$ für alle n existiert. B^* bezeichne die Menge aller rekursiv-beschränkten Ordnungen. Eine Ordnung heißt rekursiv-vergleichbar, wenn zu ihrer Hauptfolge $p(n)$ eine rekursive Funktion $g(n, m)$ existiert mit $g(n, m) = 1$ falls $p(n) < p(m)$ und $g(n, m) = 0$ sonst. C^* bezeichne die Menge aller rekursiv-vergleichbaren Ordnungen. Verf. beweist u. a., daß $F^* = B^* \cap C^*$ ist. — Weiter wird die Theorie der rekursiv-aufzählbaren Ordnungen auch mit der der rekursiv-aufzählbaren Mengen in Verbindung gebracht. Z. B. wird bewiesen: Sei α eine unendliche rekursiv-aufzählbare Menge. Dann ist die rekursiv-aufzählbare Menge β genau dann ordnungsäquivalent zu α (d. h. es gibt eine partiell-rekursive Funktion, die eine ordnungstreue Abbildung von α auf β vermittelt), wenn α und β rekursive Aufzählungen aus derselben Ordnung besitzen. Verf. beweist weiter die folgende Eigenschaft für eine Menge β , die zu einer hyper-einfachen (hypersimple) Menge ordnungsäquivalent ist: $\beta' = \gamma_0 \cup \gamma_1$, $\gamma_0 \cap \gamma_1 = \emptyset$, γ_0 rekursiv-aufzählbar, γ_1 hyperimmun. Dabei bezeichnet Verf. eine unendliche Menge als hyperimmun (hyperimmune), wenn ihr Komplement wenigstens eine Menge Φ_i aus jeder diskreten Schar (discrete array nach Dekker, dies. Zbl. 52, 250) Φ_0, Φ_1, \dots umfaßt. — Weitere Anwendungen betreffen u. a. die rekursiv-beschränkten Mengen. Das sind diejenigen unendlichen Mengen von natürlichen Zahlen, zu deren Hauptfolge $p(n)$ es eine rekursive Funktion $f(n)$ mit $p(n) \leq f(n)$ für alle n gibt. Sei V die Algebra aller Mengen von natürlichen Zahlen, B die Klasse aller rekursiv-beschränkten Mengen. Dann zeigt Verf., daß $V - B$ die Klasse aller hyperimmunen Mengen ist, und stellt einen einfachen Zusammenhang zwischen den Mengen aus $V - B$ und den Ordnungen aus $V^* - B^*$ her.

E. Burger.

Rice, H. G.: On the relative density of sets of integers. Proc. Amer. math. Soc. 8, 320—321 (1957).

Dies ist eine Ergänzung zu einer früheren Arbeit des Verf. (s. vorstehendes Referat; wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie dort). Verf. charakterisiert in der vorliegenden Note die Menge B^* als die Gesamtheit aller Ordnungen, deren Hauptfolgen Automorphismen der Algebra V liefern, die die Dichtigkeit (im Sinne von Medvedev, dies. Zbl. 64, 288) erhalten oder vergrößern. Da die Klasse B die Mengen von größter Dichtigkeit enthält, so folgt als Korollar, daß B die Automorphismen aus B^* gestattet, ein Ergebnis, das Verf. früher (l. c.) auf andere Weise bewiesen hatte. Ferner folgt als Korollar, da E^* eine Gruppe ist, sofort, daß die Automorphismen aus E^* die Dichtigkeit erhalten, ein Ergebnis von Medvedev (l. c.).

E. Burger.

Mostowski, A.: On computable sequences. Fundamenta Math. 44, 37—51 (1957).

Es werden die folgenden Klassen von rekursiven Folgen $\{a_k\}$ reeller Zahlen ($0 < a_k < 1$) eingeführt: C_1 [es gibt eine rekursive Funktion φ mit $|a_k - \varphi(n, k)/n| < 1/n$], C_{2p} [es gibt zu p ($p \geq 2$) eine rekursive Funktion ψ mit $a_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n, k)}{p^n}$],

$\varphi(n, k) < p$], C_3 [es gibt eine rekursive Funktion ξ , so daß für alle p gilt $\alpha_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi(n, p, k)}{p^n}$, $\xi(n, p, k) < p$], C_4 [die Relation $\frac{p}{q} < \alpha_k$ ist rekursiv in p, q, k], C_5 [die Relation $p/q > \alpha_k$ ist rekursiv in p, q, k]. Es wird gezeigt, daß die folgenden und keine andern Inklusionsbeziehungen zwischen diesen Klassen bestehen: $C_3 \subset C_{2p} \subset C_1$ (alle p); $C_4 \subset C_3$; $C_5 \subset C_3$; $C_{2q} \subset C_{2p}$, falls p eine Potenz von q teilt. (Die Frage, ob C_3 der Durchschnitt aller C_{2p} ist, bleibt offen.) Ist $\{\alpha_k\} \in C_1$, so ist die Relation $p/q < \alpha_k$ (als Relation von p, q, k) rekursiv aufzählbar. Zum Schluß betrachtet Verf. Klassen C_j^0, C_{2p}^0 von reellen Zahlen; es wird dazu in der obigen Definition von der Abhängigkeit vom Parameter k abgesehen und „rekursiv“ durch „primitiv rekursiv“ ersetzt. Die Ergebnisse sind ähnlich, wenn auch nicht ganz so vollständig.
E. Specker.

Grzegorezyk, A.: On the definitions of computable real continuous functions. *Fundamenta Math.* **44**, 61—71 (1957).

Es werden verschiedene Möglichkeiten diskutiert, die Klasse K der berechenbaren reellen stetigen Funktionen zu definieren, und es wird gezeigt, daß alle mit der folgenden äquivalent sind: Eine Funktion φ (mit reellen Zahlen als Argument- und Wertebereich) gehört zu K , wenn es eine allgemein rekursive zahlentheoretische Funktion f gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt: (a) Wenn $a \in I_n$, so $\varphi(a) \in I_{f(n)}$ (dabei ist $\{I_n\}$ eine rekursive Aufzählung der rationalen offenen Intervalle). (b) Wenn $b \neq \varphi(a)$, so existiert eine natürliche Zahl n , so daß $a \in I_n$, $b \notin I_{f(n)}$.
E. Specker.

Rabin, Michael O.: Recursive unsolvability of group theoretic problems. *Ann. of Math.*, II. Ser. **67**, 172—194 (1958).

Unter Benutzung des Ergebnisses von Novikov [s. dies. Zbl. **47**, 249 und *Trudy mat. Inst. Steklov* **44** (1955)] über die Unlösbarkeit des Wortproblems für Gruppen beweist Verf. die Unlösbarkeit einer ganzen Reihe weiterer gruppentheoretischer Probleme. Im folgenden bezeichne „Gruppe“ immer eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und definierenden Relationen. Das Haupttheorem ist der folgende Satz: Sei P eine isomorphie-invariante Eigenschaft von Gruppen. Es gebe wenigstens eine Gruppe mit der Eigenschaft P , sowie wenigstens eine, die nicht zu irgendeiner Untergruppe einer Gruppe mit der Eigenschaft P isomorph ist. Dann gibt es kein allgemeines effektives Verfahren, das für jedes endliche Erzeugenden- und Relationensystem entscheidet, ob die zugehörige Gruppe die Eigenschaft P hat. — Eigenschaften P der obigen Art sind insbesondere: Trivialität, Zyklizität, Endlichkeit, Auflösbarkeit u. a. Weitere Folgerungen aus dem Hauptsatz sind die Nichtexistenz eines Entscheidungsverfahrens für Zerlegbarkeit in ein freies (oder direktes) Produkt, sowie für Einfachheit und eine Reihe weiterer Fragen. Auch das Meta-Wortproblem, allgemein zu entscheiden, ob für ein vorgelegtes System von endlich vielen Erzeugenden und Relationen das Wortproblem lösbar ist, ist unlösbar. Ferner ist auch das Isomorphieproblem, allgemein zu entscheiden, ob zwei vorgelegte endliche Systeme von Erzeugenden und Relationen isomorphe Gruppen definieren, unlösbar. Verf. beweist sogar darüberhinaus, daß es für Gruppen kein System von abzählbar vielen berechenbaren Isomorphie-Invarianten gibt, das zur Charakterisierung der Gruppen bis auf Isomorphie ausreicht. — Die vorliegende Arbeit ist klar geschrieben, und die Beweise sind sehr ausführlich. Sie kann ohne spezielle Vorkenntnisse über rekursive Funktionen usw. verstanden werden. Die Beweismethoden sind relativ einfach und im wesentlichen von algebraischem Charakter, und zwar, wie Verf. bemerkt, ähnlich wie die bei Markov (dies. Zbl. **43**, 11). Ein Teil der Ergebnisse ist auch von Adjan angekündigt (dies. Zbl. **65**, 9) und bewiesen worden [*Trudy Moskovsk. mat. Obšč.* **6**, 231—298 (1957)].
E. Burger.

Algebra und Zahlentheorie.

● Mostowski, Andrzej und Marceł Stark: *Elemente der höheren Algebra*. (Biblioteka mat., T. 16.) Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1958. 368 S. [Polnisch].

Das vorliegende Buch ist eine abgekürzte Bearbeitung der dreiteiligen Algebra (s. dies. Zbl. 50, 248; 57, 11) von denselben Verff. Die zwölf Kapitel dieses Buches enthalten den Vorlesungsstoff des ersten Jahres der Algebra auf der Universität. Die Verff. halten nur das notwendige Maß der Abstraktion, so daß dieses Buch für das Anfangsstudium wohl geeignet ist. Das Buch ist durch viele Beispiele und Aufgaben ergänzt. Der Vorteil des Buches liegt in der deutlichen und außerordentlich zugänglichen Erklärung. Nach dem Einleitungskapitel, das von Mengen, Funktionen, Induktion, Summen und Produkten handelt, folgen zwei Kapitel, in denen der Mittelschulstoff über die Kombinatorik und die komplexen Zahlen ausgedehnt und vertieft wird. Im 4. Kapitel werden die Elemente der Determinantentheorie erklärt und in den Erwägungen über lineare Gleichungssysteme benutzt. Die Betrachtungen über die Polynome einer Unbestimmten über einem Zahlkörper, denen das 6. Kapitel gewidmet ist, betreffen die Fragen über die Teilbarkeit und die Wurzeln. Es folgen die Interpolationsformeln, rationalen Funktionen und ein selbständiges Kapitel über Polynome mit reellen und komplexen Koeffizienten. Dort ist ein analytischer Beweis des sog. Fundamentalsatzes der Algebra und der Satz von Sturm angeführt. Kap. 8 beschäftigt sich mit der Lösung der algebraischen Gleichungen vom 2., 3. und 4. Grade. Die Theorie der Polynome einer Unbestimmten ist durch das Kapitel über Polynome mit rationalen und ganzen Koeffizienten abgeschlossen. Die übrigen Paragraphen behandeln die algebraischen und die transzendenten Zahlen. Das Kapitel über Polynome mehrerer Unbestimmter behandelt auch die symmetrischen Polynome. Der Inhalt des 11. Kapitels ist: Die Resultante, die Lösung von zwei algebraischen Gleichungen mit zwei Unbekannten, gemeinsame Punkte von algebraischen Kurven. Im Mittelpunkt der Betrachtungen der letzten Kapitel stehen die quadratischen Formen, ihre Transformation auf die kanonische Form und die Orthogonaltransformationen. Im Anhang werden einige Eigenschaften der Matrizen und Determinanten (die adjungierte Matrix, der Rang einer symmetrischen Matrix, die Gramsche Matrix, der Satz von Hamilton-Cayley) gebracht. *F. Šik.*

Gruppentheorie:

Thierrin, Gabriel: *Contribution à la théorie des anneaux et des demi-groupes*. Commentarii math. Helvet. 32, 93—112 (1957).

L'A. étudie dans ce mémoire deux classes de complexes et d'idéaux d'un anneau ou d'un demi-groupe, les complexes et les idéaux réflexifs et complètement réflexifs. Un complexe ou un idéal H est réflexif si $ab \in H$ implique $ba \in H$; il est complètement réflexif, si de plus, $abc \in H$ implique $cba \in H$. Par exemple, un complexe H d'un groupe est réflexif si l'on a $Hx = xH$ pour tout x ; il est complètement réflexif si l'on a $xHy = yHx$ pour tout couple x, y . En particulier, les sous-groupes réflexifs d'un groupe sont les sous-groupes invariants; les sous-groupes complètement réflexifs sont ceux qui contiennent le groupe commutateur. L'A. étudie les anneaux réflexifs, anneaux dans lesquels l'idéal (0) est réflexif. Pour qu'un anneau soit réflexif, il faut et il suffit que la relation $ax = ay$ implique $xa = ya$ et inversement. Cette propriété caractéristique sert de définition aux demi-groupes réflexifs. Les anneaux et demi-groupes dont tous les idéaux à droite sont réflexifs sont étudiés ainsi que certaines classes d'anneaux isomorphes à une somme sous-directe de corps. La fin du mémoire est consacrée à l'étude des décompositions d'un idéal comme intersection d'idéaux complètement réflexifs premiers.

R. Croisot.

Tamura, Takayuki, Mamoru Nakao, Mitsuo Shingai, Yasushi Iwano, Katsumi Minami, Katsuyuki Nii and Hiroshi Tateyama: Distributive multiplications to semi-group operations. J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math. 8, 91—101 (1957).

Les AA. appellent d -système un demi-groupe noté additivement muni d'une seconde opération notée multiplicativement qui soit distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition du demi-groupe. Si la multiplication est associative, le d -système s'appelle un semi-anneau. Les AA. étudient d'abord dans le cas général la possibilité d'associer à un demi-groupe donné une multiplication qui en fasse un d -système. Le problème se ramène à l'obtention d'un certain homomorphisme du demi-groupe dans l'ensemble de ses endomorphismes muni d'une manière naturelle d'une addition pas toujours définie. Les AA. résolvent directement le problème quand le demi-groupe est un anti-semi-groupe à gauche (ou à droite), un demi-groupe zéro ou un demi-treillis qui soit une chaîne. Ils déterminent finalement tous les d -systèmes et tous les semi-anneaux d'ordre 2 et d'ordre 3. *R. Croisot.*

Croisot, R.: Équivalences principales bilatères définies dans un demi-groupe. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 36, 373—417 (1957).

Soit D un demi-groupe, H un complexe et a, b éléments de D . L'ensemble $(H:a)$ des couples $(x, y) \in D \times D$ tels qu'on ait $x a y \in H$ est dit quotient bilatère de H par a . L'A. appelle équivalence principale bilatère associée au H l'équivalence R'_H définie dans D par $a \equiv b (R'_H) \Leftrightarrow (H:a) = (H:b)$. (Voir R. S. Pierce, ce Zbl. 55, 15, M. Teissier, ce Zbl. 42, 254 et M. Yamada, ce Zbl. 65, 252.) En suivant P. Dubreil (v. ce Zbl. 26, 196) l'A. donne dans ce travail des applications de ce concept d'équivalence. On introduit les concepts suivantes. Le résidu bilatère W'_H désigne l'ensemble des éléments $w \in D$ tels que $(H:w) = \emptyset$. H est dit bilatèrement net (abréviation b. n.) si $W'_H = \emptyset$, bilatèrement fort (b. f.) si la relation $(H:a) \cap (H:b) \neq \emptyset$ implique $(H:a) = (H:b)$, bilatèrement parfait (b. p.) s'il est b. f. et si l'on a $(H:h_1) \cap (H:h_2) \neq \emptyset$ quels que soient $h_1, h_2 \in H$, bilatèrement interdit (b. i.) si $H \subseteq W'_H$. D est dit bilatèrement strict (b. s.) si tout complexe b. f. de D est b. n. Nous mentionnons les résultats suivants liés à ces concepts. L'équivalence principale bilatère R'_H est régulière (c'est-à-dire $a \equiv b (R'_H) \Rightarrow a d \equiv b d (R'_H)$ et $d a \equiv d b (R'_H)$ pour tout élément $d \in D$). Si H n'est pas b. n., W'_H est une classe modulo R'_H et cette classe est un idéal de D . L'A. donne des conditions suffisantes pour que l'équivalence R'_H soit simplifiable. Si H est un complexe b. f., d'un demi-groupe b. s. toute classe A modulo R'_H est un complexe b. f. et l'on a $R'_A = R'_H$. Si S est un semi-groupe à noyau N (c'est-à-dire un semi-groupe ayant un idéal non vide minimum) et N contient un élément idempotent, alors N est un groupe et l'on a $S = N$. Entre autres les résultats suivants s'occupent des demi-groupes quotients et des images homomorphes de D . Si H est b. p. et b. n., le demi-groupe quotient D/R'_H est un semi-groupe à noyau. Soit F un demi-groupe homomorphe à D qui soit un semi-groupe à noyau et R l'équivalence d'homomorphisme associée à un homomorphisme φ de D sur F et plus soit H une classe de D modulo R dont l'image par φ soit un élément b. n. de F , alors H est un complexe b. p., b. n., saturé pour R'_H , et l'on a $R = R'_H$. A titre d'application des résultats ci-dessus on peut donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe H d'un groupe soit b. f. Une simple conséquence de ceci est l'assertion, qu'un sous-groupe d'un groupe est b. f. si et seulement s'il est invariant et plus les complexes b. f. d'un groupe sont les classes à droite (ou à gauche) du groupe par rapport à sous-groupes invariants. L'A. appelle un idéal X de la forme $(A \cdot D) \cdot D$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments $x \in D$ tels qu'on ait $D x D \subseteq A$ où A est un sous-ensemble de D) un idéal bilatèrement fermé, puis il montre, qu'un idéal est un résidu bilatère si et seulement s'il est bilatèrement fermé, ensuite pour que tout idéal de D soit bilatèrement fermé, il faut et il suffit que $D X D = D Y D$ implique $X = Y$ quels que soient X et Y idéaux de D . On peut enfin trouver des applications des résultats sus-relates dans le cas où D est un abélien demi-groupe. *J. Szendrei.*

Dubreil, P.: Introduction à la théorie des demi-groupes ordonnés. Convegno Ital.-franc. algebra astratta, Padova, 16—19 Aprile 1956, 1—33 (1957).

Verf. betrachtet einerseits bekannte, andererseits neue Resultate der Theorie der geordneten Halbgruppen. Den Hauptgegenstand bildet die Untersuchung der „gerbier“ kurz: G ; dies sind Halbgruppen G , in denen eine Ordnungsrelation \leq definiert ist, so daß für je zwei Elemente a, b von G die kleinste obere Schranke $a \cup b$ stets existiert (also G ein \cup -Halbverband ist) und die Distributivgesetze $(a \cup b)x = ax \cup bx$, $y(a \cup b) = ya \cup yb$ für alle $a, b, x, y \in G$ gültig sind. Dann genügt die Multiplikation dem Isotoniegesetz: aus $a \leq b$ folgt $ax \leq bx$ und $xa \leq xb$. In gewissen G läßt sich eine Rechts- bzw. Linksquotientenbildung $a : b$ ($a \cdot b$) einführen; diese genügen den üblichen Rechenregeln und spielen eine wichtige Rolle. Jeder Homomorphismus einer Halbgruppe definiert eine Äquivalenzrelation zwischen den Elementen; diese wird in dem Falle untersucht, daß das homomorphe Bild eine Gruppe ist. Im folgenden sei angenommen, daß G ein kommutativer G mit Element e ist und T die Gesamtheit der der Bedingung $x \leq e$ genügenden (also ganzen) Elemente x von G ist. T ist ebenfalls ein G . In T werden die Beziehungen zwischen den maximalen, den primen und den unzerlegbaren Elementen untersucht. U. a. wird gezeigt, daß jede Potenz eines maximalen Elements primär ist, aber dies nicht mehr für das Potenzprodukt von mindestens zwei verschiedenen gilt. Zwei Potenzprodukte von maximalen Elementen können nur dann gleich sein, wenn sie formal gleich sind, vorausgesetzt, daß die Exponenten möglichst klein gewählt sind. — T genügt der Bedingung Φ , falls aus $a \leq b < e$ die Existenz eines Elements $c \in T$ mit $c > a$, $a = bc$ folgt, und das Element $a \in T$ heißt Noethersch, wenn jede von a ausgehende aufsteigende Folge $a < a_1 < \dots$ im Endlichen abbricht. Genügt nun T der Bedingung Φ , so läßt sich jedes Noethersche Element ($\neq e$) von T eindeutig als Produkt von endlich vielen maximalen Elementen von T darstellen. Umgekehrt, läßt jedes Element ($\neq e$) von T eine solche Darstellung zu, so genügt T der Bedingung Φ und jedes Element von T ist Noethersch. Es wird noch die Artin-Prüfersche Äquivalenzrelation und eine Anwendung auf algebraische Mannigfaltigkeiten betrachtet.

L. Fuchs.

Kimura, Naoki: Note on idempotent semigroups. I. Proc. Japan Acad. 33, 642—645 (1957).

Ein Struktursatz für idempotente Halbgruppen wurde von D. McLean (s. dies. Zbl. 55, 14) angegeben. Das Hauptresultat dieser Arbeit liefert einen Struktursatz der regulären idempotenten Halbgruppen (d. h. es gilt die Identität $abaca = abca$): Eine idempotente Halbgruppe ist dann und nur dann regulär, wenn sie das (durch Verf. eingeführte „spined“ Produkt einer linksregulären und einer rechtsregulären idempotenten Halbgruppe (d. h. in der $aba = ab$ bzw. $aba = ba$ gilt) ist.

J. Szendrei.

Tamura, Takayuki: Commutative non-potent archimedean semigroup with cancelation law. I. J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math. 8, 5—11 (1957).

Die semigroup with cancellation law — im Deutschen als Semigruppe, im Französischen als semi-groupe schlechthin bezeichnet — heißt nonpotent, wenn kein idempotentes Element vorhanden ist. Eine kommutative Semigruppe wird archimedisch genannt, wenn für je zwei Elemente a und b ein Element c und eine natürliche Zahl m existieren derart, daß $a^m = bc$ ist. Vermittelt einer geeignet definierten Äquivalenzrelation kann die kommutative nonpotente archimedische Semigruppe in elementfremde Klassen aufgespalten werden. Vermittelt einer geeignet definierten Ordnungsrelation können die Elemente einer jeden Klasse linear geordnet werden, wobei der fallenden Kettenbedingung genügt wird. Danach ist das Element x durch das Paar (n, x_n) charakterisiert, bei dem x_n das die Klasse bestimmende Minimalelement ist und die natürliche Zahl n die Höhe von x in der Klasse angibt. Auf dieser

Grundlage wird eine aus derartigen Paaren bestehende Semigruppe konstruiert, die mit der ursprünglichen Semigruppe isomorph ist. *F. Klein.*

Tamura, Takayuki: Supplement to my paper "The theory of construction of finite semigroups II". Osaka math. J. 9, 235—237 (1957).

L'A. construit un contre-exemple permettant de répondre négativement à une question posée par lui dans le mémoire qu'il indique (v. ce Zbl. 79, 26).

R. Croisot.

Lambek, Joachim: Goursat's theorem and the Zassenhaus lemma. Canadian J. Math. 10, 45—56 (1958).

Moyennant des méthodes dues à M. J. Riguet (voir ce Zbl. 23, 6; 38, 6), l'A. du présent travail étend à une classe très générale d'algèbres universelles (au sens de M. Birkhoff) le théorème suivant dû à E. Goursat (1897): Tout sousgroupe d'un produit direct de deux groupes est déterminé par un isomorphisme entre certains groupes-facteurs des sousgroupes des groupes donnés. — Applications aux „loops“, quasigroupes, treillis relativement complétés, aux systèmes multiformes de M. J. Kuntzmann (ce Zbl. 24, 298), etc, etc. — Rapprochements entre le principal résultat et le lemme de M. H. Zassenhaus „des quatres sousgroupes“ (voir Lehrbuch der Gruppentheorie, de cet auteur, p. 51, ce Zbl. 31, 5). Voici quelques détails. Soient A, B deux ensembles (distincts ou non). Par relation binaire entre A et B on entend un triple $\varrho = (R, A, B)$ où $R \subseteq A \times B$ (= le produit cartésien de A par B). Si $\varrho' = (R', A, B)$, on écrit $\varrho' \leq \varrho$ si et seulement si $R' \subseteq R$; c'est une relation d'ordre partiel. Si pour $\varrho = (R, A, B)$ on a $\varrho \varrho^{-1} \leq \varrho$, on dit que ϱ est difonctionnelle (Riguet), ϱ^{-1} étant la converse de ϱ et juxtaposition signifiant produit de relations (au sens ordinaire de la théorie des relations binaires). Si $A' \subseteq A$, on entend par $A'\varrho$ l'ensemble de tous les $b \in B$ tels que $a \varrho b$ pour quelque $a \in A'$. Si A, B sont des groupes et si $\varrho = (R, A, B)$ on dira que ϱ est homomorphe si: (i) $1 \varrho 1$, (ii) $a \varrho b$ entraîne $a^{-1} \varrho b^{-1}$, (iii) les relations $a \varrho b, a' \varrho b'$ entraînent $a a' \varrho b b'$. Si, de plus, ϱ est une relation d'équivalence, on dira que c'est une congruence; ce sera une souscongruence si ϱ est symétrique et transitive (mais non nécessairement réflexive). Une souscongruence ϱ est toujours une congruence par rapport à $A \varrho$; soit $A \varrho / \varrho$ le groupe-facteur qu'elle définit: ce sera un sousfacteur de $A \bmod \varrho$. Cela étant, on démontre (proposition 1' de M. Riguet) que les sousfacteurs $A \kappa / \kappa$ et $B \lambda / \lambda$ (A, B groupes!) sont isomorphes si et seulement si une relation difonctionnelle et homomorphe ϱ existe, telle que $\varrho \varrho^{-1} = \kappa$ et $\varrho^{-1} \varrho = \lambda$. On montre ensuite (proposition 2) que si ϱ est homomorphe alors, elle est aussi difonctionnelle. On en déduit (proposition 3) la forme suivante du lemme de M. Zassenhaus des quatre sousgroupes (l. c. plus haut): Si κ, λ sont des souscongruences du groupe A alors, le produit $\kappa \lambda$ induit un isomorphisme entre les sousfacteurs $A \kappa \lambda \kappa / \kappa \lambda \kappa$, et $A \lambda \kappa \lambda / \lambda \kappa \lambda$ de A . Ces résultats sont utilisés en vue de l'obtention d'un théorème de raffinement de Schreier dans les termes des relations de souscongruences (proposition 5). Les résultats précédents restent vrais, pour toute classe primitive d'algèbres universelles (au sens de M. Mal'cev, voir ce Zbl. 57, 24) munies d'une opération „compositionnelle“ f_3 satisfaisant à $f_3(x, y, y) = x$ et $f_3(y, y, z) = z$. Pour d'autres détails intéressants, voir le travail lui-même.

M. Benado.

Britton, J. L.: Solution of the word problem for certain types of groups. I, II. Proc. Glasgow math. Assoc. 3, 45—54 (1956); 68—90 (1957).

I: The main theorem, enunciated in Part I and proved in Part II, can be vaguely paraphrased as follows: If one introduces into a free product of groups further relations $V = 1$, where V ranges over a set of words, and if these V are sufficiently complicated and sufficiently independent of each other, then a word equals a shorter word only if it contains a subword that is half or more than half of one of the V or V^{-1} . The precise conditions and conclusions of the theorem are complicated, and there are some alternatives, designed for various applications. The appli-

cation here made of the theorem is to the solution of the word problem in certain groups. The results obtained partly extend those of Tartakovskii [see this Zbl. 34, 15; 163; 35, 295; cf. also Amer. math. Soc., Translat. 60 (1952)], and overlap those of Schiek (see this Zbl. 71, 252). Examples are given to elucidate the significance of the various hypotheses made. — II: The main theorem announced and applied in Part I is proved here. The method consists in a detailed and elaborate combinatorial study of the possible cancellations and amalgamations. This is highly complicated, but the complications are in the nature of the subject and justified by its interest.

B. H. Neumann.

Plotkin, B. I.: Über gewisse Klassen von unendlichen Gruppen. Uspechi mat. Nauk 13, Nr. 1 (79), 189—192 (1958) [Russisch].

The results of this note require a number of definitions. Let G be a group, $R(G)$ its radical, i. e. its maximal locally nilpotent normal subgroup. A group is called radical (this Zbl. 66, 274) if it has an ascending normal series with locally nilpotent factors. Every group G has a maximal normal (characteristic) radical subgroup: its upper radical $\bar{R}(G)$. G is semisimple if $\bar{R}(G) = 1$. For example, for every group $G/\bar{R}(G)$ is semisimple. A group is completely reducible if it is the direct sum of non-abelian simple groups. Gol'berg has shown [Mat. Sbornik, n. Ser. 17 (59), 131—142 (1945)] that in every group G the completely reducible normal subgroups generate a completely reducible characteristic subgroup $A(G)$. Let a group be called F-semisimple if the centralizer of $A(G)$ in G is 1. This is a special case of a semisimple group. Finally, a group is called a \bar{W} -group if it is an extension of a radical group by an F-semisimple group. Then the author shows that a group with an ascending normal series with locally nilpotent or F-semisimple factors is a \bar{W} -group. The converse is obvious. He also shows that a group with a normally dense local system of \bar{W} -groups is itself a \bar{W} -group. [Normally dense is a local system $\{G_\alpha\}$ of subgroups if $G_\alpha \subset G_\beta$ implies that G_α is (transfinitely) accessible in G_β .] In particular, in every group the subgroup generated by all normal \bar{W} -subgroups is itself a \bar{W} -group. See also Plotkin, this Zbl. 70, 255; Trudy Moskovsk. mat. Obsč. 6, 299—336 (1957). K. A. Hirsch.

Baumslag, Gilbert: Finite factors in infinite ascending derived series. Math. Z. 68, 465—478 (1958).

An ascending derived series is a properly ascending series of groups $H_0 < H_1 < H_2 < \dots$ in which each term is the derived group of its successor: $H_i = H'_{i+1}$. It is known that if such a series is infinite, then no metabelian factor H_{i+2}/H_i can be finitely generated; but an abelian factor, say H_1/H_0 , can even be finite (B. H. Neumann, this Zbl. 70, 254). The author shows that not only one, but infinitely many abelian factors can be finite; in fact he gives a constructive method that will make infinite ascending derived series in which infinite factors H_{2k}/H_{2k-1} alternate with finite factors H_{2k+1}/H_{2k} , these latter being cyclic of order n_k . Here the sequence n_0, n_1, n_2, \dots can be chosen to consist of odd numbers, each being prime to its predecessor but otherwise arbitrary. [It is stated that even numbers can also be used, but that the proof then becomes somewhat more involved.] Hence the construction will yield continuously many such series. This result is best possible in more than one respect. The method makes use of a clever constructive device that elaborates the known „wreath product“ of groups.

B. H. Neumann.

Sadovskij, L. E.: Der Verband der Untergruppen einer nilpotenten Gruppe ohne Torsion. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3(75), 201—204 (1957) [Russisch].

Es werden folgende Resultate erhalten: 1. Eine Gruppe G habe eine Zentralreihe $E = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = G$ mit torsionsfreien G/A_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$). φ sei ein Verbandisomorphismus von G auf eine Gruppe G^φ . Dann ist $E = A_0^\varphi \subset A_1^\varphi \subset \dots \subset A_n^\varphi = G^\varphi$ wieder eine Zentralreihe mit torsionsfreien G^φ/A_k^φ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). 2. G sei eine torsionsfreie nilpotente Gruppe und $E = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n = G$

die aufsteigende Zentralreihe von G . φ sei ein Verbandisomorphismus von G auf eine Gruppe G^φ . Dann ist $E = Z_0^\varphi \subset Z_1^\varphi \subset \dots \subset Z_n^\varphi = G^\varphi$ wieder die aufsteigende Zentralreihe von G^φ . Definition. A sei eine abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und T die Torsionsuntergruppe von A . Dann ist A/T direktes Produkt von freien zyklischen Untergruppen. Der Rang von A ist die Anzahl der direkten Faktoren von A/T . G sei eine auflösbare Gruppe und $E = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G$ eine Normalreihe mit abelschen G_{i+1}/G_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Ferner haben alle G_{i+1}/G_i endlich viele Erzeugenden. Dann ist der Rang von G die Summe der Ränge von G_{i+1}/G_i . 3. Sei $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = E$ die absteigende Zentralreihe der freien nilpotenten Gruppe der Klasse n mit r Erzeugenden. Sei G' eine beliebige nilpotente Gruppe der Klasse n mit r Erzeugenden und $G' = G'_0 \supset G'_1 \supset \dots \supset G'_n = E$ eine absteigende Zentralreihe von G' . Ferner sei $\text{Rang}(G_k/G_{k+1}) = \text{Rang}(G'_k/G'_{k+1})$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Dann sind G und G' miteinander isomorph. 4. G sei eine freie nilpotente Gruppe der Klasse n und r Erzeugenden. Eine Gruppe G^φ sei zu G verbandisomorph. Dann ist G^φ zu G isomorph. *N. Itô.*

Eilenberg, Samuel and Tudor Ganea: On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups. Ann. of Math., II. Ser. 65, 517—518 (1957).

Let Π be an abstract group. The least integer n such that the cohomology groups $H^q(\Pi, A)$ are zero for any $q > n$ and any abelian group A with Π as a group of operators is called the dimension of Π . For given Π , one can construct a connected aspherical CW -complex K_Π with Π as fundamental group. The least dimension of such a complex K_Π is called the geometric dimension of Π . The (Lusternik-Schnirelmann) category of a topological space X is the least integer n such that X can be covered by open sets U_0, \dots, U_n such that each U_i is contractible in X . The category of K_Π is independent of the choice of K_Π and is called the category of Π . The main result of this note is that for any group Π $\dim \Pi = \text{cat } \Pi = \text{geom. dim } \Pi$ except for three exceptional cases. The problem whether these exceptional cases actually are present remains open. The three propositions on which the proof of the theorem rests are stated. No proofs are given. *K. Morita.*

Curzio, Mario: Alcune osservazioni sul reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito. Ricerche Mat. 6, 96—110 (1957).

Verf. betrachtet die Verbände $L(G)$, $L_N(G)$ und $\varphi(G)$ aller Untergruppen, Normalteiler bzw. nachinvarianten Untergruppen einer endlichen Gruppe G . Es wird gezeigt, daß $\varphi(G)$ genau dann relativ komplementär ist, wenn jedes Element von $\varphi(G)$ direktes Produkt einfacher Gruppen ist. Besitzt die auflösbare Gruppe G die Eigenschaft $L_N(G) = \varphi(G)$, so ist $L_N(G)$ dann und nur dann distributiv, wenn G keine zwei verschiedenen Normalteiler von derselben Ordnung besitzt (der Teil „dann“ gilt für alle Gruppen G). Ein Element a des Verbandes V heißt \cup -quasi-distributiv, wenn aus $b, c \in V$, $a \cup b = a \cup c$ stets $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ folgt; V selbst ist \cup -quasi-distributiv, wenn jedes seiner Elemente \cup -quasi-distributiv ist. Die Untergruppe A einer nilpotenten Gruppe G ist im Verband $L(G)$ genau dann \cup -quasi-distributiv, wenn keine andere Untergruppe von G dieselbe Ordnung wie A besitzt. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die \cup -Quasi-Distributivität von $L(G)$ ist, daß G zyklisch sei. Ist $\varphi(G)$ bzw. $L_N(G)$ \cup -quasi-distributiv, so ist er sogar distributiv. *L. Fuchs.*

McLain, D. H.: The existence of subgroups of given order in finite groups. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 278—285 (1957).

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung (G) . Dann heißt h eine mögliche Ordnung, falls h ein Teiler von (G) ist. Die Eigenschaft (P 1): „ G hat Untergruppen von jeder möglichen Ordnung“ hat nach P. Hall bekanntlich die Auflösbarkeit von G zur Folge. Wesentlich mehr läßt sich aus (P 1) nicht folgern, denn jede auflösbare Gruppe läßt sich — wie Verf. zeigt — in eine (P 1)-Gruppe (sogar als direkter Faktor) einbetten. Ergiebiger sind die Bedingungen (SS 1): „Jedes $H \leq G$ ist

(P 1)-Gruppe“ und (SS 2): „Jede charakteristische Faktorgruppe H/K von G (d. h. H und K charakteristische Untergruppen von G) erfüllt (P 1)“. Jede von beiden ist gleichwertig damit, daß G überauflösbar ist (Hauptreihe mit zyklischen Faktorgruppen). Die Bedingung (A 1): „Ist h ein Teiler von $(G:K)$, so existiert ein $H \leq G$ mit $K \leq H$ und $(H) = h(K)$ “ hat Überauflösbarkeit zur Folge, aber nicht umgekehrt. Verf. beweist, daß (A 1) gleichwertig ist mit der Auflösbarkeit von G und (A 1) für alle Sylowuntergruppen $S_{p,q}$, wenn p und q irgendwelche Primteiler von (G) sind. Schließlich wird noch (B 1): „Zwischen irgend zwei Untergruppen $H \leq K$ von G existieren Untergruppen von jeder möglichen Ordnung“ betrachtet. (B 1) ist gleichwertig mit: G hat einen geordneten Sylowturm, und dessen Faktorgruppen erfahren bei den inneren Automorphismen von G den identischen Automorphismus oder sind abelsch und erfahren nur Automorphismen der Gestalt $x \rightarrow x^a$, wobei a von x unabhängig ist.

B. Huppert.

Sah, Chih-Han: On a generalization of finite nilpotent groups. Math. Z. 68, 189—204 (1957).

A group G (by which we mean a finite group) is called a semi-nilpotent group if it satisfies the following condition: If P is a non-normal primary subgroup of G , then the normalizer of P in G is nilpotent. Let G be a group, then the Fitting subgroup $F(G)$ of G is defined to be the product of all the normal nilpotent subgroups of G . Furthermore, $F_0(G)$ denote the product of all the primary components of $F(G)$ which are Sylow subgroups of G . By $H(G)$ we will denote the hypercenter of G , e. g. the subgroup defined to be the terminal member of the ascending central chain of the group G . The main properties of semi-nilpotent groups are collected into the main theorem: If G is a semi-nilpotent group, then, (A) $G/F(G)$ is cyclic. (B) $F(G) = F_0(G)H(G)$. (C) If G is not nilpotent, then $\{F(G)\}$ and $\{\text{normalizers of non-normal Sylow groups of } G\}$ are the complete conjugate classes of maximal nilpotent subgroups of G . Moreover, if A and B are two distinct members of the second class, then $G = F(G)A = F(G)B$ and $H(G) = F(G) \cap A = F(G) \cap B = A \cap B$. Still further properties of semi-nilpotent groups are derived.

F. Šik.

Huppert, Bertram: Zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppen. Math. Z. 68, 126—150 (1957).

Es bezeichne $\mathfrak{S}(p^n)$ die Gruppe aller semilinearen Abbildungen $x \rightarrow ax^p + c$ über dem Galois-Feld $GF(p^n)$. Es sei G eine zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppe vom Grad p^n . Dann gilt bei geeigneter Bezeichnung der permutierten Symbole $G \subseteq \mathfrak{S}(p^n)$, ausgenommen die Grade $p^n = 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 23^2, 3^4$. Außerdem werden alle Ausnahmetypen angegeben. Der Beweis dieses wichtigen Satzes, der auf dem Induktionsprinzip des Verf. (s. dies. Zbl. 79, 37) beruht, besteht im langwierigen Nachweis der Tatsache, daß die Ordnungen der Ausnahmegruppen recht klein sind. Dabei spielt der folgende Hilfssatz eine wesentliche Rolle. Es sei G eine primitive und auflösbare Permutationsgruppe vom Grad p^n . Dann kann man eine ziffernfestlassende Untergruppe G^0 als eine Gruppe von homogenen linearen Abbildungen vom Grad n über $GF(p)$ auffassen. Besitzt G^0 einen über $GF(p)$ irreduziblen abelschen Normalteiler, so gilt bei geeigneter Bezeichnung der Ziffern $G \subseteq \mathfrak{S}(p^n)$. Schließlich soll noch bemerkt werden, daß der Verf. eine schöne geometrische Interpretation für die interessanteste Ausnahmegruppe vom Grad 3^4 erhalten hat (mündliche Mitteilung).

N. Itô.

Nakamura, Kirio: Über die Ordnung gewisser Untergruppen von $GL(q, p)$. Nagoya math. J. 12, 191—193 (1957).

Let G be a matrix group of degree m over a Galois field $GF(p)$ (p prime and > 2) and suppose that the order, g , of G is odd and not divisible by p . W. Burnside proved the (essentially arithmetical) result that if G is a prime power group then $g < p^m$ [Proc. London math. Soc., II. Ser. 2, 432—437 (1905)]. The author estab-

lishes the same inequality when G is irreducible and nilpotent and m a prime number different from p .
G. E. Wall.

Steinberg, Robert: Prime power representations of finite linear groups. II. Canadian J. Math. 9, 347—351 (1957).

Verf. setzt sich zum Ziel, seine früheren Resultate [Canadian J. Mat. 8, 580—591 (1956)] auszudehnen auf die endlichen Lieschen Ausnahmegruppen, welche kürzlich von Chevalley (vgl. dies. Zbl. 66, 15) entdeckt wurden. Ferner sollen zum Beweis nur solche Konstruktionen verwendet werden, welche auf alle betrachteten Lieschen Gruppen gleichzeitig anwendbar sind, und welche nur auf strukturellen Eigenschaften dieser Gruppen beruhen.
P. Roquette.

Ramanathan, K. G.: On orthogonal groups. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1957, 113—121 (1957).

Verf. studiert symmetrische ($\varepsilon = 1$) und schiefsymmetrische ($\varepsilon = -1$) Formen 2. Grades mit Koeffizienten aus einer einfachen Algebra \mathfrak{A} endlichen Ranges über einem Körper k der Charaktersitit $\neq 2$, welche einen involutorischen Antiautomorphismus $\alpha \rightarrow \alpha^*$ besitzt. Eine solche Form wird durch ihre Koeffizientenmatrix $C = (\gamma_{ik})$ gegeben, wobei $C^* = (\gamma_{ki}^*) = \varepsilon C$ und C als nicht singulär vorausgesetzt wird. Mit A werde die Multiplikationsgruppe von \mathfrak{A} bezeichnet, und mit $O(C)$ die Gruppe der Matrizen $U \in A$ mit $U^* C U = C$. $O(C)$ heißt die orthogonale Gruppe bez. der Matrix C . In Verallgemeinerung von Resultaten von T. Ono (dies. Zbl. 65, 12; 66, 280) beweist Verf. zunächst: dann und nur dann sind $O(C_1)$ und $O(C_2)$ in A konjugiert, wenn $C_2 = t V^* C_1 V$ mit $t \neq 0$, $t \in k$ und $V \in A$ lösbar ist. Die multiplikativen Äquivalenzklassen werden sodann auf die in C steckenden, die Null nicht eigentlich darstellenden Kerne zurückgeführt. Endlich wird folgender Sonderfall studiert: 1. k sei ein endlich algebraischer Zahlkörper. 2. \mathfrak{A} ist die volle Matrixalgebra über einem Schiefkörper, der jetzt entweder als k oder als eine Quaternionen-Algebra über k vorausgesetzt wird. 3. Der Antiautomorphismus läßt k elementweise fest und stimmt in der Quaternionen-Algebra mit dem „natürlichen“ überein. 4. Es sei $\varepsilon = 1$. Jetzt ist die multiplikative Äquivalenz von C_1 und C_2 in A mit der multiplikativen Äquivalenz von C_1 und C_2 in allen p -adischen Erweiterungen von \mathfrak{A} notwendig und hinreichend.
M. Eichler.

Adel'son-Vel'skij, G. M. und Ju. A. Šrejder: Banachsche Mittel auf Gruppen. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 6(78), 131—136 (1957) [Russisch].

Es wird gesagt, die Gruppe \mathfrak{G} genüge der Bedingung (A), falls für jede endliche Untermenge E von \mathfrak{G} die Anzahl l_n derjenigen Elemente, die sich als Produkte von höchstens n aus E genommenen Faktoren darstellen lassen, für jedes $\varepsilon > 0$ von der Ordnung $o(e^{\varepsilon n})$ ist. Satz: Bedingung (A) ist hinreichend dafür, daß es auf \mathfrak{G} ein Banach-Mittel gibt. Als Banach-Mittel wird ein Funktional $L(f)$ bezeichnet, das für alle beschränkten Funktionen $f(g)$ ($g \in \mathfrak{G}$) erklärt und so beschaffen ist, daß $L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 L(f_1) + c_2 L(f_2)$, $\inf_g f(g) \leq L(f) \leq \sup_g f(g)$, $L(f_h) = L(f)$ [mit $f_h(g) = f(g h)$] gelten. Ein weiteres (notwendiges und hinreichendes) Kriterium für die Existenz eines Banach-Mittels ist folgendes: Wie auch \mathfrak{G} in fremde Mengen $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_m$ ($n \geq 1, m \geq 1$) zerlegt wird, kann man \mathfrak{G} nicht durch die Vereinigung von Verschiebungen $E_i h_i$ und gleichzeitig durch die Vereinigung von Verschiebungen $F_j g_j$ ($h_i, g_j \in \mathfrak{G}$) bedecken. Die Beweise sind nur angedeutet. Verff. scheinen die diesbezügliche Literatur (insbesondere den Aufsatz von Dixmier, dies. Zbl. 37, 155) übersehen zu haben.
B. Sz.-Nagy.

Wright, Fred B.: Topological abelian groups. Amer. J. Math. 79, 477—496 (1957).

Verf. definiert das Radikal T einer abelschen topologischen Gruppe G als Durchschnitt aller r -Untergruppen („residual subgroups“) von G . Dabei heißt

$B \subset G$ r -Untergruppe, wenn eine maximale offene Halbgruppe M in G mit $0 \in M$ existiert, so daß $B = \{x \in G \mid x + M = M\}$ ist. Für diskretes G ist T die Torsionsuntergruppe. G ist genau dann Radikalgruppe ($G = T$), wenn jede offene Halbgruppe in G eine Gruppe ist. Problem: Ist das Radikal einer topologischen abelschen Gruppe stets eine Radikalgruppe? Wie Verf. zeigt, trifft das z. B. für lokal kompakte Gruppen zu. — G heißt maximal radikalfrei, wenn 0 r -Untergruppe ist; das ist genau dann der Fall, wenn sich G so linear total ordnen läßt, daß die Intervalltopologie die gegebene vergrößert. Ist G überdies zusammenhängend, so ist G zu den reellen Zahlen stetig isomorph. — Das Radikal eines topologischen Vektorraumes besteht aus denjenigen Elementen, die von allen stetigen linearen Funktionalen annulliert werden. — Der Hauptteil der Arbeit besteht in der Untersuchung der Struktur lokal kompakter abelscher Gruppen mit Hilfe der vorher entwickelten Begriffe r -Untergruppe, Radikal usw. Es gelingt hiermit, für einige der (bekannten) Struktursätze einfache neue Beweise zu geben.

H. Leptin.

Saitô, Masahiko: Sur certains groupes de Lie résolubles. II. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo **7**, 157—168 (1957).

Let G be a connected, solvable Lie group with the (real) Lie algebra \mathfrak{g} . Let G^* denote the simply connected covering group of G . The author has given in a previous paper (see this Zbl. **78**, 18) a necessary and sufficient condition that \mathfrak{g} is of type (E), which means that the exponential mapping maps \mathfrak{g} onto G^* . This is translated here into a criterion involving the „roots“ of \mathfrak{g} . These are linear forms ϱ_i on \mathfrak{g} which arise from the action of the adjoint representations on the 1-dimensional factor spaces $\mathfrak{g}_{i-1}/\mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{g}^c \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \dots$ being a Jordan-Hölder series for the complexification \mathfrak{g}^c of \mathfrak{g} . (See Dixmier, this Zbl. **77**, 252, where other criteria for type (E) also are given.) If for every closed subgroup F of G there exists an analytic subgroup H of G such that $F \subset H$ and H/F is compact, it is shown that the roots ϱ_i are real valued (and in particular \mathfrak{g} is of type (E)). The converse holds also and various other consequences are derived from the assumption that the roots ϱ_i are real valued. For example, the normalizer in G of an analytic subgroup of G is again an analytic subgroup of G , and actually a closed subgroup, due to a theorem of Goto (this Zbl. **41**, 360).

S. Helgason.

Rosenlicht, Maxwell: Commutative algebraic group varieties. Princeton math. Series **12**, 151—156 (1957).

Ankündigung von Sätzen über algebraische Gruppen, deren Beweise größtenteils inzwischen ausführlich erschienen sind; vgl. dazu Rosenlicht, Amer. J. Math. **78**, 401—443 (1956).

P. Roquette.

Rosenlicht, Maxwell: Some rationality questions on algebraic groups. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **43**, 25—50 (1957).

Verf. untersucht den Funktionenkörper $k(G)$ einer zusammenhängenden linearen algebraischen Gruppe G , definiert über dem Körper k . Er zeigt, wenn k vollkommen ist, daß dann $k(G)$ in einer rein transzendenten Erweiterung von k enthalten ist. Das verallgemeinert ein Resultat von Chevalley im Falle der Charakteristik 0 (s. dies. Zbl. **57**, 263). Die Beweise des Verf. sind unabhängig von denen Chevalleys (insbesondere werden keine Resultate über Liesche Algebren verwendet); daher ergibt sich auch im Falle der Charakteristik 0 ein neuer Beweis. — Falls k algebraisch abgeschlossen ist, so wird vermutet, daß $k(G)$ schon selbst eine rein transzendente Erweiterung von k ist, so wie es Chevalley im Falle der Charakteristik 0 bewiesen hat. Ohne diese Vermutung im allgemeinen Falle beweisen zu können, gibt Verf. hier eine Reduktion auf einen Satz, welcher vielleicht einfacher zu beweisen ist, und welcher die Wirkung einer maximalen zusammenhängenden auflösbaren algebraischen Untergruppe R von G im Raume G/R betrifft. — Wir erwähnen noch das folgende Resultat, welches als Hilfsmittel zum Beweis des oben erwähnten Satzes dient: Es sei G eine zusammenhängende algebraische Gruppe von Matrizen, definiert über k , mit g als

allgemeinem Punkt über k . Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß G über k auf Diagonalgestalt transformiert werden kann, ist, daß alle charakteristischen Wurzeln der Matrix g im Koordinatenkörper $k(g)$ von g enthalten sind. — Es wird auch bewiesen, daß für jede über einem unendlichen vollkommenen Körper k definierte zusammenhängende lineare algebraische Gruppe G die in k rationalen Punkte dicht in G liegen (im Sinne der Zariskischen Topologie). Daraus folgt, daß G über k definierte Cartansche Untergruppen besitzt und von diesen erzeugt wird. Es ist unbekannt, ob letzteres auch für einen endlichen Grundkörper k gilt; Verf. gibt jedoch einen Beweis (nach Serre) dafür, daß G bei endlichem Grundkörper wenigstens eine über k definierte Cartansche Untergruppe enthält. — Zum Schluß werden verallgemeinerte Jacobische Mannigfaltigkeiten von Kurven betrachtet und ihre Definitionskörper untersucht. (Vgl. Rosenlicht, dies. Zbl. 58, 370.) Es wird ein Beispiel einer zusammenhängenden algebraischen Gruppe G gegeben, deren maximale zusammenhängende lineare algebraische Untergruppe nicht über demselben Körper wie G definiert ist. — Literatur: A. Borel, s. dies. Zbl. 70, 261. — M. Rosenlicht, Amer. J. Math. 78, 401—443 (1956).
P. Roquette.

Verbände. Ringe. Körper:

Choudhury, A. C.: The doubly distributive m -lattice. Bull. Calcutta math. Soc. 49, 71—74 (1957).

Zur Terminologie: Unter einem m -lattice ist eine Algebra von drei Operationen zu verstehen, die in bezug auf zwei derselben ein Verband ist, unter einem distributiven m -lattice die Algebra, die meistens als multiplikativer Verband oder groupoïde réticulé bezeichnet wird. — In der Note wird im wesentlichen dargelegt, daß unter gewissen zusätzlichen Bedingungen folgendes stattfindet: 1. Gelten in einem m -lattice zwei der drei Relationen

$$a(b \cup c) = ab \cup ac, \quad a(b \cap c) = ab \cap ac, \quad (a \cup b)(a \cap b) = ab,$$

so gilt auch die dritte. 2. Der doppelt distributive m -lattice, d. h. der m -lattice, der in bezug auf jede der beiden Verbandsverknüpfungen ein distributiver m -lattice ist, ist auch im üblichen Sinn distributiv. Es ist dem Verf. entgangen, daß bereits F. Klein-Barmen (dies. Zbl. 24, 7) zu denselben Ergebnissen gelangt ist.

F. Klein.

Szász, G.: On relatively complemented lattices. Acta Sci. math. 18, 48—51 (1957).

Verf. bringt einige Verallgemeinerungen und Verschärfungen eines wohlbekannten Satzes von Johann v. Neumann, der besagt, daß ein komplementärer modularer Verband stets auch relativ komplementär ist. Hauptresultat: Es sei L ein relativ komplementärer Verband mit Nullelement 0 und Einselement 1 und es seien $a, b, r, s \in L$, so daß $r \wedge s = a$, $r \vee s = b$. Dann sind folgende Behauptungen gleichwertig: I. Ist $t \in L$ irgendeine Lösung des Systems (1) $r \wedge t = 0$, $r \vee t = 1$, $(a \vee t) \wedge b = s = a \vee (t \wedge b)$, — so gibt es Elemente $y, z \in L$ mit (2) $a \wedge y = 0$, $a \vee y = s$, $b \wedge z = s$, $b \vee z = 1$, $s \wedge t = y$, $s \vee t = z$. II. Für alle dem System (2) genügenden Elemente $y, z, t \in L$, ist t eine Lösung von (1). — Hauptfolgerungen 1. L und $a, b, r, s \in L$ seien wie im Hauptresultat. Dann gibt es ein Komplement r' von r derart, daß $s = (a \vee r') \wedge b = a \vee (r' \wedge b)$. 2. L und $a, b, r, s \in L$ seien wie bisher und a', b', s' seien beliebige Komplemente von a, b, s . Angenommen nun, L sei modular. Dann ist $r' = [(a' \wedge s) \vee s'] \wedge (s \vee b') = (a' \wedge s) \vee [s' \wedge (s \vee b')]$ stets ein Komplement von r .

M. Benado.

Nakamura, Masahiro: The permutability in a certain orthocomplemented lattice. Kōdai math. Sem. Reports 9, 158—160 (1957).

L'A. considère la relation de permutabilité ainsi définie dans un treillis orthocomplémenté: a permutable avec b si et seulement si $a = (a \cap b) \cup (a \cap b')$.

Cette relation n'est pas symétrique en général. L'A. appelle treillis symétriques les treillis pour lesquels elle l'est. Il caractérise ces treillis par la propriété suivante: $a \leq b$ implique $b = a \cup (a' \cap b)$. Il indique quelques propriétés des treillis symétriques.

R. Croisot.

Curzio, Mario: Sui reticoli \cup -quasi distributivi. Ricerche Mat. 6, 237—240 (1957).

Der Verband V sei dual halb-modular, habe beschränkte Ketten und besitze die Eigenschaft: zu je zwei Elementen $x, y \in V$, die obere Nachbarn von $x \cap y$ sind, gibt es in V einen dritten oberen Nachbar z von $x \cap y$, so daß $x \cup y = x \cup z = y \cup z$. Das Element a von V ist genau dann \cup -quasi-distributiv (vgl. dies. Zbl. 79, 245), wenn in V keine zwei Elemente b, c ($b > c \neq a$) existieren, so daß die Länge einer (und somit jeder) maximalen Kette zwischen a und b mit der Länge einer solchen zwischen c und b übereinstimmt.

L. Fuchs.

Curzio, Mario: Su di una questione proposta da G. Birkhoff. Ricerche Mat. 6, 27—33 (1957).

G. Birkhoff hat in seinem wohlbekannten Buch „Lattice Theory“ (dies. Zbl. 33, 101) das Problem gestellt, für jede natürliche Zahl N die kleinste Zahl $\psi(N)$ zu bestimmen, so daß jeder Verband der Ordnung $\geq \psi(N)$ einen Unterverband der Ordnung N besitze. In einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 53, 17) hat sich Verf. mit diesem Problem für modulare Verbände der Länge 3 beschäftigt und nun betrachtet er dasselbe Problem für halb-modulare Verbände ebenfalls der Länge 3.

L. Fuchs.

Dwinger, Ph.: Complete homomorphisms of complete lattices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 60, 412—420 (1957).

Einige Bezeichnungen und Definitionen: Durchwegs bedeute L einen vollständigen Verband mit 0 und 1 als Null- und Einselement. Ist θ eine Kongruenzbeziehung über L , so bedeute I_θ (\bar{I}_θ) die Menge aller $x \in L$ mit $x \equiv 0 \pmod{\theta}$ ($x \equiv 1 \pmod{\theta}$). Eine Kongruenzbeziehung θ über L heiße vollständig, wenn aus $x_\alpha \equiv y_\alpha \pmod{\theta}$, $\alpha \in A$ stets $\bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha \equiv \bigvee_{\alpha \in A} y_\alpha \pmod{\theta}$ und $\bigwedge_{\alpha \in A} x_\alpha \equiv \bigwedge_{\alpha \in A} y_\alpha \pmod{\theta}$ folgt (A = beliebige nicht leere Indexmenge; $x_\alpha, y_\alpha \in L$, $\alpha \in A$). Eine Abbildung $x \rightarrow \bar{x}$ von L ($x \in L$) in einen Verband \bar{L} ($\bar{x} \in \bar{L}$) heiße vollständiger Homomorphismus, wenn das Bild von L in \bar{L} vollständig ist und wenn für jede nicht leere Indexmenge A und alle $x_\alpha \in L$, $\alpha \in A$ stets ist $\bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha = \bigvee_{\alpha \in A} \bar{x}_\alpha$ und $\bigwedge_{\alpha \in A} x_\alpha = \bigwedge_{\alpha \in A} \bar{x}_\alpha$. [Bezüglich Ideals, Hauptideals, Kongruenzbeziehung usw. werde auf das Birkhoffsche Buch „Lattice theory“ (dies. Zbl. 33, 101) verwiesen.] Hauptresultate: 1. Eine Kongruenzbeziehung θ von L ist dann und nur dann vollständig (siehe oben), wenn der dazugehörige Homomorphismus θ^* vollständig ist. — 2. Eine Kongruenzbeziehung θ von L ist dann und nur dann vollständig, wenn jede Nebenklasse von $L \pmod{\theta}$ ein (abgeschlossenes) Intervall (= Quotient) ist. 3. Eine Zerlegungskongruenz θ von L (d. h. eine solche Kongruenzbeziehung von L , daß L_θ ein direkter Faktor von L ist, wobei L_θ den Verband aller Nebenklassen von $L \pmod{\theta}$ bedeutet) ist stets vollständig. — 4. L sei ein (vollständiger und) relativ komplementärer Verband und θ sei eine Kongruenzbeziehung von L . Dann sind folgende drei Bedingungen logisch gleichwertig: (i) θ ist eine Zerlegungskongruenz von L (siehe oben), (ii) θ ist vollständig, (iii) I_θ ist Hauptideal. — 5. L sei wie in 4. und $C^*(L)$ bedeute die Menge aller vollständigen Kongruenzbeziehungen. Dann ist $C^*(L)$ eine vollständige Boolesche Algebra, die isomorph ist zu einem gewissen Unterverband L' von L . Darüber hinaus gilt: Wenn $\{\theta_\alpha, \alpha \in A\}$, $\theta_\alpha \in C^*(L)$ und wenn (gemäß 4, (iii)) $I_{\theta_\alpha} = [0, a_\alpha]$, $a_\alpha \in L$, $\alpha \in A$ gesetzt wird, dann ist $I_{\bigwedge_{\alpha \in A} \theta_\alpha} = [0, \bigwedge_{\alpha \in A} a_\alpha]$ und $I_{\bigvee_{\alpha \in A} \theta_\alpha} = [0, (\bigwedge_{\alpha \in A} a'_\alpha)']$. — 6. Ist A eine vollständige Boolesche Algebra, dann sind

$dC^*(A)$ und A stets isomorph. Neben anderen interessanten Resultaten enthält die Arbeit das Beispiel eines distributiven, vollständigen [und zwar dem unendlichen Distributivitätsgesetz $(\bigwedge_{\alpha \in A} x_\alpha) \vee x = \bigwedge_{\alpha \in A} (x_\alpha \vee x)$ genügenden] Verbandes, der keine Boolesche Algebra ist, und der außerdem vollständige Homomorphismen besitzt, die keine Zerlegungshomomorphismen (alias Zerlegungskongruenzen!) sind (vgl. 3. und 4.!).

M. Benado.

Ward jr., L. E.: Completeness in semi-lattices. Canadian J. Math. 9, 578—582 (1957).

In bezug auf den ordnungstheoretisch durch

$$L(x) = \{a; a \leq x\}, \quad x \wedge y = \sup L(x) \cap L(y)$$

definierten Halbverband (X, \leq) werden die beiden folgenden Kriterien hergeleitet:

1. (X, \leq) ist dann und nur dann vollständig, wenn jedes $L(x)$ kompakt in bezug auf die Intervalltopologie ist. 2. (X, \leq) ist dann und nur dann kompakt in bezug auf seine Intervalltopologie, wenn jeder Endomorphismus einen Fixpunkt hat. Verf. geht in der Weise vor, daß er zu bekannten Sätzen von Frink, Tarski und Davis über vollständige Verbände die halbverbandstheoretischen Analoga aufgestellt.

F. Klein.

Benado, Mihail: Sur une interprétation topologique de la notion de normalité unitaire. Bull. Sci. math., II. Sér. 81, 87—112 (1957).

The relation of uniform normality in a complete lattice ("normalité unitaire", cf. D. Barbilian, this Zbl. 60, 59; V. Kořinek, this Zbl. 26, 387) and the closure operation naturally connected with it were used by the author in his investigations of regular products of groups (this Zbl. 79, 44). This paper deals fully with this normality relation and the corresponding closure operation [the "relative closure" of K. Kuratowski, Fundamenta Math. 3, 182—199 (1922)] examining inter alia how far each determines the other. The author suggests that uniform normality will do for arbitrary lattices what the topology corresponding to the closure operation does for modular lattices.

Hanna Neumann.

Fröhlich, A.: Distributively generated near-rings. I: Ideal theory. — II: Representation theory. Proc. London math. Soc., III. Ser. 8, 76—94; 95—108 (1958).

The system R is a (right-) near-ring if it is a group with respect to addition, a semigroup with respect to multiplication, and the distributive law $(a + b)c = ac + bc$ holds for all a, b, c in R . Elements d which also satisfy $d(a + b) = da + db$ for all a, b in R are called „distributive“. The author investigates near-rings which are additively generated by a set of distributive elements (d.-g. near-rings). This property ensures a more complete and much simpler ideal theory than that obtainable in arbitrary near-rings (cf. for example D. W. Blackett, this Zbl. 52, 267) as was noted already by the reviewer when dealing with a particular example of such near-rings (this Zbl. 70, 19). For instance, ideals defined as normal subgroups of the additive group that admit left- and right-multiplication by elements of the near-ring are precisely the kernels of the homomorphisms of these near-rings; ideal products and quotients have many of the usual properties. Beyond this the author shows how to define the lower and upper central series for these near-rings so that the fundamental properties carry over. Finally distributor ideals and their relation to commutator ideals are investigated giving interesting theorems closely akin to known results on the connection between distributivity and commutativity of addition (cf. e. g. O. Taussky, this Zbl. 16, 50; B. H. Neumann, this Zbl. 27, 154). The second part studies the representation of a given d.-g. near-ring as a near-ring of mappings of a group. If R is a near-ring, the group G is called an R -group if it admits the elements of R as left operators such that $(x + y)g = xg + yg$ and $(xy)g = x(yg)$ for all x, y

in R and all g in G . If the distributive elements of R induce endomorphisms in G , then G is called a proper R -group. The additive group of R is itself a proper R -group in the obvious manner. This leads naturally to the concepts of R -homomorphism and R -endomorphism of an R -group, and to a corresponding re-orientation of ideal theory in R . After establishing the basic properties of all these concepts the author uses them to prove some further results on the derived series and on distributor ideals. Further, if the R -group G possesses an idempotent R -endomorphism, then G is the sum of its map under the endomorphism and the kernel of the endomorphism. Conditions for this sum to be direct are established and these yield an insight into the relation between idempotents of R and corresponding decompositions of R as the sum of a left ideal and a left R -module.

Hanna Neumann.

Kleinfeld, Erwin: Alternative nil rings. Ann. of Math., II. Ser. **66**, 395—399 (1957).

Als Präzisierung eines früher (s. E. Kleinfeld, dies. Zbl. **51**, 25) erhaltenen Resultates beweist der Verf. folgende Sätze: 1. Ist R ein alternativer Ring mit von 3 verschiedener Charakteristik und enthält R keine trivialen Ideale, so gilt entweder $R = 0$ oder $N \neq 0$, wo N der Kern von R ist. (Ein Ideal $A \neq 0$ von R heißt trivial, wenn $A^2 = 0$). 2. Ist R ein primer alternativer Ring mit von 3 verschiedener Charakteristik, der ein Nilring ist, so ist R assoziativ. (R ist prim, wenn aus $AB = 0$ entweder $A = 0$ oder $B = 0$ folgt, wo A, B Ideale aus R sind). 3. Ist R ein einfacher alternativer Ring mit von 3 verschiedener Charakteristik, dann ist R entweder eine Cayley-Dickson-Algebra oder assoziativ.

E. Trost.

Kostrikin, A. I.: Liesche Ringe, die einer Engelschen Bedingung genügen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **21**, 515—540 (1957) [Russisch].

A Lie ring of prime characteristic p is said to satisfy condition $E_{n,p}$ (where $n < p$), if $[u v v \cdots v] = 0$ (left-normed product with n factors v). The main result obtained is that a Lie ring satisfying condition $E_{n,p}$ is locally nilpotent if (i) $n = 4$, $p > 4$ (ii) $n = 5$, $p > 5$ (iii) $n = 6$, $p > 6$. Cases (i) and (iii) solve the restricted Burnside problem for $p = 5$ and 7 [for $p = 5$ cf. also Kostrikin, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **21**, 289—310 (1957), Higman, Proc. Cambridge philos. Soc. **52**, 381—390 (1956)]. If h_7 denotes the order of the maximal finite group of exponent 7 on 2 generators, then $h_7 > 7^{1075}$. — The proof mainly operates in the associative ring generated by the inner derivations, and also uses the concept of the Levitzki radical applied to Lie rings. In particular the author proves that in a Lie ring L satisfying $E_{n,p}$, the union of all locally nilpotent ideals is itself a locally nilpotent ideal $N(L)$, called the radical of L , and $L/N(L)$ has zero radical.

P. M. Cohn.

Campbell, H. E.: On the Casimir operator. Pacific J. Math. **7**, 1325—1331 (1957).

Ziel der Arbeit ist, den Begriff des üblichen Casimirschen Operators der assoziativen, Lieschen und alternativen Algebren \mathfrak{A} so zu formulieren, daß er für beliebige Charakteristik brauchbar wird. Besitze \mathfrak{A} die Basis e_1, \dots, e_n über einem beliebigen Körper \mathfrak{F} . Es sei $x \mapsto S_x$ eine Darstellung von \mathfrak{A} , wo — falls \mathfrak{A} alternativ ist — S_x den Teil einer Darstellung (S_x, T_x) bedeutet. \mathfrak{A} heißt nicht-entartet, wenn die „trace“-Funktion $t(R_x R_y)$ der Darstellung R_x ($=$ Rechtsmultiplikationen) nicht-entartet ist. In diesem Falle ist \mathfrak{A} die direkte Summe von einfachen Algebren. Verf. wählt dieselbe komplementäre Basis e'_1, \dots, e'_n mit der Eigenschaft $t(R_{e_i} R_{e'_i}) = \delta_{ij}$ (Kroneckersches Delta) für jede Darstellung S und definiert Γ_S als $\sum S_{e_i} S_{e'_i}$. ($\Gamma_T = \sum T_{e_i} T_{e'_i}$ falls \mathfrak{A} alternativ ist.) Diese Casimirschen Operatoren haben die folgenden Eigenschaften für nicht-entartete assoziative, Liesche oder alternative Algebren über einem beliebigen Körper: 1. Γ_S ist mit jedem S_x (und T_x) vertauschbar; 2. Γ_R und Γ_L ($R =$ Rechts-, $L =$ Linksmultiplikation) sind der identischen Trans-

formation gleich. Verf. beweist das erste Whiteheadsche Lemma für nicht-entartete alternative Algebren von beliebiger Charakteristik und einen Spezialfall von Levis Satz für Liesche Algebren von Primzahlcharakteristik. *L. Fuchs.*

Weiner, L. M.: Lie admissible algebras. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 11, 10—24 (1957).

From any linear algebra A (of finite dimension, over a field of characteristic $\neq 2$) two algebras $A^{(-)}$, $A^{(+)}$ may be obtained by defining on the space of A the multiplications $[a, b] = \frac{1}{2}(ab - ba)$, $\{a, b\} = \frac{1}{2}(ab + ba)$ respectively. The algebra A is called Lie admissible if $A^{(-)}$ is a Lie algebra, L -simple if $A^{(-)}$ is simple, and Jordan admissible, J -simple are defined similarly in terms of $A^{(+)}$. The author proves the following decomposition theorem: Let A be a flexible power-associative algebra of characteristic 0 such that $B = A^{(-)}$ is a direct sum of simple Lie algebras $B_i = A_i^{(-)}$, where the A_i are subspaces of A . Then the A_i are ideals in A . Without the assumption of flexibility this result is false, as is shown by the case of algebras of degree one, i. e. algebras A in which $x^2 = f(x)x$, where the scalar function $f(x)$ is necessarily linear. The multiplication of such algebras is determined by f and the multiplication in $A^{(-)}$. If L is any simple Lie algebra (with multiplication $[x, y]$) and f any linear function on L , then the algebra consisting of the space L with the multiplication $xy = \frac{1}{2}(f(x)y + f(y)x) + [x, y]$ is a simple power-associative algebra of degree one, distinct from the known types. — Finally Lie admissible J -simple algebras are considered. Albert (cf. this Zbl. 45, 321) has shown that if $A^{(+)}$ is a central simple J -algebra of $t \times t$ matrices ($t > 2$) then for some scalar extension K , the multiplication in A_K is $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx) + (xy - yx)T$, for a certain linear transformation T . The author proves that if $A^{(+)}$ is isomorphic to the algebra of all $t \times t$ matrices ($t > 2$), $A^{(-)}$ is a Lie algebra and T is non-singular on the space spanned by the $xy - yx$ ($x, y \in A$), then T has the form $aT = \alpha a + \lambda(a)1$, where $\alpha \in K$, λ is a linear function and a any matrix of trace zero. But further examples show that general Lie admissible J -simple algebras allow a more complicated form of T . *P. M. Cohn.*

Andreoli, Giulio: Commutazione ed anticommutazione. Numeri di Dirac e di Hafner. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl., II. Ser. 8, Nr. 1, 3—24 (1957).

In einer Diracschen Algebra zur Zahl $k (\neq 0)$ existieren zwei Elemente a, b , für die $ab - ba = k\varepsilon$ gilt, während für eine Hafnersche Algebra $ab + ba = k\varepsilon$ gefordert wird. ε ist der Modul der Algebra. Ein Beispiel für Diracsche Zahlen wurde bereits von Pincherle angegeben; ist nämlich $M[f] = x \cdot f(x)$ und $D[f] = f'(x)$, so gilt $DM[f] - MD[f] = f$. Zur Untersuchung der Algebren geht der Verf. von ihren Darstellungen aus. Eine spezielle Zerlegung der Matrizen (endlich oder unendlich) führt zur Diskussion der Vertauschbarkeit und schiefen Vertauschbarkeit von Algebren. In einem allgemeinen schiefvertauschbaren Körper gilt die Theorie der Matrizen unverändert, aber der Begriff der Determinante muß durch den Begriff der Permanente [vgl. E. R. Caianiella, Coll. probl. math. théor. quantique des champs, Lille 3—8 (1957)] ersetzt werden. Einige Verallgemeinerungen werden besprochen. Hier interessieren vor allem der Fall, daß die erzeugenden Elemente der „Vertauschungsrelation“ $ab = b^2 a^\sigma$ mit festen Zahlen ρ, σ genügen und weiter der Fall, daß $ab = \Theta ba$ gilt, wo Θ einen Operator bedeutet. *F. Selig.*

Patterson, E. M.: On right-multiplication algebras. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 8, 260—271 (1957).

Es sei V_n ein n -dimensionaler Vektorraum über einem Körper F . Wird in V_n durch

$$x(y + z) = xy + xz, (x + y)z = xz + yz, x(\alpha y) = \alpha(xy) = (\alpha x)y$$

eine Multiplikation definiert, wo x, y, z Vektoren aus V_n sind und α in F liegt, so entsteht eine lineare Algebra A über V_n . Die Rechtsmultiplikationsalgebra $R(A)$

von A ist die lineare assoziative Algebra, die durch die Transformationen $x \rightarrow x a$ (bei festem a) erzeugt wird, die V_n in sich überführen. Verf. untersucht gewisse Klassen von Algebren, die dasselbe $R(A)$ besitzen. Es wird $n \geq 2$ und $F \neq GF(2)$, $F \neq GF(3)$ vorausgesetzt. Es werden Sätze von folgendem Typus bewiesen: 1. Ist C eine lineare assoziative Algebra der Dimension n und vom Geschlecht Null, die aus Transformationen von V_n in sich besteht und sind A und A^* zwei Algebren über V_n , so daß $R(A) = R(A^*) = C$, dann gibt es einen Automorphismus τ von V_n , so daß für alle x, y in V_n gilt $x \circ y = x \tau(y)$, wo $x \circ y$ Multiplikation in A^* und $x y$ Multiplikation in A bedeutet. 2. Ist unter den Voraussetzungen von 1. die Algebra C von der Dimension $n + 1$ und vom Geschlecht 1 und besitzt sie ein Einselement, so gibt es einen Automorphismus τ von V_n und eine lineare Funktion h , die V_n auf F abbildet, so daß

$$(*) \quad x \circ y = h(y) x + x \tau(y).$$

Falls $R(A)$ ein Einselement besitzt und von der Dimension $n + 1$ und dem Geschlecht 1 ist, so gilt für die durch $(*)$ über V_n gegebene Algebra A^* , abgesehen von gewissen Ausnahmefunktionen $h(y)$, wieder $R(A^*) = R(A)$. E. Trost.

Gillman, L.: Rings with Hausdorff structure space. Fundamenta Math. 45, 1—16 (1957).

Sei A ein Ring. $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(A)$ sei eine Strukturmenge von A , d. h. eine Menge (zweiseitiger) Ideale S von A , für welche gilt: Sind I, J Durchschnitte von Idealen aus \mathfrak{S} und ist $I \cap J \subseteq S \in \mathfrak{S}$, so ist $I \subseteq S$ oder $J \subseteq S$. (Beispiele: Menge $\mathfrak{P}(A)$ aller primitiven Ideale in A ; Menge $\mathfrak{Q}(A)$ aller primen Ideale in A .) Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$, so sei \mathfrak{A} die Menge aller $T \in \mathfrak{S}$ mit $T \supseteq \bigcap \mathfrak{A}$ ($=$ Durchschnitt aller $S \in \mathfrak{A}$). Durch diese Stonesche Topologie wird \mathfrak{S} zu einem T_0 -Raum (Strukturraum von A). Es werden die Ringe A und Strukturmengen $\mathfrak{S}(A)$ untersucht, für welche der Raum $\mathfrak{S}(A)$ hausdorffsch ist. Dies gilt beispielsweise genau dann, wenn für jedes $S \in \mathfrak{S}$ das Ideal $N(S)$ in genau einem $T \in \mathfrak{S}$ (nämlich S) enthalten ist [$N(S) =$ Menge aller $a \in A$, zu denen eine Umgebung \mathfrak{U} von S mit $a \in A\mathfrak{U}$ existiert]. Diese Resultate sind teilweise Verallgemeinerungen bekannter Sätze über den Ring $C(X)$ aller stetigen, reellen Funktionen über einem vollständig regulären T_1 -Raum X . Es ergeben sich auch rein algebraische Sätze (z. B.: In einem biregulären Ring ist jedes eigentliche Primideal primitiv), sowie eine Kennzeichnung der stark regulären Ringe. Der letzte Abschnitt behandelt geordnete Ringe. G. Nöbeling.

Kohls, C. W.: The space of prime ideals of a ring. Fundamenta Math. 45, 17—27 (1957).

Vgl. vorstehendes Referat. Es werden Beziehungen zwischen den algebraischen Eigenschaften von A und den Kompaktheitseigenschaften von $\mathfrak{S}(A)$ untersucht (teils für beliebiges $\mathfrak{S}(A)$, teils für ein $\mathfrak{S}(A)$ mit $\mathfrak{Q}(A) \supseteq \mathfrak{S}(A) \supseteq \mathfrak{P}(A)$; teils für beliebiges A , teils für kommutatives A). Weiter werden die Zusammenhänge zwischen den primen oder primitiven Idealen in einem Ideal von A und den Idealen von A untersucht. Die Resultate werden angewandt auf die „Adjunktion einer Einheit“. G. Nöbeling.

McCoy, N. H.: Certain classes of ideals in polynomial rings. Canadian J. Math. 9, 352—362 (1957).

Es sei R ein Ring und σ eine Eigenschaft, die für (Rechts-) Ideale von R und von $R[x]$ definiert ist. Jedes (Rechts-) Ideal mit der Eigenschaft σ wird dann ein σ -Ideal genannt. Das „going up“-Theorem gilt für σ -Ideale, wenn für jedes σ -Ideal α von R auch $\alpha[x]$ ein σ -Ideal von $R[x]$ ist. Entsprechend gilt das „going down“-Theorem für σ -Ideale, wenn für jedes σ -Ideal A von $R[x]$ auch $A \cap R$ ein σ -Ideal von R ist. Ist schließlich α ein beliebiges (Rechts-) Ideal von R bzw. $R[x]$, so wird mit α_σ der Durchschnitt aller σ -Ideale bezeichnet, die α enthalten. Verf. zeigt: (a) R sei ein σ -Ideal. (b) Ist B ein σ -Ideal und A ein (Rechts-) Ideal von $R[x]$ mit $AR[x] \subseteq B$,

so folge $A \subseteq B$. (c) Es gelte das „going up“- und das „going down“-Theorem für σ -Ideale. Dann gilt für jedes (Rechts-) Ideal α von R : $(\alpha[x])_\sigma = \alpha_\sigma[x]$. Dieses allgemeine Prinzip wird auf die Fälle angewandt, in denen die σ -Ideale zu folgenden Typen gehören: (1) Semi-prime Rechtsideale, (2) semi-prime Ideale, (3) Primideale in beliebigen Ringen R ; (4) prime Rechtsideale und (5) Annulatorideale, wenn R semi-prim ist. Die Bedingungen (a) und (b) sind in diesen Fällen automatisch erfüllt. Verf. beweist, daß für (1)–(5) auch das „going up“- und das „going down“-Theorem gelten. Abschließend zeigt Verf. an einem Beispiel, daß bei semi-primem Ring R in $R[x]$ prime Rechtsideale existieren können, die nicht durch den „going up“-Prozeß aus primen Rechtsidealen von R gewonnen werden. *H.-J. Kowalsky.*

Batho, Edward H.: Non-commutative semi-local and local rings. *Duke math. J.* **24**, 163–172 (1957).

Some results of the classical theorems on commutative semi-local rings and local rings are generalized by the author for non-commutative rings. An arbitrary ring R with identity is said to be semi-local if (a) R satisfies the maximum condition on left ideals, (b) for the Jacobson radical J of R : $\bigcap_{n=0}^{\infty} J^n = (0)$ holds, (c) R/J satisfies the minimum condition on left ideals. According to the basic structure theorem

a complete semi-local ring is isomorphic to the (finite) group-direct-sum of rings $(C_i)_{m_i}$ of all $m_i \times m_i$ matrices over the completely primary ring C_i and a subgroup N of J . It is shown that the structure of the completion of a semi-local ring is the same as the structure of a complete semi-local ring. The author calls a semi-local ring R local if J is the unique maximal ideal in R . The structure of all complete local rings is determined by the following theorem: A complete local ring is isomorphic to a full ring of matrices over a complete, completely primary local ring. Finally the topological property of a complete local ring is treated. *J. Szendrei.*

Beaumont, Ross A. and J. Richard Byrne: On the construction of R -modules and rings with polynomial multiplication. *Pacific J. Math.* **7**, 1305–1317 (1957).

S_1, \dots, S_k bezeichnen (nicht notwendigerweise verschiedene) Unterhalbgruppen der additiven Gruppe R^+ eines Ringes R , wobei jede S_i das Element 0 von R enthält, und R^* sei eine Erweiterung von R . Die Abbildung f von $T = S_1 \times \dots \times S_k$ in R^* wird m -distributiv genannt, wenn eine Zahl m ($1 \leq m \leq k$) existiert so, daß

$$f(s_1 + s'_1, \dots, s_m + s'_m; s_{m+1}, \dots, s_k) \\ = f(s_1, \dots, s_m; s_{m+1}, \dots, s_k) + f(s'_1, \dots, s'_m; s_{m+1}, \dots, s_k)$$

und wenn ähnliches für die letzten $k - m$ Argumente gilt. Die Menge der m -distributiven Abbildungen von T in R^* bildet eine Gruppe H_1 . Das Polynom $f(x_1, \dots, x_n) \in R^*[x_1, \dots, x_n]$ definiert eine Abbildung $f(s_1, \dots, s_n)$ von T in R^* . Die Menge H_2 dieser Abbildungen ist auch eine Gruppe. Falls R^* ein kommutativer nullteilerfreier Ring (= Integritätsbereich) ist, und S_i von 0 verschiedene Ideale in R sind, werden diejenige Polynome über R^* bestimmt, die Abbildungen definieren, die in $H_1 \cap H_2$ enthalten sind. Diese Resultate ermöglichen Konstruktionen von R -Moduln und Ringen wie folgt. Die Elemente der direkten Summe $V = S^+ \oplus \dots \oplus S^+$, wobei $S (\neq 0)$ ein Ideal in einem Ring R bezeichnet, kann man in der Form (s_1, \dots, s_k) ($s_i \in S$) annehmen. Es sei die Skalarmultiplikation von $r (\in R)$ und (s_1, \dots, s_k) [Multiplikation in V] durch $r(s_1, \dots, s_k) = (f_1, \dots, f_k)$ $[(s_1, \dots, s_k)(s'_1, \dots, s'_k) = (f_1, \dots, f_k)]$ definiert, wo f_i eine durch ein Polynom $f_i(x_0; x_1, \dots, x_k)$ [$f(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k)$] über R^* definierte Abbildung von $R \times V$ [$V \times V$] in R^* bezeichnet. Verff. charakterisieren im Falle eines Integritätsbereiches R^* der Charakteristik 0 [Integritätsbereiches R^*], die R als Ideal enthält, diejenigen Polynome, für die V ein R -Modul [Ring] ist. *J. Szendrei.*

Maranda, J.-M.: Factorization rings. *Canadian J. Math.* **9**, 597–623 (1957).

Verf. verallgemeinert einige wohlbekannte Resultate der Idealtheorie von Inte-

gritätsbereichen [s. Krull, Idealtheorie (s. dies. Zbl. 11, 197) und das Referat in dies. Zbl. 2, 10] auf beliebige assoziative und kommutative Ringe \mathfrak{D} mit Einselement. Zuerst wird eine verallgemeinerte Bewertung von \mathfrak{D} eingeführt als eine Funktion V von \mathfrak{D} auf eine teilweise geordnete Halbgruppe M , so daß für je drei Elemente a, b, c aus \mathfrak{D} gilt: 1. aus $V(a) \leq V(b)$ und $V(a) \leq V(c)$ folgt $V(a) \leq V(b - c)$; 2. $V(ab) = V(a) + V(b)$. (Vgl. Ref., dies. Zbl. 42, 35.) Diejenigen Bewertungen V werden betrachtet (und speziell genannt), wo die angeordnete Halbgruppe der Werte mit der Halbgruppe G' übereinstimmt (G' entsteht aus der angeordneten Gruppe aller ganzen rationalen Zahlen durch Hinzufügen des Symbols ∞), und es außerdem ein reguläres Element (= Nichtnullteiler) $a \in \mathfrak{D}$ mit $V(a) > 0$ gibt. Genüge \mathfrak{D} noch der Bedingung, daß jedes reguläre Element ein Inverses besitzt; so bilden die Elemente a von \mathfrak{D} , für die $V(a) \geq 0$ bei einer speziellen Bewertung V ist, eine Ordnung \mathfrak{o} . Ist \mathfrak{q}_n als das Ideal aller $a \in \mathfrak{o}$ mit $V(a) \geq n$ definiert, so ist $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}$ ein ein reguläres Element enthaltendes Primideal, die \mathfrak{q}_n sind zu \mathfrak{p} gehörige verschiedene Primärideale, und $\mathfrak{p}' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_n$ (bestehend aus allen $a \in \mathfrak{o}$ mit $V(a) = \infty$) ist ein Primideal. Die Theorie der Quasiteilbarkeit von \mathfrak{o} von der Waerden und Artin läßt sich ohne Schwierigkeiten für beliebige \mathfrak{D} verallgemeinern: Die Menge $\overline{F(\mathfrak{o})}$ der Klassen der quasigleichen regulären (= sowohl a als auch a^{-1} enthält ein reguläres Element) \mathfrak{o} -Ideale \mathfrak{a} von \mathfrak{D} bildet genau dann eine Gruppe bezüglich Multiplikation, wenn \mathfrak{o} in \mathfrak{D} vollständig ganz abgeschlossen ist. — Es sei angenommen, daß \mathfrak{o} ein Faktorisationsring ist, d. h. daß für die Elemente von $\overline{F(\mathfrak{o})}$ die eindeutige Faktorisierung gilt, und außerdem \mathfrak{D} der vollständige Quotientenring von \mathfrak{o} ist. Die Primideale \mathfrak{p} von \mathfrak{o} , für die die Klasse \mathfrak{p} ein Primelement von $\overline{F(\mathfrak{o})}$ ist und $\mathfrak{p}^* = (\mathfrak{p}^{-1})^{-1} = \mathfrak{p}$ gilt, spielen eine wichtige Rolle. Jedes dieser vom Verf. als „relevant“ bezeichneten (und mit den minimalen eigentlichen regulären Primidealen übereinstimmenden) Primideale \mathfrak{p} bestimmt eine spezielle Bewertung V von \mathfrak{D} , so daß die formale Potenz $\mathfrak{p}^{(n)} = (\mathfrak{p}^n)^*$ genau aus allen $a \in \mathfrak{o}$ mit $V(a) \geq n$ besteht. Ist \mathfrak{a} ein Ideal von \mathfrak{o} mit $\bar{\mathfrak{a}} \in \overline{F(\mathfrak{o})}$ und $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{p}}_1^{n_1} \cdots \bar{\mathfrak{p}}_r^{n_r}$ mit relevanten Primidealen $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$, so gilt $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{p}_1^{(n_1)} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r^{(n_r)}$. Insbesondere ist jedes reguläre Hauptideal ($\neq \mathfrak{o}$) von \mathfrak{o} als Durchschnitt formaler Potenzen von relevanten Primidealen darstellbar. Umgekehrt, ist für jedes reguläre Element a von \mathfrak{o} , das keine Einheit von \mathfrak{o} ist, das Hauptideal (a) als Durchschnitt endlich vieler formalen Potenzen von minimalen regulären Primidealen von \mathfrak{o} darstellbar, so ist \mathfrak{o} ein Faktorisationsring. Es gilt noch der wichtige Satz: sind \mathfrak{p}_i die relevanten Primideale von \mathfrak{o} und V_i die entsprechenden Bewertungen von \mathfrak{D} , so gehört $a \in \mathfrak{D}$ genau dann zu \mathfrak{o} , wenn $V_i(a) \geq 0$ für alle i . Zum Schluß werden Ringe betrachtet, für die aus der Quasigleichheit zweier regulärer \mathfrak{o} -Ideale deren Gleichheit folgt.

L. Fuchs.

Châtelet, A.: Chaînes et décompositions d'idéaux semi-premiers. Bull. math. Soc. Sci. math. phys. RPR, n. Sér. 1 (49), 5—10 (1957).

La famille des idéaux semi-premiers d'un anneau A (commutatif avec unité) est un treillis distributif relativement à l'inclusion. Pour deux intervalles $S \subset S'$ et $T \subset T'$ de cette treillis, les quotients résiduels (qui sont aussi d'idéaux semi-premiers) sont égaux quand $S \cap T' = S' \cap T = S \cap T$ et $S + T' = S' + T = S' + T$. Ceci permet d'étendre le théorème de Schreier dans la forme: si deux chaînes d'idéaux semi-premiers ont les mêmes termes extrêmes, on peut intercaler dans chacune d'elles des idéaux de façon à former deux chaînes d'intervalles, entre lesquels existe une correspondance biunivoque, avec égalité des quotients résiduels des intervalles correspondantes. A une chaîne ascendante d'idéaux semi-premiers (de n intervalles) Σ_i , avec Σ_{n+1} égal à A , on peut adjoindre une décomposition, ordonnée, du premier terme en intersection: $\Sigma_1 =$ l'intersection de suite des idéaux S_i , où les S_i sont les

quotients-résiduels successifs des Σ_i . Telles décompositions, appelées normales, sont caractérisées par cette propriété, que chaque terme soit premier avec l'intersection des suivants (au sens du quotient résiduel; c. à. d. $[S_i : (\bigcap_{j>i} S_j) = S_i]$). Et l'A. montre aussi que toute décomposition ordonnée, (propre) d'un idéal, devient une décomposition normale, en y remplaçant des termes par des décompositions convenables. Le théorème de Schreier, déjà énoncé, entraîne les propriétés suivantes: deux décompositions (normalement) ordonnées d'un idéal semi-premier donnent lieu, en remplaçant dans chacune d'elles des termes par des décompositions convenables, aux nouvelles décompositions qui soient composés des mêmes termes, à l'ordre près. On retrouve de cela la propriété de décomposition d'un idéal dans un anneau Noetherien en une intersection des idéaux primaires dont les radicaux sont tous différents et où ces idéaux premiers sont déterminés uniquement. Voici quelques corrections à faire: page 9, ligne 9: la dernière égalité doit être une inégalité; page 9, ligne 8 de bas: T_j doit être remplacé par U_j . V. S. Krishnan.

Northcott, D. G. and D. Rees: Extensions and simplifications of the theory of regular local rings. J. London math. Soc. **32**, 367—374 (1957).

Eine bedeutungsvolle Arbeit für die Theorie der kommutativen Ringe. Es sei A ein Noetherscher Ring mit 1-Element, Q ein Stellenring mit dem maximalen Primideal \mathfrak{m} der Dimension d . Folgende neue Begriffe werden geprägt: 1. Primfolge (prime sequence), d. i. eine Folge g_1, \dots, g_k von Elementen aus A , für die gilt: g_1 nicht Nullteiler, $(g_1, \dots, g_i) : g_{i+1} = (g_1, \dots, g_i)$ für $i = 1, \dots, k-1$; 2. G -Ideal (general ideal) ist ein von einer Primfolge erzeugtes Ideal; 3. Der Grad eines Ideals \mathfrak{a} ist die Länge der längsten in \mathfrak{a} enthaltenen Primfolge; 4. Ein Stellenring Q heißt halbberegulär, wenn $\text{Grad } \mathfrak{m} = d$ ist. 5. MC -Ringe sind Ringe, in denen der von Cohen verallgemeinerte Macaulaysche Satz gilt: Jedes Hauptklassenideal \mathfrak{a} ist ungemischt, d. h. alle zu einem Ideal $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_r)$ des Ranges r gehörigen Primideale haben Rang r . — Damit werden folgende Sätze u. a. bewiesen: 1. In einem Stellenring Q ist jedes Hauptklassenideal ungemischt dann und nur dann, wenn Q halbberegulär ist. 2. In einem halbberegulären Stellenring gilt für jedes Primideal \mathfrak{p} : $\text{Dim } \mathfrak{p} + \text{Grad } \mathfrak{p} = d = \text{Dim } \mathfrak{p} + \text{Rang } \mathfrak{p}$; 3. Alle halbberegulären Stellenringe und nur diese sind MC -Ringe. 4. A ist dann und nur dann MC -Ring, wenn $A_{\mathfrak{p}}$ für jedes maximale Primideal \mathfrak{p} halbberegulär ist. 5. Jede echte und nicht verlängerbare Primidealkette $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{p}_s$ in einem halbberegulären Stellenring hat die Länge $s = d$. 6. In einem regulären Stellenring erzeugt jedes Parametersystem ein irreduzibles Ideal, womit ein Satz des Ref. (dies. Zbl. **42**, 265) auf eine neue einfache Weise bewiesen wird. W. Gröbner.

Rees, D.: The grade of an ideal or module. Proc. Cambridge philos. Soc. **53**, 28—42 (1957).

Let A be a Noetherian ring, and \mathfrak{a} an ideal in A . The author has previously introduced the integer „grade \mathfrak{a} “ (this Zbl. **72**, 27), associated with \mathfrak{a} . Here he shows this integer to be the least k such that $\text{Ext}_A^k(A/\mathfrak{a}, A) \neq 0$, and proceeds in consequence to define the grade of any A -module M to be the least integer k such that $\text{Ext}_A^k(M, A) \neq 0$. If M is of grade k and N is any A -module of homological dimension $l < k$, then he shows that $\text{Ext}_A^p(M, N) = 0$ if $p < k - l$. Taking $M = A/\mathfrak{a}$, $N = A/\mathfrak{b}$, where \mathfrak{a} and \mathfrak{b} are ideals in A of grade k , and homological dimension $l < k$, respectively, it follows that $\mathfrak{b}:\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, and hence that every prime ideal associated with \mathfrak{b} has grade $\leq l$ (cf. Gröbner, Algebraische Geometrie, this Zbl. **33**, 127). Defining a perfect module or ideal to be one with its grade equal to its homological dimension, the author goes on to show that if M is a perfect A -module of grade k , and if \mathfrak{a} is any element of A such that $M/\mathfrak{a}M$ is of grade $\geq k + 1$, then $M/\mathfrak{a}M$ is perfect of grade $k + 1$. Further, if \mathfrak{a} is a perfect ideal of grade k , all prime ideals associated with \mathfrak{a} are of grade k , and if \mathfrak{b} is an ideal of grade $l > k$ which

contains \mathfrak{a} , then there exists b_1, \dots, b_{l-k} in \mathfrak{a} such that $(\mathfrak{b}, b_1, \dots, b_i)$ is perfect of grade $k+i$ ($i = 1, \dots, l-k$). Reintroducing his notion of a general ideal of rank k (this Zbl. loc. cit.), he shows that if \mathfrak{g} is a general ideal in A , of rank k , then the „form ring“ of \mathfrak{g} is the ring of polynomials in k variables over A/\mathfrak{g} , and that if A is a local ring then the converse is true (for arbitrary rings the further condition that

$\bigcap_{m=1}^{\infty} (\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^m) = \mathfrak{a}$, for every ideal \mathfrak{a} in \mathfrak{g} , is required). Also, all prime ideals associated

with a power of \mathfrak{g} are of the same grade, and all maximal prime ideals associated with \mathfrak{g} and a power of \mathfrak{g} are the same. Next, U -rings A , (unmixed rings), for which $\text{rank } \mathfrak{a} = \text{grade } \mathfrak{a}$ for any ideal \mathfrak{a} in A , are studied. A (Noetherian) ring A is a U -ring if and only if every general ideal (including the zero ideal) in A is unmixed. In a U -ring, every power of a general ideal and every perfect ideal is unmixed. Rings of polynomials over a field, and regular local rings are U -rings. Furthermore, A is a U -ring if and only if the local ring $A_{\mathfrak{p}}$ is a U -ring for every maximal prime ideal \mathfrak{p} of A . Finally, local U -rings are studied. A local ring Q is proved to be a U -ring if the maximal ideal \mathfrak{m} of Q has grade equal to its rank. Under this last condition Q is also equidimensional, and its completion also satisfies the condition. If Q is a local U -ring of dimension $d > 0$, and q is an \mathfrak{m} -primary ideal generated by d elements, then q is a general ideal of rank d and the multiplicity of q equals its length. Another necessary condition for a local ring Q to be a U -ring follows: namely that every ideal of Q generated by parameters should have multiplicity equal to its length. (It is a sufficient condition that one such ideal should satisfy this condition.) Also if Q is a regular local ring of dimension n , and \mathfrak{a} an ideal of Q , Q/\mathfrak{a} is a U -ring if and only if \mathfrak{a} is a perfect ideal. An application in the theory of coherent sheaves is given [cf. Serre, Proc. internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo & Nikko Sept. 1955, 175—189 (1956)].

W. H. Cockcroft.

Northcott, D. G.: A note on the global dimension of polynomial rings. Proc. Cambridge philos. Soc. **53**, 796—799 (1957).

A comparatively elementary and short proof is given of the fact, well known in homological algebra, that the global dimension of a polynomial ring over a commutative field is equal to the number of variables. The proof depends on a reduction principle of D. Rees (this Zbl. **72**, 27).

W. H. Cockcroft.

Harada, Manabu: Note on the dimension of modules and algebras. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A **7**, 17—27 (1956).

The paper proves firstly $\text{l. gl. dim } A = \text{l. gl. dim } A_n$, w. $\text{gl. dim } A = \text{w. gl. dim } A_n$ (in the notations of Cartan-Eilenberg, Homological Algebra, Princeton 1956) where A_n denotes the ring of all matrices of degree n ($< \infty$) over a ring A (with unit element). In particular, A_n is left hereditary if and only if A is so. The same remains true with „hereditary“ replaced by „semi-hereditary“. In analogy to a theorem of Auslander (this Zbl. **67**, 271) it is shown that $\text{w. gl. dim } A$ is equal to $\sup \text{w. l. dim } A/I$ where I ranges over all left ideals of A . In order to have $\text{w. gl. dim } A = 0$ it is proved to be necessary and sufficient that A is regular in Neumann's sense. If $\text{w. r. dim } A/\mathfrak{A} = 0$ for an ideal \mathfrak{A} of A then $\text{l. gl. dim } A \geq \text{l. gl. dim } A/\mathfrak{A}$, $\text{w. gl. dim } A \geq \text{w. gl. dim } A/\mathfrak{A}$. Similar inequalities hold with A/\mathfrak{A} replaced by eAe (e an idempotent) under the assumption $\text{w. r. dim}_{eAe} A = 0$.

T. Nakayama.

Auslander, Maurice: On regular group rings. Proc. Amer. math. Soc. **8**, 658—664 (1957).

Let $K(G)$ be the group algebra of a group G over a commutative ring K with unit. On giving first a homological characterization of (Neumann's) regular rings, by the property of having weak global dimension 0 [found independently also by Harada (see the previous review), the paper proves that if $K(G)$ is regular then G is a torsion group and K is regular and is uniquely divisible by the order of each

element of G , and that in case G is locally finite this condition on K is also sufficient for the regularity of $K(G)$. If G is abelian and K is a field, the weak global dimension of $K(G)$ equals the rank of G . T. Nakayama.

Jans, James P.: Compact rings with open radical. Duke math. J. **24**, 573—577 (1957).

Jeder total unzusammenhängende kompakte Ring ist inverser Limes endlicher Ringe. Verf. betrachtet kompakte Ringe R mit offenem (Jacobson'schen) Radikal N . In der Darstellung dieser Ringe als inverser Limes haben alle endlichen Ringe einen gemeinsamen halbeinfachen Bestandteil. Hierzu zeigt Verf.: R gestattet genau dann eine Wedderburn-Zerlegung $R = S + N$ (S abgeschlossener, halbeinfacher Unterring), wenn das Einselement e von R/N einen Repräsentanten e in R mit derselben additiven Ordnung besitzt. Aus $R = S + N = S' + N$ folgt die Isomorphie von S und S' . Es gibt ein $z \in N$ mit dem quasiinversen Element z' , so daß $s \rightarrow s - z s - s z' + z s z'$ ein Isomorphismus von S auf S' ist. Notwendig und hinreichend für die Existenz einer Wedderburn-Zerlegung ist ferner auch eine der beiden folgenden Bedingungen: (1) Zu N gibt es eine komplementäre Untergruppe. (2) R ist die ringtheoretische direkte Summe endlich vieler Algebren über endlichen Körpern. Weiter zeigt Verf.: R sei ein total unzusammenhängender kompakter Ring mit dem Radikal N . Wenn dann N^2 offen ist, bilden die Potenzen von N eine Basis des Umgebungsfilters der Null. Schließlich wird ein freier kompakter Ring \bar{F} mit folgender Eigenschaft konstruiert: Jeder kompakte Ring R mit Einselement, der eine Wedderburn-Zerlegung gestattet und für den N^2 offen ist, ist ein homomorphes Bild von \bar{F} . Ist umgekehrt Ω ein stetiger Homomorphismus eines solchen Ringes R auf \bar{F} , so gibt es einen abgeschlossenen Unterring R' von R , so daß die Restriktion von Ω auf R' ein topologischer und algebraischer Isomorphismus auf \bar{F} ist. H.-J. Kowalsky.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Sachs, Horst: Untersuchungen über das Problem der eigentlichen Teiler. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg **6**, 223—260 (1957).

L'A. a généralisé de deux manières différentes le problème suivant: établir l'existence d'un nombre premier p ainsi que ξ appartienne à l'exposant n par rapport à p , où ξ est un nombre rationnel et n est un nombre naturel donné d'avance. En ce qui concerne la première généralisation, on donne un nombre ξ d'un corps algébrique \mathfrak{K} et un nombre naturel n et on cherche les conditions pour l'existence d'un idéal premier \mathfrak{p} de \mathfrak{K} tel que l'on a $\xi^n - 1 \equiv 0(\mathfrak{p})$, $\xi^{n/p^\sigma} - 1 \not\equiv 0(\mathfrak{p})$ où $\sigma = 1, 2, \dots, s$ et $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_s^{e_s}$ est la décomposition en facteurs premiers de n . Si un tel \mathfrak{p} existe, alors \mathfrak{p} est nommé une solution du problème; dans le cas contraire, la paire $\{\xi, n\}$ est nommée une exception. Dans la deuxième généralisation on cherche l'existence d'un nombre premier p tel que $\xi^v \bmod p$, où ξ est un nombre rationnel donné, considérée comme une fonction de v ($v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) soit périodique avec la plus petite période égale à n , où n est un nombre naturel donné. Au lieu de ξ^v on considère encore des fonctions $f_v(\xi)$ rationnelles en ξ , comme par exemple $f_v(\xi) = 2 \cos [v \arccos \xi/2]$ pour lesquelles on considère le même problème. En ce qui concerne ces deux généralisations, ce travail contient de nombreux résultats.

C. P. Popovici.

Kubota, Tomio: Galois group of the maximal abelian extension over an algebraic number field. Nagoya math. J. **12**, 177—189 (1957).

Ziel der Arbeit ist die Bestimmung der Galoisgruppe der maximalen abelschen Erweiterung Ω_A eines algebraischen Zahlkörpers Ω von endlichem Grad. Dazu genügt es, die Gruppe X_l aller stetigen Charaktere der Galoisgruppe von Ω_A/Ω zu bestimmen, deren Ordnungen Potenzen einer Primzahl l sind. Nun ist X_l eine

abzählbare primäre Gruppe. Die Untergruppe $X'_{l,\infty}$ aller Elemente unendlicher Höhe von X_l ist von endlichem Rang. Werden mit v_ν die ν -te Ulmsche Invariante von X_l , mit $v_{\infty,\nu}$ die ν -te Ulmsche Invariante von $X'_{l,\infty}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) und mit $\dim X_l$ der Rang der größten vollständigen Untergruppe $X_{l,\infty}$ von X_l bezeichnet, so folgt unter Benutzung des Ulmschen Theorems, daß die Struktur von X_l vollständig durch v_ν , $v_{\infty,\nu}$ und $\dim X_l$ bestimmt ist. Ist nun ζ_l eine primitive l -te Einheitswurzel, und ist ν_l diejenige natürliche Zahl, für die der Körper $\Omega(\zeta_l)$ eine primitive l^{ν_l} -te Einheitswurzel aber keine primitive l^{ν_l+1} -te Einheitswurzel enthält, so ist $v_\nu = 0$ für $\nu < \nu_l$ und $v_\nu = \infty$ für $\nu \geq \nu_l$. Sei nun $\mathfrak{S} = \{l_1, l_2, \dots\}$ die Menge aller Primfaktoren von l in Ω , ferner Ω_{l_i} die l_i -adische Hülle von Ω und e die Einheitsgruppe von Ω . Mit $e_{l,\nu}$ werde die Gruppe aller ε aus e bezeichnet, die l^ν -te Potenzen in jedem Ω_{l_i} sind. Es existiert dann eine Konstante μ_l mit der Eigenschaft, daß $l^{\mu_l} = (e_{l,\nu}; e_{l,\nu+1})$ ist für jedes hinreichend große ν . Für $\dim X_l$ gilt dann: $\dim X_l = N - \mu_l$, wobei N der Absolutgrad von Ω ist. Sei schließlich l^{c_ν} die Anzahl der Elemente von $X'_{l,\infty}$, deren Ordnungen l^ν teilen. Dann ist $v_{\infty,\nu} = 2c_\nu - c_{\nu-1} - c_{\nu+1}$. Die Bestimmung der Anzahlen l^{c_ν} wird im wesentlichen durch die in der Arbeit bewiesenen Sätze über die Charaktere unendlicher Höhe geleistet. Ist $l \neq 2$, so wird abschließend gezeigt, daß dann

$$l^{v_{\infty,\nu}} = \frac{h_\nu^2}{h_{\nu-1} h_{\nu+1}} \cdot \frac{(B^{(\nu-1)}; B_*^{(\nu-1)}) (B^{(\nu+1)}; B_*^{(\nu+1)})}{(B^{(\nu)}; B_*^{(\nu)})^2}$$

ist. Hierbei bedeuten h_ν die Anzahl der Idealklassen von Ω , deren Ordnungen l^ν teilen, ferner $B^{(\nu)}$ die Gruppe aller β aus Ω^\times mit der Eigenschaft, daß das Hauptideal (β) die l^ν -te Potenz eines Ideals aus Ω ist und $B_*^{(\nu)}$ die Gruppe aller β aus $B^{(\nu)}$ derart, daß β für jedes i in $w_i \Omega_{l_i}^{\times l^\nu}$ liegt, wobei mit w_i die Gruppe der Einheitswurzeln in Ω_{l_i} bezeichnet wird.

K. Latt.

Roquette, Peter: Einheiten und Divisorklassen in endlich erzeugbaren Körpern. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **60**, 1—21 (1957).

Let K be a finitely generated field. With a subset x of K such that the Stufe $\text{St}(x)$ of the subfield (x) generated by x is equal to $\text{St}(K)$, a prime divisor \mathfrak{p} of K is said to belong to x when x is integral for \mathfrak{p} and $\text{St}(x\mathfrak{p}) = \text{St}(K) - 1$. A set M of prime divisors of K is said to be finitely generated when there is a finite set x , with $\text{St}(x) = \text{St}(K)$, such that the set M_x of all prime divisors of K belonging to x is contained in M and the complement $M - M_x$ is finite. The multiplication group K^\times of K is naturally mapped homomorphically into the divisor group D_M , the free abelian group generated by M . The kernel and the cokernel of the homomorphism are the unit group E_M and the class group C_M . The paper proves (the unit and class theorems): If M is finitely generated, the groups E_M and C_M are finitely generated. Thus, on showing first that with M finitely generated a second set of prime divisors of K is finitely generated if and only if it differs from M by a finite set, it is proved that the validity of the unit resp. class theorem is independent of the choice of a finitely generated set M . This is used both in stating and in proving the induction theorem that if $L \subset K$ and if the unit theorem holds for L and K/L , it does so for K , and similarly with the class theorem provided that L is algebraically closed in K and K/L is separable, where for K/L everything is understood in the relative sense (thus e. g. the place of K^\times is taken by the factor group K^\times/L^\times). The unit theorem is then proved by induction, since it is true in case of Stufe 1 both in the absolute and in the relative sense (the latter with L algebraically closed in K) (cf. Artin-Whaples, this Zbl. **60**, 83). The same is done with the class theorem by reducing the relative case of (relative) Stufe 1 (with L algebraically closed in K and K/L separable) to the results of Weil [Acta math. **52**, 281—315 (1929)] and Néron (cf. this Zbl. **49**, 308).

T. Nakayama.

Lamprecht, Erich: Bewertungssysteme und Zetafunktionen algebraischer Funktionenkörper. III. Math. Ann. 132, 373—403 (1957).

Es sei A ein endlich-algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 2 über dem in A algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k . Eine „Erzeugung“ von A wird definiert als ein Paar verschiedener Teilkörper K, K' von A vom Transzendenzgrad 1 über k , deren jeder in A algebraisch abgeschlossen ist. Zu jeder Erzeugung (K, K') von A gehört ein System $B = B(K, K')$ von einrangigen Primdivisoren \mathfrak{P} von A , definiert dadurch, daß \mathfrak{P} in K' aber nicht in K trivial ist. Dieses Primdivisorsystem B wurde in zwei vorangegangenen Arbeiten des Verf. untersucht (s. dies. Zbl. 70, 37; 71, 35). In dieser Arbeit wird nun folgendermaßen ein System $b = b(K, K')$ von zweirangigen Bewertungen von A gebildet: Ist $\mathfrak{P} \in B$, und ist q ein Primdivisor des Restkörpers A/\mathfrak{P} über K/\mathfrak{P} , so liefert die Hintereinanderausführung der Restabbildungen mod \mathfrak{P} und mod q einen Ort von A , dessen zugehörige Bewertung diskret vom Range 2 ist; sie wird mit (\mathfrak{P}, q) bezeichnet. b sei das System dieser (\mathfrak{P}, q) . Es ist so umfassend, daß sich darauf eine Relativarithmetik von A über k aufbauen läßt. In bezug auf das Bewertungssystem b werden Divisoren gebildet; sowie Hauptdivisoren, Divisorgrade, Zähler- und Nennerdivisoren eines Elements aus A . Für endlich viele Bewertungen wird ein Annäherungsunabhängigkeitssatz bewiesen. [Hierzu vgl. auch die allgemeinen Resultate von Ribenboim, Math. Z. 68, 1—18 (1957).] Es wird untersucht, wie sich der Divisorbegriff verhält bei Änderung der zweiten Erzeugungskomponente K' . Vertauscht man die beiden Erzeugungskomponenten K und K' , so stellt sich heraus, daß die zugehörigen Bewertungssysteme $b(K, K')$ und $b(K', K)$ elementfremd sind. Jedoch ergibt sich der folgende wichtige Zusammenhang zwischen beiden: Jedem Paar $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ von Primdivisoren \mathfrak{p} von K und \mathfrak{p}' von K' entsprechen eindeutig endlich viele Primstellen (\mathfrak{P}, q) aus $b(K, K')$ derart, daß jedes (\mathfrak{P}, q) Fortsetzung von \mathfrak{p} und von \mathfrak{p}' ist. Entsprechend gehören zu $(\mathfrak{p}', \mathfrak{p})$ endlich viele Primstellen (\mathfrak{P}', q') aus $b(K', K)$. Es zeigt sich, daß, von einer Ausnahmемenge abgesehen, die Paare $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ „vertauschungszulässig“ sind in dem Sinne, daß die zugehörigen Restklassenkörper $A(\mathfrak{P}, q)$ bzw. $A(\mathfrak{P}', q')$ ihrer Anzahl und ihrem Typus nach übereinstimmen. (Hierbei sind z. T. Separabilitätsvoraussetzungen über A zu machen.) Die Bedeutung dieser Vertauschungszulässigkeit liegt darin, daß die Ausnahmемenge „nicht sehr viele“ Primstellen in einem gewissen Sinne enthält, was für die nachfolgend zu besprechende Anwendung auf Zetafunktionen wichtig ist. Im folgenden werde vorausgesetzt, daß k ein endlicher Körper mit q Elementen ist. In seinen vorangegangenen Arbeiten hatte Verf. zur Erzeugung (K, K') eine Zetafunktion $Z_A(s; K, K')$ definiert. Hier wird mit Hilfe von $b(K, K')$ eine zweite Definition angegeben, nämlich:

$$Z_A(s; K, K') = \prod_{(\mathfrak{P}, q)} \frac{1}{1 - q^{-sf(\mathfrak{P}, q)}},$$

wobei über alle (\mathfrak{P}, q) aus $b(K, K')$ multipliziert wird und $f(\mathfrak{P}, q)$ den Grad des Restklassenkörpers $A(\mathfrak{P}, q)$ über k bezeichnet. Während eine frühere Transformationsregel (vgl. die erste der oben zitierten Arbeiten) den Übergang von $Z_A(s; K, K')$ zu $Z_A(s; K, K'')$ beschrieb, ergibt sich hier aus dem obigen Satz über Vertauschungszulässigkeit das Verhalten von $Z_A(s; K, K')$ bei Vertauschung von K und K' . Beides zusammen ergibt den folgenden Hauptsatz über die Erzeugungsunabhängigkeit der Zetafunktionen: Alle in der offenen Halbebene $\Re(s) > 1$ liegenden Pole und Nullstellen von $Z_A(s; K, K')$ sind unabhängig von der Erzeugung (K, K') und daher dem Funktionenkörper A über k in invarianter Weise zugeordnet.

P. Roquette.

Vartak, Manohar N.: On the Hasse-Minkowski invariant of the Kronecker product of matrices. Canadian J. Math. 10, 66—72 (1958).

Es seien A und B die Koeffizientenmatrizen zweier quadratischen Formen in

einem algebraischen Zahlkörper oder einem algebraischen Funktionenkörper einer Variablen über einem endlichen Konstantenkörper. Die Variablenzahlen seien m und n . Dann ist das Kroneckerprodukt $A \times B$ die Koeffizientenmatrix einer quadratischen Form in $m n$ Variablen. Verf. bestimmt ihre Hasseschen Invarianten. Sie sind

$$c_p(A \times B) = (-1, -1)_p^{m+n+1} (|A|, |B|)_p^{mn+1} (|A|, -1)_p^{n(n-1)/2} \times \\ \times (|B|, -1)_p^{m(m-1)/2} c_p(A)^n c_p(B)^m.$$

Hierbei bezeichnet $(a, b)_p$ das Hilbertsche Normenrestsymbol.

M. Eichler.

Zahlentheorie:

Stolt, Bengt: Die Anzahl von Lösungen gewisser diophantischer Gleichungen. Arch. der Math. 8, 393—400 (1958).

Let q be an odd prime and $D \equiv 3 \pmod{4}$ a squarefree positive integer, such that the class number of $K(\sqrt{-D})$ is prime to q . It is shown that the indeterminate equation $x^2 + x + \frac{1}{4}(D+1) = y^q$ has then at most one solution in positive integers x and y , except in the case $D \equiv 3 \pmod{8}$, $q \equiv 1 \pmod{6}$, when there are at most three solutions. The author uses the ordinary method of factorization in $K(\sqrt{-D})$, but afterwards goes back to an equation in y , which is considered as a congruence $\pmod{2}$. This method was first used by Persson (this Zbl. 34, 170) in the particular case $q = 7$. There are some misprints in formula (19) p. 397: A factor D^s is missing twice, and $(2n-s-1)$ should be $(2n-s+1)$.

E. S. Selmer.

Mitsui, Takayoshi: On the partitions of a number into the powers of prime numbers. J. math. Soc. Japan 9, 428—447 (1957).

Es sei $T(n, m; k)$ die Anzahl der additiven Zerlegungen der positiven ganzen Zahl n in k -te Potenzen (k ganz ≥ 1) von Primzahlen $p \leq m$. Verf. beweist für große n und m mit $n \geq m^k$ eine asymptotische Formel

$$T(n, m; k) = (2\pi A_2)^{-1} e^{n\alpha + A_1} \{1 + O(\max(n^{-k/2(k+1)(k+2)}, m^{-k/2(k+3)}))\}$$

gleichmäßig in n und m . Hier ist α die Wurzel der Gleichung $n = \sum_{e^{\alpha p^k} - 1} \frac{p^k}{e^{\alpha p^k} - 1}$ (die Summationen erstrecken sich über alle Primzahlen $p \leq m$) und es ist $A_2 = \sum p^{2k} e^{\alpha p^k} (e^{\alpha p^k} - 1)^2$.

H. D. Kloosterman.

Pall, G. and O. Taussky: Application of quaternions to the representations of a binary quadratic form as a sum of four squares. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 58, 23—28 (1957).

Es sei $r_s(n)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen Zahl n als Summe von s Quadraten ganzer Zahlen und $r_s(\varphi)$ die Anzahl der Darstellungen der binären quadratischen Form

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$$

als Summe von s Quadraten von Linearformen mit ganzzahligen Koeffizienten. Ist $d = ab - h^2$ die Determinante von $\varphi(x, y)$, so ist $r_4(\varphi)$ dann und nur dann > 0 , wenn $r_3(d) > 0$ ist. Für diese schon von Mordell mit Quaternionen bewiesene Tatsache wird hier ein neuer Beweis gegeben. Ferner gilt für primitive Formen $\varphi(x, y)$: $r_4(\varphi) = r_4(k) \cdot r_3(d)$, wobei $k = (a, 2h, b)$, also gleich 1 oder 2 ist. Eine etwas kompliziertere Beziehung gilt für imprimitive Formen $\varphi(x, y)$.

N. Hofreiter.

Cellitti, Carlo: Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi relative a G_2 di forme quadratiche binarie primitive di seconda specie di determinante $D > 0$ e $\equiv 5 \pmod{8}$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 23, 15—21 (1957).

Fortsetzung zweier früherer Arbeiten des Verf. (siehe dies. Zbl. 66, 35; 72, 272). Es wird ein Vertretersystem der Klassen uneigentlich primitiver binärer quadratischer Formen der Diskriminante $D \equiv 5 \pmod{8}$ angegeben, welche gleichzeitig ein Vertretersystem der Klassen bezüglich der Gruppe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\beta \equiv 0 \pmod{2}$ bilden.

M. Eichler.

Watson, G. L.: The equivalence of quadratic forms. Canadian J. Math. 9, 526—548 (1957).

Fortsetzung einer Arbeit von Jones und Watson (s. dies. Zbl. 72, 272). Die Klassenzahl der rationalen indefiniten quadratischen Formen eines Geschlechts in $n > 3$ Variablen wird in Form eines Gruppenindex bestimmt, dessen Definition umständlich, aber elementar ist. Ein Vergleich mit dem Resultat von M. Kneser (s. dies. Zbl. 71, 272) wird nicht versucht, wäre aber mittels des Lemma 1 auf S. 531 möglich. Dieses Lemma würde auch eine die Fälle $n = 3$ und $n > 3$ zusammenfassende Formulierung des Resultats ermöglichen.

M. Eichler.

Ehrhart, Eugène: Sur les inéquations diophantiennes linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1147—1149 (1958).

Es sei A_i bzw. A_r die Anzahl der Gitterpunkte einer Fläche mit dem Inhalt F im Innern bzw. am Rand. Unter dem Exzeß der Fläche versteht man die Zahl

$$\Delta = A_i + \frac{1}{2} A_r - F.$$

Es werden Beziehungen zwischen den Exzessen Δ_1, Δ_2 zweier rechtwinkliger Dreiecke F_1, F_2 abgeleitet und Anwendungen auf lineare diophantische Ungleichungen gegeben.

N. Hofreiter.

Rogers, C. A.: A note on coverings. Mathematika, London 4, 1—6 (1957).

Der R_n ($n \geq 3$) läßt sich durch kongruente und ähnlich gelagerte konvexe Körper so überdecken, daß die asymptotische Dichte dieser Überlagerung $< n \log n + n \log \log n + 5n$ wird. Diese günstige Überdeckung erhält man als Summe von endlich vielen Mengen der Form $K + g + x_i$ (g durchläuft alle Punkte eines Gitters), $i = 1, 2, \dots, N$.

H. Hejtmánek.

Blundon, W. J.: Multiple covering of the plane by circles. Mathematika, London 4, 7—16 (1957).

Wird die Ebene r -fach ($r \geq 2$) durch Kreise überdeckt, deren Mittelpunkte ein Gitter bilden, so kann man nach der günstigsten Überdeckung fragen; das ist jene Überdeckung, deren asymptotische Dichte sehr klein ist. Das Problem wird für $r = 2, 3, 4$ durch einfache geometrische Überlegungen gelöst, und auch die Gitter, die diese gesuchten Überdeckungen leisten, werden angegeben.

J. Hejtmánek.

Vinogradov, A. I.: Eine Anwendung von $\zeta(s)$ auf das Sieb von Eratosthenes. Mat. Sbornik, n. Ser. 41 (83), 49—80 (1957) [Russisch].

Verf. kombiniert die elementare Siebmethode von A. Selberg mit gewissen Methoden der analytischen Zahlentheorie, insbesondere dem Verhalten von $\zeta(s)$ in der Nähe der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$. So wird ein erneuter Fortschritt gegenüber den Sätzen von Viggo Brun (Skr. Norske Vid. Akad., I, Oslo 1920, No. 3 (1920)) in Richtung des Goldbachschen Problems erzielt (vgl. auch A. Rényi, dies. Zbl. 38, 186) und folgende Sätze bewiesen: Jede hinreichend große gerade Zahl läßt sich als Summe zweier Zahlen darstellen, von denen jede höchstens drei (gleiche oder ungleiche) Primfaktoren besitzt. Es gibt unendlich viele Paare von Zahlen mit der Differenz 2, von denen jede höchstens drei (gleiche oder ungleiche) Primfaktoren besitzt. Vgl. nachstehendes Referat.

H.-E. Richert.

Vinogradov, A. I.: Brief an die Redaktion. Mat. Sbornik, n. Ser. 41 (83), 415—416 (1957) [Russisch].

Verf. berichtigt die Bestimmung einer Konstanten in der vorstehend besprochenen Arbeit und weist nach, daß hierdurch die Ergebnisse dieser Arbeit nicht beeinträchtigt werden.

H.-E. Richert.

Hooley, C.: An asymptotic formula in the theory of numbers. Proc. London math. Soc., III. Ser. **7**, 396—413 (1957).

Verf. beweist die asymptotischen Formeln ($x \rightarrow \infty$)

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n \leq x} d_3(n) d(n+a) \\ \sum_{n \leq x} d(n) d_3(n+a) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} A(a) x \log^3 x + O\{x (\log x \log \log x)^2\}.$$

Hier ist $d_3(n)$ die Anzahl der Darstellungen der positiven ganzen Zahl n als ein Produkt von drei positiven Faktoren; $d(n)$ ist die Anzahl der positiven Teiler von n ; a ist eine gegebene positive ganze Zahl;

$$A(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(m) \psi(n)}{n^2}; \quad \psi(n) = \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{d};$$

φ ist die Eulersche Funktion und $c_n(m)$ ist die Summe von Ramanujan.

H. D. Kloosterman.

Delange, Hubert: On some arithmetical functions. Illinois J. Math. **2**, 81—87 (1958).

P. Erdős [Ann. of Math., II. Ser. **47**, 1—20 (1946)] hat ohne Beweis den folgenden Satz ausgesprochen: Es sei $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler der natürlichen Zahl n und λ eine Irrationalzahl. Dann ist die Folge $\lambda \omega(n)$ modulo 1 gleichverteilt. Verf. bemerkt, daß dieser Satz sofort aus einer asymptotischen Formel von A. Selberg (dies. Zbl. **57**, 285) folgt. Diese Formel benutzt jedoch gewisse Eigenschaften der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ für $\operatorname{Re} s < 1$. Verf. gibt einen Beweis des Erdösschen Satzes, der sich auf den Ikeharaschen Taubersatz stützt und so nur das Nichtverschwinden von $\zeta(s)$ für $\operatorname{Re} s \geq 1$ benutzt. Dieser Satz wird auf $\Omega(n)$ (Anzahl aller Primteiler von n) und wesentlich allgemeinere zahlentheoretische Funktionen von ähnlichem Verhalten ausgedehnt.

H.-E. Richert.

Armitage, J. V.: The product of n linear forms in a field of series. Mathematika, London **4**, 132—137 (1957).

Sei K ein Körper, t eine Unbestimmte, $K\{t\}$ der Körper der formalen Reihen

$\varphi = \sum_{k=-\infty}^n a_k t^k$, wo $a_k \in K$ ist, und bedeute $|\varphi|$ die Bewertung von $K\{t\}$, die gleich $|0| = 0$ und $|\varphi| = e^n$ für $a_n \neq 0$ ist. Seien weiter

$$L_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_j, \text{ wo } \alpha_{ij} \in K\{t\} \text{ ist, } (i = 1, 2, \dots, n)$$

n Linearformen der Determinante $D \neq 0$. K. Mahler (s. dies. Zbl. **27**, 160) hat gezeigt, daß Polynome u_1, \dots, u_n in $K[t]$ existieren, die nicht alle verschwinden und der Ungleichung

$$|L_1 \cdots L_n| \leq e^{-(n-1)} |D|$$

genügen. Der Verf. beweist, daß dies Resultat nicht verschärft werden kann, falls K die Charakteristik 0 hat oder ein endlicher Körper mit wenigstens $n-1$ Elementen ist. Falls jedoch K nur $q < n-1$ Elemente hat, ist die stärkere Ungleichung

$$|L_1 \cdots L_n| \leq e^{-n+2-\gamma} |D|$$

lösbar, wo $\gamma \geq 2$ die ganze Zahl mit $\gamma \geq (n-1)/q > \gamma-1$ bedeutet.

K. Mahler.

Armitage, J. V.: Euclid's algorithm in certain algebraic function fields. Proc. London math. Soc., III. Ser. **7**, 498—509 (1957).

Let p be an odd prime, Ω the field of p elements, t an indeterminate, and $\Omega[t]$, $\Omega(t)$, and $\Omega\{t\}$ the ring of polynomials in t with coefficients in Ω , its quotient field, and the field of all formal series $\varphi = \sum_{k=-\infty}^n a_k t^k$ with $a_k \in \Omega$. A valuation $|\varphi|$ on $\Omega\{t\}$ and hence on $\Omega(t)$ is defined by $|0| = 0$ and $|\varphi| = e^n$ if $a_n \neq 0$. Denote by

K a real quadratic extension of $\Omega(t)$ of discriminant D [E. Artin, Math. Z. 19, 153—246 (1924)]. K is said to be Euclidean if for every $\alpha \in K$ there is an integer ξ in K such that $|N(\xi - \alpha)| < 1$; here N denotes the norm. In analogy to well-known theorems for number fields (H. Davenport, this Zbl. 36, 163; 37, 308) the author proves the following pretty result: K is Euclidean if and only if $|D| = p^2$. The proof depends on a theorem that has interest in itself: Let $f(x, y)$ be a binary quadratic form over $\Omega\{t\}$ of discriminant d which does not represent 0 for x, y in $\Omega\{t\}$ other than 0, 0 and which is indefinite so that $\sqrt{d} \in \Omega\{t\}$. Then there exist ξ, η in $\Omega\{t\}$ such that

$$|f(x + \xi, y + \eta)| \geq p^{-2} |d|^{1/2}$$

for all $x, y \in \Omega\{t\}$. If $f(x, y)$ has coefficients in $\Omega(t)$, then ξ, η can be chosen in $\Omega(t)$. The author mentions further results of his on Euclidean fields of higher degrees obtained in his London Ph. D. thesis.

K. Mahler.

Ridout, D.: Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika, London 4, 125—131 (1957).

Roth's theorem on algebraic numbers (this Zbl. 64, 285) can be generalized in several directions. One such generalization concerns the approximation of real algebraic numbers by rational numbers with restricted numerators and denominators (for the strongest earlier results see Th. Schneider, this Zbl. 38, 188 and K. Mahler, this Zbl. 19, 250; 39, 43; see also Satz 6, Kapitel 1 of Th. Schneider's book on Transzendente Zahlen, this Zbl. 77, 47). For such approximations the author proves the following very useful result by means of Roth's method: „Let $\alpha \neq 0$ be an algebraic number; let $P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_t$ be distinct primes; and let μ, ν, c be real numbers satisfying $0 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \nu \leq 1, c > 0$. Let p and q be restricted to integers of the form

$$p = p^* P_1^{e_1} \dots P_s^{e_s}, \quad q = q^* Q_1^{\sigma_1} \dots Q_t^{\sigma_t}$$

where the exponents e_i and σ_j are non-negative integers, and p^*, q^* are integers satisfying

$$0 < |p^*| \leq c p^\mu, \quad 0 \leq |q^*| \leq c q^\nu.$$

If $\kappa > \mu + \nu$, the inequality

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\kappa}$$

has only a finite number of solutions in p, q .“ This result implies that the greatest prime factors of both the numerators and the denominators of the convergents for α tend to infinity. For another application see K. Mahler, Mathematika, London 4, 122—124 (1957).

K. Mahler.

Kogonija (Kogonia), P. G.: Condensation points of the set of Markoff numbers. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 632—645 (1958) [Russisch].

Denote by $M(N)$ the set of all real numbers α in $0 < \alpha < 1$ whose partial fraction expansion

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$$

satisfies the condition $\limsup a_k = N$. For real α put

$$L(\alpha) = \liminf_{n \rightarrow \infty} n |n\alpha - m|$$

with integers m, n . Denote by $M_L(N)$ the set of $L(\alpha)$ with $\alpha \in M(N)$. By fairly straightforward continued fraction arguments the author proves the first three of the following four theorems and enunciates the fourth. Theorem I. The least point, $(N^2 + 4N)^{-1/2}$, of $M_L(N)$ is a point of condensation of the set. Theorem II. The greatest point, $(N^2 + 4)^{-1/2}$, of $M_L(N)$ is an isolated point of the set. Theorem III. The greatest point of condensation of $M_L(3)$ is $22(65 + 3^{3/2})^{-1}$. [As the author remarks it was shown by Perron that the only point of $M_L(3)$ greater than

$22(65 + 3^{3/2})^{-3}$ is $(13)^{-1/2}$; cf. J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, (this Zbl. 12, 396), p. 33] Theorem IV. The least point $(N^2 + 4N)^{-1/2}$ of $M_L(N)$ belongs to $M_L(N+1)$ for $N \geq 3$.
J. W. S. Cassels.

Steuerwald, Rudolf: Über die Perioden regelmäßiger Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen. II. Math. Z. 67, 181—187 (1957).

The author extends the results he obtained in a previous study (this Zbl. 37, 31) to general Q, c -sequences.
E. Frank.

Analysis.

● Cogan, Edward J. and Robert Z. Norman: Handbook of calculus, difference and differential equations. (Prentice-Hall Math. Series.) Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc. 1958. XII, 263 p. \$ 4,50.

Dieses Buch soll für Studenten geschrieben sein, die den Lehrstoff der ersten Semester in einer sachlich einwandfreien Darstellung zusammengefaßt finden wollen, die jedoch mehr als eine bloße Formelsammlung sein soll. Die beiden Verff. werden diesem berechtigten Wunsche jedoch nur teilweise gerecht. Die Darstellung ist sehr elementar, Begriffe wie Stetigkeit, Riemannsche Summen, Häufungspunkt usw. fehlen vollkommen, die angeführten Definitionen werden meist durch konkrete Beispiele illustriert. Die Auswahl des Stoffes wurde durch das Committee on the Undergraduate Program of the Mathematical Association of America angeregt. Die Kapitelüberschriften geben einen Überblick: 1. Funktionen, 2. Algebraische Funktionen, 3. Operatoren (Differentiation D , Verschiebung E , Differenz Δ), 4. Funktionalgleichungen (Differential- und Differenzgleichungen), 5. Spezielle Funktionen für ganzzahliges Argument (Faktorielle, Binomialkoeffizienten, Stirlingsche Zahlen), 6. Transzendente Funktionen (Trigonometrische, Exponential- und Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrungen), 7. Zwei- und dreidimensionale Graphen (Schaubilder der Funktionen, Kurven und Flächen zweiter Ordnung), 8. Spezielle Typen von Funktionalgleichungen, 9. Ableitungen, 10. Integraltafel, 11. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, 12. Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, 13. Differenzen von Funktionen, 14. Unbestimmte endliche Integrale (d. h. Lösungen der Gleichung $\Delta f = g$). Endliche Summen und endliche Reihen, 15. Lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten, 16. Andere Differenzgleichungen. Ungefähr die Hälfte des Buches bilden 5-stellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen, Logarithmentafeln etc.
F. Selig.

Mengenlehre:

Bruijn, N. G. de: A theorem on choice functions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 60, 409—411 (1957).

If $\{A_\mu\}_{\mu \in M}$ is a family of non-empty sets, then $f: M \rightarrow \bigcup A_\mu$, is a „choice function“ if $f(\mu) \in A_\mu$. A set F^* of choice functions is „independent“ if to every finite subset $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ of F^* there is a $\mu \in M$ such that $f_1(\mu), f_2(\mu), \dots, f_k(\mu)$ are different from each other. The author's main theorem is that if the cardinal $|M|$ is infinite, and if to every positive integer n the cardinal of the subfamily $\{A_\nu\}_{\nu \in N}$ for which $|A_\nu|$ exceeds n is $|N| = |M|$, then there is an independent set F^* of choice functions, of cardinal $|F^*| = 2^{|M|}$. [The reviewer has been unable to follow the first part of the proof, because it relies on integers i_1, i_2, \dots whose existence does not appear to be guaranteed; a counterexample seems to be provided by the author's own example in his Remark 3. The difficulty can arise only when M is countable, and then one can deduce the result by different methods.] The note ends with remarks giving slight refinements, corollaries, and an application of the main theorem. (Cf. this Zbl. 79, 28.)
B. H. Neumann.

Bosch, Jorge E.: Fixpunkte von Operatoren auf der Klasse der transfiniten Ordinalzahlen. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fis.-mat., Revista 5, 201—214 (1957) [Spanisch].

Die Abbildung f der Klasse aller Ordinalzahlen O_n in sich heißt majorant, wenn $f(x) \geq x$ für jedes x ; sie heißt α -stetig, wenn für jede Ordinalzahl β mit der Eigenschaft, daß alle Reste $\{\xi_0 \leq \hat{\eta} < \beta\}$ von einem Typus $\geq \alpha$ sind und für jede Folge $(\xi_i)_{i < \beta}$ mit dem Limes η die Folge $(f(\xi_i))_{i < \beta}$ gegen $f(\eta)$ konvergiert. Jede majorante und α -stetige Abbildung f auf O_n besitzt eine Klasse von Fixpunkten, die mit O_n konfinal ist. Für die gemeinsamen Fixpunkte einer wohlgeordneten Menge $(f_i)_{i < \sigma}$ von solchen Abbildungen f_i gilt dasselbe. Eine Abbildung $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ von $(O_n)^2$ in O_n heißt rechts-majorant, wenn stets $f(x, y) \geq x$ ist. Ist f rechts-majorant, g links-majorant, so heißt bei Stetigkeit das Paar (f, g) eine normale Transformation von $(O_n)^2$ in sich. Jede normale Transformation von $(O_n)^2$ in sich besitzt wenigstens einen Fixpunkt (x_0, y_0) (mit $f(x_0, y_0) = x_0$, $g(x_0, y_0) = y_0$). Dieses Ergebnis ist ausdehnbar auf Selbstabbildungen von $(O_n)^\sigma$. Schließlich wird noch gezeigt: Eine stetige Abbildung f von O_n in sich besitzt dann und nur dann eine konfinale Teilklasse von Fixpunkten, wenn f auf einer konfinalen Teilklasse majorant ist.

G. Aumann.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Lejman, L. Ja.: Über Existenzbedingungen für das Kolmogorovsche Integral und den Begriff der differentiellen Äquivalenz. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3 (75), 343—352 (1957) [Russisch].

L'A. obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité au sens de Kolmogorov et pour l'équivalence différentielle de deux fonctions d'ensembles. On considère l'intégrale de Kolmogorov par rapport à une famille multiplicative d'ensembles, c'est-à-dire une famille M telle que si $A \in M$, $B \in M$, alors $A \cap B \in M$. Les énoncés des résultats nécessitent certaines définitions et notations dont la reproduction est trop difficile pour être donnée ici.

S. Marcus.

Arnese, Giuseppe: Alcune osservazioni sull'integrale secondo Riemann-Stieltjes. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 648—651 (1957).

Soient I_1, I_2 les intégrales inférieure et supérieure de Riemann-Stieltjes d'une $f(P)$ non-bornée, définie sur un ensemble J borné de l'espace euclidéen S_r , à r dimensions, lorsque $\alpha(T)$ est la fonction additive d'intervalle T , à variation finie, qui donne le poids. L'A. présente quelques remarques simples concernant les variations de $\alpha(T)$ dans ceux des intervalles des divisions de S_r , où s'accumulent successivement les bornes de $f(P)$ sur J . Les propriétés résultent directement des hypothèses: I_1, I_2 finies ou égales à $+\infty, -\infty$, selon le cas.

A. Froda.

Porcelli, Pasquale: On the existence of the Stieltjes mean σ -integral. Illinois J. Math. 2, 124—128 (1958).

In this paper necessary and sufficient conditions are given for the existence of the Stieltjes mean σ -integral $\int_a^b f dg$, where f is a bounded function on $[a, b]$ and g is of bounded variation on $[a, b]$.

L.-J. Nicolescu.

Kober, H.: On the existence of the Burkil integral. Canadian J. Math. 10, 115—121 (1958).

The author proves the existence of the Burkil integral of an interval function $f(I)$ which is not supposed to be continuous. The main theorem of the paper is the following: „(a) If (i) $f(I)$ increases by subdivision (abbreviation $f(I) \subset SA$), (ii) the upper Burkil integral of $|f(I)|$ over R is finite, (iii) $f(I)$ is infinitesimally additive on R (sec. 2.1), then its Burkil integral over R and, therefore, over any $I \subset R$, exists. (b) When R is the linear interval $\langle 0, A \rangle$ and $f(I)$ is subadditive, then $f(I)$

is Burkill integrable if and only if (i) its lower Burkill integral is bounded above and (ii) $f(I)$ is infinitesimally additive on R'' . Further it is shown that the indefinite integral can be continuous even when $f(I)$ is not. The results are applied to the generalized arc length of a curve.
L.-J. Niculescu.

Giuliano, Landolino: Sul limite di integrali del tipo $\int_a^b f(x) \varphi(hx, \tau) dx$ quando $h \rightarrow +\infty$. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 186—191 (1957).

Sia $f(x)$ una funzione (reale) quasi-continua e integrabile (secondo Lebesgue) per $a \leq x \leq b$, e sia $\varphi(t, \tau)$ una funzione (reale) definita per $-\infty < t < +\infty$ e per ogni τ di un insieme E , la quale, per ogni τ fissato, è quasi-continua rispetto a t e periodica di periodo T e inoltre, escluso al più un insieme di misura nulla di valori di t , è limitata da una costante L indipendente da τ . Allora per qualunque coppia a', b' con $a \leq a' < b' \leq b$ l'uguaglianza

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{a'}^{b'} f(x) \varphi(hx, \tau) dx = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, \tau) dt \int_{a'}^{b'} f(x) dx$$

è verificata in modo uniforme quando τ varia in E e l'intervallo (a', b') in (a, b) . Di questa proposizione, che viene rilevata come corollario di altro teorema, l'A. dà anche una dimostrazione diretta estendendo un procedimento di L. Tonelli.

S. Cinquini.

Shenton, L. R.: A determinantal expansion for a class of definite integral. IV, V (Recurrence relations). Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 10, 153—166; 167—188 (1957).

Teil I dies. Zbl. 53, 38; Teil II dies. Zbl. 56, 281; Teil III dies. Zbl. 70, 285. In Teil IV überträgt Verf. die früheren Untersuchungen auf das Stieltjessche Momentenproblem (S. M. P.) (Parsevaltheorem, Satz von M. Riesz über die Extremallösungen; Rekursionen für die Zähler und Nenner der Entwicklungen). Im letzten Paragraphen werden spezielle Fälle der zweiten Ordnung $F(z_1, z_2) = \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{(x+z_1)(x+z_2)}$, $\psi(x)$ die einzige Lösung eines S. M. P., ausführlich behandelt. — In Teil V werden in Fortsetzung von III die Rekursionen für $F(z_1, z_2)$ und auch teilweise für $F(z_1, z_2, z_3) = \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{(x+z_1)(x+z_2)(x+z_3)}$, und zwar sowohl für die Zähler und Nenner der Determinantenentwicklungen als auch für den geraden und ungeraden Teil einer Stieltjes-Kettenbruchentwicklung (mit je drei numerischen Beispielen) behandelt.
O. Volk.

Fuglede, Bent: Extremal length and functional completion. Acta math. 98, 171—219 (1957).

Umfassendes mengen- und integraltheoretisches Studium zur Methode der Extremallängen und deren Verallgemeinerungen und Eigenschaften, mit Anwendungen auf die „functional completion“ (vgl. dazu Arbeiten von Aronszajn u. a.). — Die Extremallänge wird sehr allgemein für ein System von Maßen (Belegungen) (und nicht mehr nur von Kurven) definiert und wird durch eine „Ordnung“ $p \geq 1$ gekennzeichnet. (Bei der üblichen Definition ist $p = 2$.) Ein Maß-System von der p -Extremallänge ∞ heißt ein p -Ausnahmesystem. — Verf. zeigt die Invarianz dieses Begriffes bei Lipschitz-Transformationen eines Systems von k -dimensionalen „Lipschitz-Flächen“ im R^n . — Ferner wird das System F_E aller k -dimensionalen Flächen im R^n untersucht, welche eine gegebene Punktmenge E des R^n durchschneiden. Ist E ein Punkt, so ist F_E dann und nur dann ein p -Ausnahmesystem, wenn $k p \leq n$ ist. Im Fall $k p \leq n$ werden diejenigen Mengen E weitgehend gekennzeichnet, für welche F_E ein Ausnahmesystem ist, und zwar mit Hilfe des Kapazitäts-

begriffs. — Die „functional completion“ besteht z. B. im Ersatz einer differentiellen Bedingung $\text{rot } \vec{v} = 0$ durch eine integrale $\oint \vec{v} d\vec{s} = 0$, wobei aber auch unstetige Konkurrenzfunktionen zugelassen werden; hier wird mit Hilfe des Vorangehenden der Begriff „ p -fast überall“ eingeführt und wesentlich benützt. — Überraschenderweise bemerkt Verf., daß die vom Ref. (einfach aus Bequemlichkeitsgründen) eingeführte leichte Modifikation der Definition der Extremallänge von Ahlfors und Beurling mit dieser i. A. nicht äquivalent ist. — Die Beweise sind öfters sehr langwierig, was aber zur Natur der Sache zu gehören scheint, wenn man solche Allgemeinheit anstrebt.

J. Hersch.

Baia da, Emilio: La variazione totale, la lunghezza d'una curva e l'integrale del calcolo delle variazioni in una variabile. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 22, 584—588 (1957).

Si tratta di una Nota preliminare, nella quale l'A. comunica che, se $y = f(x)$, (a, b) è una funzione continua e a variazione limitata, la sua variazione totale e la lunghezza della curva sono data dalle seguenti formule

$$V[f(x); (a, b)] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx,$$

$$L[f(x); (a, b)] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \sqrt{1 + \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|^2} dx,$$

ove gli integrali sono intesi nel senso di Riemann ed è $f(x) = f(a)$ per $x < a$, e $f(x) = f(b)$ per $x > b$. Inoltre l'A. comunica che la formula

$$J'_c = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} f \left[x(t), y(t); \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right] dt,$$

[ove l'integrazione è intesa secondo Riemann ed è $x(t) = x(t_0)$, $y(t) = y(t_0)$ per $t < t_0$, e $x(t) = x(t_1)$, $y(t) = y(t_1)$ per $t > t_1$], fornisce un valore di J'_c invariante rispetto alla parametrizzazione della curva (continua e rettificabile) $C: x = x(t)$, $y = y(t)$, (t_0, t_1) .

S. Cinquini.

Radó, T.: Lebesgue area and Hausdorff measure. Fundamenta Math. 44, 198—237 (1957).

Let $T: Q \rightarrow R^3$ be a continuous mapping from the unit square $Q: 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$, into Euclidean 3-space R^3 and let $A(T)$ denote the Lebesgue area of the Fréchet surface defined by T [for concepts relating to surface area theory the reader is referred to Radó, Length and area, (this Zbl. 33, 170)]. The present paper extends previous results of the author and of the reviewer of representing $A(T)$ in the form $A(T) = \iint k(x, T) dH^2$ where dH^2 indicates integration with respect to 2-dimensional Hausdorff measure H^2 , the integration is taken over R^3 , x is a generic notation for a point in R^3 and $k(x, T)$ is a multiplicity function which describes in some reasonable manner the number of times the point x is covered by the image of Q under T (cf. this Zbl. 66, 44, 45; 71, 278). For each continuous mapping $T: Q \rightarrow R^3$ and for each point $x \in R^3$ let there be assigned by a law \mathfrak{L} certain sets $S \subset Q$ that are significant for x under T and let $k(x, T, \mathfrak{L})$ denote the least upper bound of the number of pairwise disjoint significant sets of x under the law \mathfrak{L} . The problem formulated and solved in this paper is the following. Find a law \mathfrak{L} that satisfies the following requirements for every continuous mapping $T: Q \rightarrow R^3$. (i) $A(T) = \iint k(x, T, \mathfrak{L}) dH^2$. (ii) If the continuous mapping $T^*: Q \rightarrow R^3$ is Fréchet equivalent to T then $k(x, T, \mathfrak{L}) = k(x, T^*, \mathfrak{L})$ for $x \in R^3$. (iii) if τ is a distance preserving transformation in R^3 then $k(x, T, \mathfrak{L}) = k(\tau x, \tau T, \mathfrak{L})$ for $x \in R^3$. (iv) If $S \subset Q$ is significant under T and for the continuous mapping $T^*: Q \rightarrow R^3$ there is an open set $O \supset S$ on which $T^* = T$ then S is significant under T^* . (v) $k(x, T, \mathfrak{L})$ is a Borel measurable function of $x \in R^3$. (vi) If $S \subset Q$ is significant for x under T then

$x \in TS$. The author exhibits a law L_0 that satisfies the above requirements as follows. Let U be the unit 2-sphere with center at the origin in R^3 and let P be a generic notation for a point of U . For $P \in U$, $R^2(P)$ denotes the plane through the origin which is perpendicular to the line through the origin and P and T_P denotes the orthogonal projection of R^3 onto $R^2(P)$. For each open set $O \subset Q^0$ (the interior of Q) $E(T_P T, Q)$ denotes the union of the essential maximal model continua under the continuous plane mapping $T_P T: Q \rightarrow R^2(P)$ that are contained in O . Let L_2 denote Lebesgue planar exterior measure. Let Γ be the class of H^2 -measurable sets in R^3 and for $P \in U$ let Γ_P be the sets $E \in \Gamma$ for which $L_2 T_P E = 0$. For $E \in \Gamma$, $P \in U$ set $H_P E = \text{gr. l. b. } H^2(E - S)$ for $S \in \Gamma_P$. For positive integers n, m , for $S \in \Gamma$, for $P \in U$ let $G(n, m, S, P)$ denote the set of those points $x \in R^3$ for which $H_P[S(x, r) \cap S] > \pi r^2/n$ for some r such that $0 < r < 1/m$, where $s(x, r)$ is the open (solid) sphere in R^3 with center at x and radius r . For each open set $O \subset Q^0$ set

$$\Delta_*(T, O) = \bigcup_n \bigcap_m \bigcup_P G[n, m, TE(T_P T, O), P]$$

for $n, m = 1, 2, \dots, P \in U$. A set $S \subset Q$ is significant for x under T according to the law \mathfrak{L}_0 provided the following conditions are satisfied. (a) $S \neq \emptyset$, $S \subset Q^0$. (b) S is compact. (c) S is the union of maximal model continua under T . (d) For every open set O such that $S \subset O \subset Q^0$ one has $x \in \Delta_*(T, O)$. *E. J. Mickle.*

Silverman, E.: Morrey's representation theorem for surfaces in metric spaces. Pacific J. Math. 7, 1677—1690 (1957).

The author considers continuous mappings (surfaces) T from a disc R into a metric space E , or $T: p = p(w)$, $w = (u, v) \in R$, $p \in E$. The Lebesgue area of T had been previously defined by the author so as to be invariant both with respect to Frechet equivalences in R and with respect to isometrisms between E and other metric spaces E' . Also, the Lebesgue area of T reduces to the usual Lebesgue area if E is Euclidean. Thus it is not restrictive to suppose that E is the space m of the bounded sequences, i. e., $p = \{x^i\}$, $|x^i| < M$, with distance $\|p, q\|$ of p and $q = \{y^i\}$ given by $\sup |x^i - y^i|$. Thus $T: p = p(w) = \{x^i\}$. The following perspicuous definition is given. A mapping T is said to be quasi conformal provided (a) each component $x^i = x^i(w)$, $w \in R$, is absolutely continuous in the sense of Tonelli in R , (b) the first partial derivatives x_u^i, x_v^i (a. e. in R) are L^2 -integrable in R and (c)

$$\sup_i [(x_u^i)^2 + (x_v^i)^2] = \sup_{i,k} [x_u^i x_v^u - x_v^i x_u^k]$$

a. e. in R . By making use of a corresponding concept of Dirichlet integral the following main theorem is proved: Every open nondegenerate surface T of finite Lebesgue area has a quasi conformal representation T' on R (i. e., T' and T are Frechet equivalent) for which the Lebesgue area is given by the corresponding Dirichlet integral. The proof is based, to a great extent, on the previous theory of the author (this Zbl. 43, 57), on the extension to the space m of the variational technique used by the reviewer for the proof of a Schwarz-type representation theorem [Ann. Scuola norm. Super. Pisa, II. Ser. 12, 61—84 (1943)] and by reasoning of C. B. Morrey (this Zbl. 8, 72).

L. Cesari.

Shapiro, Victor L.: On Green's theorem. J. London math. Soc. 32, 261—269 (1957).

Shapiro, Victor L.: The divergence theorem without differentiability conditions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 43, 411—412 (1957).

S. Bochner in a recent paper (this Zbl. 65, 41) has proved Green's theorem under hypotheses weaker than usual. In the present papers it is shown that further reductions in the hypotheses of the theorem can be obtained by using tools developed in a different direction by both S. Bochner and the author, namely S. Boch-

ner's theory of circular convergence and Poisson kernel, and the ensuing Riemann theory for multiple Fourier series based on the same concepts. In the first of the papers under discussion the author proves the following theorem: I. Let D be a bounded domain of the (x, y) -plane and let C be its boundary. Let E be a closed set of logarithmic capacity zero contained in $D + C$. Suppose that the boundary C consists of one or several simple closed rectifiable curves, and that $A(x, y)$, $B(x, y)$ are defined and continuous in $D + C$. Suppose that (*) at each point (x_0, y_0) of $D - DE$ the functions A and B have total differentials. Then $\operatorname{div} V = A_x + B_y$ is the divergence of the vector field $V = [A(x, y), B(x, y)]$, and $\operatorname{div} V$ is defined at each point of $D - DE$. If $\operatorname{div} V$ is L -integrable in $D - DE$, then the usual relation $\int_C (A dy - B dx) = \int_D \operatorname{div} V dx dy$ holds. — In the second paper listed above condition (*) is replaced by the following one: at each point (x_0, y_0) of $D - DE$ the following limit exists $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^2} \int (A dy - B dx)$, where the integration ranges over $D\gamma$, γ is the circle of center (x_0, y_0) and radius t , and the limit is taken as $t \rightarrow 0 +$. The limit is denoted as the divergence $\operatorname{div} V$ of the vector field V . The present theorem and proofs hold for all dimensions $k \geq 2$. L. Cesari.

Codyks (Tsodik), V. M.: On sets of points where the derivative is finite or infinite correspondingly. Doklady Akad. Nauk SSSR **114**, 1174—1176 (1957) [Russisch].

The paper is dealing with relations between sets in which f' is ∞ resp. finite (cf. Luzin, this Zbl. **51**, 41; Landis, this Zbl. **70**, 56; Codyks, this Zbl. **77**, 273). Theorem: Let E, H be linear sets of type $F_{\sigma\delta}$ and G_δ respectively; let $m E = 0$, $H \supset E$; than there exists a continuous increasing function F such that $F'(x) = +\infty$ for $x \in E$, $F(x) < \infty$ for $x \notin E$ and that $F'(x)$ is a finite number for every $x \in CH$ ($F(x)$ denotes the lower derivative number of F in x). G. Kurepa.

Ogieveckij (Ogievetsky), I. I.: Generalization of P. Civin's inequality for the fractional derivative of a trigonometric polynomial to L_p -space. Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR **1958**, 486—487, russ. und engl. Zusammenfassg. 487—488 (1958) [Ukrainisch].

For a trigonometric polynomial

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

a fractional derivative of the order α is defined in the following form

$$T_n^\alpha(x) = \cos \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{k=1}^n k^\alpha A_k(x) - \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{k=1}^n k^\alpha B_k(x)$$

where

$$A_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx; \quad B_k(x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Let

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p dx \right\}^{1/p}$$

then we show the following inequality

$$\|T_n^\alpha\|_p \leq C(\alpha) \cdot n^\alpha \|T_n\|_p, \quad p \geq 1,$$

where $C(\alpha)$ denotes some constant depending only on α . The method of the proof is based on a device related to the operation of convolution. Engl. Zusammenfassg.

Gál, István S.: On the fundamental theorems of the calculus. Trans. Amer. math. Soc. **86**, 309—320 (1957).

Die Monotoniekriterien von A. Zygmund und vom Ref. werden gleichzeitig verallgemeinert: Gilt für die reelle Funktion f $1. \limsup_{\xi \rightarrow x-0} f(\xi) \leq f(x) \leq \limsup_{\xi \rightarrow x+0} f(\xi)$ überall, $2. D^+ f \geq 0$ fast überall, $3. D^+ f > -\infty$ überall mit Ausnahme von abzählbar vielen Stellen, so ist $f(b) \geq f(a)$. Darüber hinaus gilt $f(b) -$

$f(a) \geq \int_{-\infty}^0 t \, d\mu(t)$, wo $\mu(t)$ das äußere Maß der Menge $\{x: a \leq x < b \text{ und } D^+ f(x) < t\}$ und $\mu(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$ vorausgesetzt ist. Anwendungen auf die Monotonie stetiger bzw. absolut stetiger Funktionen und auf die Perron-Integrabilität werden besprochen.

G. Aumann.

Gál, István S.: On the continuity and limiting values of functions. Trans. Amer. math. Soc. 86, 321—334 (1957).

Der Satz (von W. H. Young) über die Symmetrie der Limeswerte einer beliebigen reellen Funktion f einer reellen Veränderlichen, wonach z. B. $\limsup_{\xi \rightarrow x-0} f(\xi) \neq$

$\limsup_{\xi \rightarrow x+0} f(\xi)$ nur auf einer höchstens abzählbaren Menge von x -Werten gilt, wird

übertragen auf Abbildungen f eines mit mehreren Topologien versehenen Raumes X in einen uniformen Raum Y , der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Auf $A \subset X$ sei eine perfekte Topologie T gegeben; ferner seien jedem $a \in A$ zugeordnet zwei Filter $\mathfrak{F}_a^1, \mathfrak{F}_a^2$ in X mit der folgenden Eigenschaft P : Zu jedem $F^1 \in \mathfrak{F}_a^1$ gibt es eine Umgebung U_a von a (bez. T) derart, daß zu jedem $b \in U_a - \{a\}$ ein $F^2 \in \mathfrak{F}_b^2$ existiert mit $F^2 \subset F^1$. Mit diesen Voraussetzungen gilt: Die Punkte $x \in A$, wo f stetig ist bez. \mathfrak{F}_x^1 und unstetig bez. \mathfrak{F}_x^2 , ist höchstens abzählbar. Unter ähnlichen Voraussetzungen gilt die Verallgemeinerung des Youngschen Ergebnisses, nämlich, daß $\mathfrak{F}_x^1\text{-}\limsup f \neq \mathfrak{F}_x^2\text{-}\limsup f$ ist nur für höchstens abzählbar viele x . Verschiedene Formen und Folgerungen dieser Sätze werden betrachtet. Für die Gültigkeit der Gleichheit der Limeswertmengen, $f[\mathfrak{F}_x^1] = f[\mathfrak{F}_x^2]$ mit nur abzählbar vielen Ausnahmen x , kündigt Verf. einen Beweis an.

G. Aumann.

Vituškin (Vitushkin), A. G.: The relation of variation of a set to the metric properties of its complement. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 686—689 (1957) [Russisch].

The paper is a continuation of some previous investigations of the author (this Zbl. 55, 55; 56 and the book: On Polydimensional Variations, Moskva 1955) and Kolmogorov (this Zbl. 70, 115). Notations: w : a regular closed cube in R_n (i. e. a cube whose edges are parallel with coordinate axes); τ_i^k ($k \leq n, i \leq \binom{n}{k} = c_k^n$): k -dim. coordinate plane; $\beta_i^{n-k}(z)$: $(n-k)$ -dim. plane containing the point $z \in \tau_i^k$ and $\perp \tau_i^k$; $V_0^w(e \cap \beta_i^{n-k}(z)) = W_0$ is the number of components of $e \subset R^n$ and $\beta_i^{n-k}(z)$ lying in int w ;

$$V_{\tau_i^k}^w(e) = \int_{\tau_i^k} W_0(z) \, dz; \quad V_k^w(e) = \frac{1}{c_n^k} \sum_i V_{\tau_i^k}^w(e); \quad V^w(e) = \sum_{k=0}^n V_k^w(e).$$

All the V 's are various variations. Theorem 1: Let $e \subset w$ be a F -set such that for every $l > 0$ $V_{p+l}^w(e) = 0$ ($p < n$) and respectively: $V_0^w(e \cap \beta_i^{n-k}(z)) \leq V_0$ for all $k \leq p, i, z$ and $V^w(e) \geq 0$; then w contains a regular closed cube w' the

length d of the edge of which satisfies $d \geq \varrho / \sqrt[n-p]{c^n V_0}$, $d \geq \varrho^{n/(n-p)} / \sqrt[n-p]{c^n V^w(e)}$ respectively; c is a constant number ≤ 12 ; ϱ denotes the length of the edge of w (Theorems 1 and 2 respectively). The second part of the paper deals with „piece-wise rational functions“ i. e. with uniform continuous functions $r_q^k(y)$ in R^p such

that there exists a sequence P_1, P_2, \dots, P_l of polynomials with $\sum_{\alpha=1}^l \text{gr } P_\alpha \leq q$ (gr X = degree of X) such that for every l -sequence $\beta_i \in \{-1, 1\}$ the function

$r_q^k(y)$ on the set $e_\beta = \prod_{i=1}^l e_{\beta_i}^i$ equals a rational function $r_\beta^k(y) = P_\beta^k(y)/Q_\beta^k(y)$; $e_{\beta_i}^i =$

$\{y \mid P_i(y) \geq 0\}$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$, gr P_β^k , gr $Q_\beta^k \leq k$. Let P be the product of the P_1, \dots, P_l ; the set $P^{-1}(0)$ is called the barrier of $r_q^k(y)$ and q its order. Two lemmas (5 and 6) involving piece-wise rational functions are proved and whose wordings are modeled like the preceding theorems 1, 2.

G. Kurepa.

Vituškin (Vitushkin), A. G.: Some estimates from the tabulation theory. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 923—926 (1957) [Russisch].

Let F be a set of real-valued functions defined in a set G ; an ε -representation of these functions is called any sequence of „piece-wise rational functions“ $r_{q,k}^x(y)$ with common barrier of order q (cf. the preceding review) which are defined in R^p such that for every $f \in F$ there exists a point $y = (y_1, \dots, y_p)$ of R^p satisfying $|f(x) - r_{q,k}^x(y)| \leq \varepsilon$. The function $r_{q,k}^x$ is of the form $P_k^{\alpha\beta}(y)/Q_k^{\alpha\beta}(y)$; for every $x \in G$ and $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ ($\beta_i = \pm 1, i = 1, \dots, l$), the functions P, Q are polynomials in y of degree $\leq k$, with coefficients depending upon x . The metrical order $\mu(F)$ of F is defined as $\sup_{\varepsilon > 0} \frac{\log \log N_\varepsilon(F)}{-\log \varepsilon}$, ($\log = \log_2$). The system F is a C -space provided: 1. $\mu(F) < \infty$, 2. There exist two positive numbers $d < 1, \alpha \geq 1$ independent of ε such that for every $\varepsilon > 0$ there exists a set G_ε consisting of $0 \leq m = \alpha H_\varepsilon(F)$ (here $H_\varepsilon(F) = \log N_\varepsilon(F) = \text{entropy}$) points x_i with the property that every pair of elements of F which coincide in G_ε within to εd are equal within to ε everywhere in G . Theorem 1: If F is a C -space and if F is uniformly bounded, then for every ε -representation of F the numbers ε, p, q, k satisfy $p \log [(k + q + 1)/\varepsilon] \geq A H_\varepsilon(F)$, where A is a number > 0 not depending upon the parameters of representation. Let $F_{l+\alpha, c_1, c_2}^n$ be the set of all the real-valued functions which are defined in the closed unit cube I_n of R^n , whose modules are bounded by c_1 and having the derivatives of orders $1, 2, \dots, l$ satisfying the Hölder condition with parameters c_2 and α (α as exponent). For every ε -representation of $F_{l+\alpha, c_1, c_2}^n = X$ one has $p \log (k + q + 1) \geq B \varepsilon^{-n/(l+\alpha)} \geq C H_\varepsilon(X)$, B, C are positive numbers determined by n, l, c_1, c_2 (Th. 2). Let $Y = F_{\infty, r, d}^n$ be the space of analytic functions in I_n bounded in I_n by $d > 0$ such that for every integer $k > 0$ and every $f \in Y$ there exists a polynomial of degree k equal in I_n to f up to the quantity r^{-k} . One has $p \log [(k + q + 1)/\varepsilon] \geq B H_\varepsilon(Y) \geq C (\log \varepsilon^{-1})^{n+1}$, where B and C are positive constants independent of ε (Th. 3). These results are applied to compare the complexity of tabulation of elements of simplest functional spaces to that of approximation of functions using interpolations. E. g. „the complexity degree“ $p \log (k + q + 1)$ for every ε -representation of elements of X is at least as great as that corresponding to interpolation methods.

G. Kurepa.

Allgemeine Reihenlehre:

Shanks, E. Baylis: Convergence of series with positive terms. Amer. math. Monthly 64, 338—341 (1957).

Notwendig und hinreichend, daß die Reihe (*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konvergent sei, ist, daß eine Folge von positiven Größen p_n und eine nichtnegative ganze Zahl k existiert, welche den Bedingungen $p_n - p_{n+1} \leq a_{k+n}$ für alle n genügt. Falls eine Folge von unbeschränkten positiven Zahlen p_n und eine nicht negative ganze Zahl k existiert, so daß die Ungleichungen $0 < p_{n+1} - p_n \leq a_{k+n}$ für alle n gültig sind, so ist dies eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe (*) divergent ist. Bei spezieller Wahl der Zahlen p_n und k kann man die allgemein bekannten Kriterien für die Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe mit positiven Gliedern ableiten. — Falls für $x \geq 1$: $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ und $f'(x) \uparrow$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ konvergent; wenn aber für $x \geq 1$: $f(x) > 0$ und unbeschränkt, $f'(x) > 0$ und $f'(x) \downarrow$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ divergent.

S. Fenyő.

Erwe, Friedrich: Axiomatische Fragen der Limitierungstheorie. Bonner math. Schriften Nr. 4, 70 S. (1957).

Ein Zweig der Limitierungstheorie befaßt sich nicht mit konkreten Limitierungs-

vorschriften wie Matrixtransformationen, sondern fragt nach der Existenz von Funktionalen in Folgenräumen, die vermöge bestimmter Eigenschaften als „Grenzwerte“ dienen können. Verf. gibt einen Überblick über bekannte Resultate dieses Gebietes und fügt eine Reihe neuer Sätze hinzu. — Er betrachtet hauptsächlich den (Banach-) Raum \mathfrak{B} der reellen beschränkten Folgen. Eine besondere Rolle spielt die Menge \mathfrak{D} der Dualfolgen (deren Glieder 1 oder 0 sind). Jede Folge $\alpha \in \mathfrak{B}$ mit nichtnegativen Gliedern läßt sich ja in der Form $\alpha = \sum 2^{-\mu} \delta_\mu$ mit $\delta_\mu \in \mathfrak{D}$ darstellen, so daß sich ein Funktional $l(\delta)$ zu einem $L(\alpha) = \sum 2^{-\mu} l(\delta_\mu)$ fortsetzen läßt; die Mehrdeutigkeit der Darstellung ist dabei harmlos, wenn l in \mathfrak{D} additiv ist (soweit dort additive Beziehungen bestehen) (Satz 1 und 2). — Die weiteren Untersuchungen kreisen vor allem um die Frage, inwieweit ein lineares reellwertiges Funktional L durch seine Werte in der Menge \mathfrak{C} der konvergenten Folgen für sein Verhalten gegenüber einem $\alpha \in \mathfrak{B}$, $\alpha \notin \mathfrak{C}$ festgelegt ist. Meist wird dabei Permanenz von L gefordert ($L(\alpha) = \lim \alpha$ für $\alpha \in \mathfrak{C}$). Nehmen nun in einem festen $\alpha \in \mathfrak{B}$ alle permanenten L einer großen Klasse denselben Wert an, so kann dieser als ein natürlicher Grenzwert von α angesprochen werden; man erhält also ein Limitierungsverfahren. Linearität und Permanenz allein legen jedoch den Werten $L(\alpha)$ (wo $\alpha \notin \mathfrak{C}$) keine Einschränkung auf (Satz 3). Ist L überdies beschränkt (in dem in der Funktionalanalysis üblichen Sinn), so wird der Variabilitätsbereich von $L(\alpha)$ durch eine Schranke von L beschrieben; durchläuft L alle derartigen Funktione (mit beliebiger Schranke), so nimmt $L(\alpha)$ (wo α fest, $\alpha \notin \mathfrak{C}$) immer noch alle reellen Werte an (Satz 4—9). Weitere Axiome für L sind daher nötig. — Sei \mathfrak{F} die Menge der linearen permanenten L mit $L(\alpha) \geq 0$ für jedes α mit $\alpha_n \geq 0$. Ist ein $L \in \mathfrak{F}$ rechtstranslativ ($L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} = L\{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$), so heißt es ein Banachsches Funktional. Die Translativität ist ein Spezialfall der allgemeineren Forderung (68) $L(\delta \times \alpha) = L(\delta) \cdot L(\alpha)$. (Für $\delta \in \mathfrak{D}$ bedeutet $\delta \times \alpha$ die Folge, die entsteht, wenn man an die Stellen der Einsen in δ der Reihe nach die Glieder von α einsetzt, soweit Einsen vorhanden sind.) Für $F \in \mathfrak{F}$ gilt die Abschätzung (69) $F(\delta) \lim a \leq F(\delta \times \alpha) \leq F(\delta) \overline{\lim} a$. Diese ist unter anderem für den Nachweis der Existenz eines $F \in \mathfrak{F}$ wichtig, das (68) bei einem beliebigen festen δ erfüllt, (Satz 10). Ebenso kann die Forderung (73) $L(\delta \times \alpha) = L(\alpha)$ erfüllt werden, wenn δ keine Nullfolge ist (Satz 11). Für (73) erfüllende $L \in \mathfrak{F}$ bestimmt Verf. wieder den Variabilitätsbereich von $L(\alpha)$ (Satz 12). Dabei ergeben sich zur Fastkonvergenz von G. G. Lorentz (dies. Zbl. 31, 295) Beziehungen (Satz 13). — Es gibt ein $L \in \mathfrak{F}$, das (68) mit $\delta = \{0, 1, 1, \dots\}$ erfüllt (also ein Banachsches Funktional ist) und zugleich mit $\delta = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$ (Satz 14; notwendigerweise gilt $L\{1, 0, 1, 0, \dots\} = \frac{1}{2}$). Ferner existiert ein $\alpha \in \mathfrak{B}$, das von allen L der letzteren Art dasselbe $L(\alpha)$ zugeordnet erhält, aber nicht von allen Banachschen Funktionalen. Diese Folge α ist demnach nicht fastkonvergent, wird aber von dem obigen Erweschen Verfahren limitiert (Satz 15). — Im nächsten Abschnitt kehrt Verf. zu der Frage zurück, ob ein in \mathfrak{D} definiertes Funktional l auf \mathfrak{B} oder Teilräume (eindeutig) fortgesetzt werden kann. Je nach den geforderten Eigenschaften (additiv, linear, beschränkt) spielen dabei gewisse Hüllen von \mathfrak{D} eine Rolle (Satz 16—18). Im Falle „linear und beschränkt“ liest man Permanenz- und Positivitätseigenschaften der Fortsetzung L an l ab (Satz 19—22), ebenso Eigenschaften vom Typ (68) (Satz 23, 24). Ein Banachsches Funktional nimmt in \mathfrak{D} jeden Wert von 0 bis 1 an (Satz 25). — Verf. erwähnt einige Verallgemeinerungen (unbeschränkte oder komplexe Folgen; Modifikation von (68) unter Benützung von Matrizen) sowie Probleme: Bestimme das Wirkfeld des obengennanten Erweschen Verfahrens! Kann (68) für viele oder alle δ erfüllt werden? Welche Werte von $L(\delta)$ sind in (68) bei festem δ möglich? Gilt Satz 25 auch für alle $L \in \mathfrak{F}$? Welche Matrixverfahren (abgesehen von C_1) erfüllen Forderungen vom Typ (68)?

K. Zeller.

Volkov, I. I.: Einige Fragen der linearen Matrixtransformationen. Mat. Sbornik, n. Ser. 44 (86), 85—112 (1958) [Russisch].

Bei einer Matrixtransformation $T_m = \sum_n a_{mn} s_n$ betrachtet Verf. statt der nicht immer existierenden T_m die unteren bzw. oberen Limites \underline{T}_m bzw. \overline{T}_m der betreffenden Reihen. Die Folge s_n heißt A -limitierbar im verallgemeinerten Sinn (i. v. S.) zum Werte s , wenn $\lim_m \underline{T}_m = \lim_m \overline{T}_m = s$ gilt. (Im Komplexen zerlegt man in Re und Im.) Verf. gibt ein Beispiel einer Matrix, bei der durch die Verallgemeinerung eine echte Erweiterung des Wirkfeldes erzielt wird. Die Permanenzbedingungen bei Limitierbarkeit i. v. S. unterscheiden sich von den gewöhnlichen Bedingungen nur darin, daß die Konvergenz von $\sum_n |a_{mn}|$ nur für $m > m_0$ gefordert wird (Satz 1). Das Hauptstück des Beweises ist der Nachweis der Notwendigkeit dieser Forderung. Für Totalpermanenz i. v. S. ist notwendig, daß fast alle Zeilen der (reellen) Matrix A nur endlich viele negative Elemente besitzen (Lemma 2), so daß Totalpermanenz i. v. S. mit der gewöhnlichen Totalpermanenz zusammenfällt (vgl. Hurwitz, dies. Zbl. 24, 154). Ein permanentes (reelles) A heißt eine T_∞ -Matrix, wenn jede Folge $s_n \rightarrow \infty$ i. v. S. zum Werte $+\infty$ oder $-\infty$ limitiert wird. Bei einer nicht totalpermanenten T_∞ -Matrix haben fast alle Zeilen nur endlich viele positive Elemente (Satz 2–4; Satz 4 wurde von S. B. Steckin vermutet). Ein (reelles) Matrixverfahren A heißt total konvergenzgleich, wenn A -Limitierbarkeit i. v. S. zum Werte s (endlich oder unendlich) gleichbedeutend mit $s_n \rightarrow s$ ist. Totale Konvergenzgleichheit tritt genau dann ein, wenn A totalpermanent ist und A nach Streichung endlich vieler Spalten in jeder Spalte ein Element hat, das die einzige Nichtnull seiner Zeile ist (Satz 5). Letztere Bedingung ist schon von verwandten Untersuchungen her bekannt, siehe die bei Zeller, Theorie der Limitierungsverfahren (Berlin 1958) auf S. 60 unten und bei 37 I genannte Literatur. — Mehrere Beweise ließen sich vereinfachen — entweder durch eine handlichere Form des gleitenden Buckels oder durch Heranziehen von Kategorie-Methoden.

K. Zeller.

Parameswaran, M. R.: Some product theorems in summability. Math. Z. 68, 19–26 (1957).

Von Szász (dies. Zbl. 46, 290), Rajagopal (dies. Zbl. 57, 294) und Ramanujan [Math. Z. 65, 442–447 (1956)] wurden Beispiele von Limitierungsverfahren T_1, T_2 angegeben, für welche $T_1 \subseteq T_1 T_2$ ist. In der vorliegenden Arbeit wird in der Hauptsache die Relation $T_1 = T_1 T_2$ für das konvergenzgleiche Verfahren T_2 : $t_n = (\lambda_0 s_n + \dots + \lambda_n s_0) \left/ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k, \lambda_k \text{ komplex, } \sum_{k \geq 0} |\lambda_k| < |\lambda_0| \right.$ behandelt [in der Definition (3) der Arbeit kommt n in zwei verschiedenen Bedeutungen vor; der Nenner ist dort durch $\sum_{k \geq 0} \lambda_k$ zu ersetzen]. Es ergibt sich u. a. die Beziehung $T_1 = T_1 T_2$ für positive (nicht notwendig permanente) Nörlundverfahren T_1 und für das Borelverfahren statt T_1 (im zweiten Fall allerdings nur für beschränkte Folgen und Verfahren T_2 mit $\lambda_n = 0$ für $n > m$). Weitere Ergebnisse ergeben sich für gewisse Hausdorffverfahren T_2 .

A. Peyerimhoff.

Wintner, Aurel: On arithmetical summation processes. Amer. J. Math. 79, 559–574 (1957).

Im Teil I seiner Arbeit betrachtet Verf. die (C, p) -, A -, L - und E -Summierbarkeit, d. h. die Summationsverfahren von Cesàro, Abel, Lambert und Eratosthenes in ihrem Zusammenhang. Unter $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$ verstanden, wird $\{x\} = [x]/x$ gesetzt. Wenn die Folge

$$(1) \quad E_n = E_n(a) = \sum_{k=1}^n \{n/k\} a_k \quad \text{bzw.} \quad E_n = \sum_{k=1}^{\infty} \{n/k\} a_k$$

einen Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = s$ besitzt, heißt die Reihe $\sum a_n$ zum Wert s E -summierbar. Wird der Folge $\{a_n\}$ durch die lineare Substitution (2) $b_n = \sum_{d|n} da_d$ [infolge

eines Druckfehlers steht in der Arbeit (2) $\sum_{d|n} a_d/d$ die neue Folge $\{b_n\}$ zugeordnet, so gilt (3) $E_n(a) = M_n(b)$, wobei $M_n = M_n(b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k$ die arithmetischen Mittel von $\{b_n\}$ bedeuten. Da (2) eine eindeutige Inverse (4) $a_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(n/d) b_d$ besitzt, unter $\mu(k)$ die Möbiussche Funktion verstanden und wegen (3) ist eine Reihe $\sum a_n$ dann und nur dann E -summierbar, wenn die ihr gemäß (2) zugeordnete Folge $\{b_n\}$ $(C, 1)$ -limitierbar oder die Reihe Δb_n ($\Delta b_0 = 0$; $\Delta b_n = b_n - b_{n-1}$) $(C, 1)$ -summierbar ist. Dieses E -Verfahren hat Verf. in seiner Schrift, *Eratosthenian Averages* (Baltimore 1943) zuerst eingeführt und ausführlich behandelt. In der vorliegenden Arbeit stellt er daher eingangs einige Grundeigenschaften dieses Verfahrens ohne Beweis zusammen und weist auf seinen Prioritätsanspruch gegenüber dem in der mathematischen Literatur Eingang gefundenen zeitlich späteren Verfahren von Ingham [J. London math. Soc. 20, 171—180 (1945)] hin, das im wesentlichen mit dem E -Verfahren übereinstimmt. Merkwürdigerweise erscheint das Verfahren in Hardys Buch, *Divergent Series*, S. 376—380 (dies. Zbl. 32, 58) unter dem Namen von Ingham, obwohl Hardy selbst in *Nature* 152, 708 (1943) die Schrift des Verf. besprochen hatte. Auch in den einschlägigen Arbeiten von W. B. Pennington (dies. Zbl. 64, 58) und C. T. Rajagopal (dies. Zbl. 65, 45; Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 64—75 (1956)) wird der Name von Wintner nicht erwähnt. Das E -Verfahren stellt keine reguläre Summationsmethode im Sinne der Toeplitzschen Bedingungen dar. Die Konvergenz der Reihe $\sum a_n$ ist weder notwendig noch hinreichend für die E -Summierbarkeit, aber Reihensumme und E -Summe stimmen überein, wenn beide existieren. Die E -Summierbarkeit von $\sum a_n$ erweist sich aber als hinreichend für die $(C, 1)$ -Summierbarkeit von $\sum a_n$ (zum gleichen Wert). Aus der E -Summierbarkeit folgt die Konvergenz der Reihe unter einer der folgenden zusätzlichen Konvergenzbedingungen: I. $|n a_n| < \text{const}$; II. $a_n \geq 0$; III. Lückenbedingung: $a_n = 0$ für $n \neq m_k$, $a_n \neq 0$ für $n = m_k$ mit $m_{k+1}/m_k > \lambda > 1$. Der Primzahlsatz folgt hiernach unmittelbar aus diesem Umkehrsatz mit der Konvergenzbedingung I und der hier trivialen E -Summierbarkeit von $\sum a_n$ mit $a_n = \mu(n)/n$ (denn es wird ja $b_n = \sum_{d|n} \mu(d) = 1$ für $n = 1$ und $= 0$ für $n > 1$ und daher $M(b) = \lim M_n(b) = 0$). Für weitere Umkehrsätze sei auf die neuerliche Veröffentlichung von J. Karamata [Bull. Acad. Serbe Sci., Cl. Sci. math. natur., Sci. math. 20, Nr. 3, 11—32 (1957)] verwiesen. Da die Folgen $\{b_n\}$ und $\{a_n\}$ gemäß (2) zusammenhängen, gilt

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{r^n}{1-r^n} \quad \text{oder} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta b_n) r^n = (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n = (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{r^n}{1-r^n}.$$

Daher ist eine Reihe $\sum a_n$ dann und nur dann L -summierbar, wenn die zugehörige Reihe $\sum \Delta b_n$ A -summierbar ist. Verf. zeigt weiter, unter Anwendung der bekannten Abschätzung $M(n) = \sum_{k=1}^n \mu(k) = O(n/\log^2 n)$, daß sich die Folge E_n mittels einer regulären linearen Transformation in die $(C, 1)$ -Mittel überführen läßt, daß also schließlich zwischen den eingangs genannten Verfahren die Beziehungen $E \subset (C, 1) \subset L \subset A$ gelten. Aus dem Beweis folgt weiter die Existenz einer universalen Konstanten α derart, daß stets, wenn nur $\lim |E_n|$ endlich ausfällt, die Ungleichung $\text{osc } c_n^{(1)} \leq \alpha \text{ osc } E_n$ gilt, unter $c_n^{(1)}$ die Cesàro-Mittel 1. Ordnung von $\sum a_n$ und unter $\text{osc } B_n$ den $\lim |B_n - B_m|$ für $n > m \rightarrow \infty$ verstanden. Entsprechend gibt es eine Konstante β , so daß

$$\text{osc } (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) r^n \leq \beta \text{osc } (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k|n} a_k \right) r^n$$

gilt, sofern nur $\overline{\lim} |(1-r) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k/n} a_k \right) r^n| < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$ für $0 < r < 1$ ist. Hierbei bedeutet $\text{osc } f(r) = \overline{\lim} |f(r) - f(s)|$ für $1 > r > s \rightarrow 1$. Die Frage nach den besten Werten von β und α und, ob $\alpha < \beta$ ist, bleibt unentschieden. Schließlich wird die Frage, wann man von der L - auf die E -Summierbarkeit einer Reihe $\sum a_n$ schließen kann, vermöge der Zuordnung (2) und der Gleichung (5) auf den bekannten Hardy-Littlewoodschen Satz, der von der A - auf die $(C, 1)$ -Summierbarkeit der Reihe $\sum \Delta b_n$ zu schließen gestattet, zurückgeführt: die E -Summierbarkeit einer reellen Reihe $\sum a_n$ folgt aus ihrer L -Summierbarkeit unter der zusätzlichen Konvergenzbedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{d|n} da_d > -\infty$. (Im Text steht offenbar versehentlich $\liminf \sum_{d|n} a_d > -\infty$.) Bekanntlich hat Landau aus $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(k) = o(x)$ den Primzahlsatz unter Verwendung eines Satzes von Axer hergeleitet. Im II. Teil der Arbeit verallgemeinert Verf. diesen Axerschen Satz wie folgt: 1. Wenn $f(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall $1 \leq x \leq X < \infty$ bedeutet und $f(x) = O(\varphi(x))$ ist, wobei $\varphi(x) \geq 0$ und monoton und die Bedingung $\int_1^{\infty} x^{-2} \varphi(x) dx < \infty$ erfüllt ist, so gilt (6) $\sum_{n \leq x} f(x/n) s_n = o(x)$ für jede Folge s_n , die den Bedingungen (7) $\sum_{n \leq x} s_n = o(x)$ und $s_n = O(1)$ genügt. (Der Fall $\varphi(x) = x^\theta$ ($0 \leq \theta < 1$) entspricht dem ursprünglichen Landauschen Beweis.) 2. Ist $f(x)$ in $1 \leq x < \infty$ und $g(x) = f(1/x)$ in $0 < x \leq 1$ erklärt ($g(x) = g(0)$ für $x = 0$) und ist $g(x)$ in $0 \leq x \leq 1$ R -integrierbar, so gilt (6) für jede Folge s_n , die den Bedingungen (7) und $\sum_{n \leq x} |s_n| = O(x)$ genügt. Im Anhang wird auf das Verhältnis von A - und L -Summierbarkeit eingegangen. Die Glieder der Reihe $\sum a_n$ mögen die Bedingung $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ erfüllen, die Potenzreihe $f(x) = \sum a_n e^{-nx}$ (mit $f(\infty) = a_0 = 0$) konvergiert also für $x > 0$ und es sei $f'(x) = O(e^{-x})$ für $x \rightarrow \infty$. Die zusätzliche Voraussetzung A bzw. $|A|$ bzw. $\|A\|$ soll jetzt jeweils die Konvergenz der Integrale (bei $x = +0$)

$$\int_0^{\infty} f'(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{\infty} |f'(x)| dx \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \quad \text{mit} \quad \varphi(x) = \text{fin. sup.}_{y \leq x < \infty} |f'(y)|$$

ausdrücken. A besagt dann die gewöhnliche, $|A|$ die absolute A -Summierbarkeit von $\sum a_n$ und $\|A\|$ verlangt mehr als $|A|$. Nach einem Satz von Ananda Rau [Proc. London math. Soc., II. Ser. 19, 1–20 (1920)] folgt aus der $\|A\|$ -Summierbarkeit von $\sum a_n$ die L -Summierbarkeit von $\sum a_n$. Für diesen Satz gaben Hardy und Littlewood einen kürzeren Beweis, der sich jedoch als trügerisch erwies (vgl. Hardy, Divergent Series S. 376). Bei dem Versuch, diesen Satz zu verallgemeinern (s. Behauptung (β_0) der in dies. Zbl. 34, 40 besprochenen Arbeit), unterlief ihm, wie Verf. selbst bemerkt, ebenfalls ein Fehler. Da der Satz von Ananda Rau in Hardys Buch genannt, aber nicht bewiesen wird, vermutet Verf., daß der einzige einwandfreie, allerdings komplizierte Beweis von Ananda Rau selbst stammt. Darum gibt Verf. hier einen neuen, unmittelbaren Weg für den Beweis an, der von den Überlegungen beim Beweis des Axerschen Satzes im 2. Teil Gebrauch macht.

V. Garten.

Hirokawa, Hiroshi: Riemann-Cesàro methods of summability. II. Tôhoku math. J., II. Ser. 9, 13–26 (1957).

The author continues his study of the Riemann-Cesàro methods (R, p, α) introduced in his previous paper (this Zbl. 66, 307). Reference may be made to the latter for definitions and notations. The author proves several results on the (R, p, α) summability generalizing known results for $(R, p) = (R, p, -1)$ and $(R_p) = (R, p, 0)$

methods. For instance, let p be an odd positive integer, $0 < \delta < 1$ and

$$\sum_{v=1}^n |s_v^{p-1}| = O\left(\frac{n^p}{\log n}\right) \quad \text{and} \quad \sum_{v=n}^{2n} (|a_v| - a_v) = O(n^{p-\delta}).$$

Then the series $\sum a_n$ is summable (R, p, α) when $-1 \leq \alpha \leq 0$. The author remarks that summability $(C, p-1)$ does not imply summability (R, p, α) where p is a positive integer, α an integer such that $-1 \leq \alpha < p-1$ or $\alpha = 0$, $p = 1$ but introducing the notion of approximate (R, p, α) summability analogous to those introduced by Rachman and Zygmund [Bull. internat. Acad. Polon. Sci. Lett., Cl. Sci. math. nat., Sér. A. 1925, 69—80 (1925)] for (R, p) summability, it can be shown that $(C, p-1)$ summability implies approximate (R, p, α) summability when p and α are related as above. The definition of approximate summability is obtained from that of ordinary summability by replacing the condition that the parameter $t \rightarrow 0$ by the condition that $t \rightarrow 0$ over a set E of unit density at 0.

V. Ganapathy Iyer.

Davydov, N. A.: Über die Unbestimmtheitsgrenzen bei der Summierung einer Reihe nach den Methoden von Cesàro und von Poisson-Abel. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 4(76), 167—174 (1957) [Russisch].

Verf. beweist beim C_1 - und Abel-Verfahren Aussagen, die in gewisser Weise Kern- und Umkehrsätze verknüpfen und vom folgenden Typ sind: Nimmt die Folge S_n in „langen“ n -Intervallen Werte aus G an, so liegt mindestens ein Häufungspunkt der Transformierten in \bar{G} . Dabei sei \bar{G} immer eine konvexe abgeschlossene Menge in der erweiterten komplexen Ebene. Genauer gilt z. B. Satz 1: Sei $|S_n| \leq C n^\alpha$ ($\alpha \geq 0$). Es gelte $S_n \in G$ für $n_k \leq n \leq m_k < n_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) mit $m_k/n_k^{1+\alpha} \rightarrow \infty$. Dann hat die C_1 -Transformation σ_n von S_n mindestens einen Häufungspunkt in \bar{G} . — Der Beweis benutzt die bei C_1 für Umkehrsätze übliche Technik. Im Falle $\alpha = 0$ (Beschränktheit) kann die Voraussetzung noch etwas abgeschwächt werden. Als Folgerung erhält man Satz 2. Sei $|S_n| \leq C n^\alpha$ und $\lim (S_{m_k} - S_{n_k}) = 0$ für jede Folge $m_k > n_k$ mit $\lim m_k/n_k^{1+\alpha} < \infty$. Dann ist jeder Häufungspunkt der Teilfolge S_{n_k} auch Häufungspunkt von σ_n . — Die Variante Satz 3 liefert in analoger Weise Ungleichungen zwischen den Häufungsgrenzen. Bei den entsprechenden Sätzen für das Abel-Verfahren wird $n_k^{1+\alpha}$ ersetzt durch $n_k^{1+\alpha} \ln n_k$ (abgesehen vom Falle $\alpha = 0$). Man vgl. die früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 34, 47; 45, 37). K. Zeller.

Jurkat, W. B.: Über die Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes mit funktionentheoretischen Methoden. Math. Z. 67, 211—222 (1957).

Offord (dies. Zbl. 4, 60) gab mittels Cauchy-Integration notwendige und hinreichende Bedingungen für die C_k -Summierbarkeit einer Potenzreihe (etwa im Punkte $z = 1$). Mit Hilfe eines Satzes von Montel über Stetigkeit analytischer Funktionen in Winkelräumen (und anderer Ergebnisse über Randverhalten) gewann er daraus handlichere hinreichende Bedingungen. — In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. einige hinreichende Bedingungen, die alle recht einfach aus den Offordschen Untersuchungen folgen. Er geht dabei fast genau so vor wie Offord. Im Literaturverzeichnis vermißt man jedoch den Namen Offord, sowie zahlreiche hierher gehörige Arbeiten von Riesz, Hardy-Littlewood, Bosanquet, Cartwright, Meyer-König, Gaier, Delange und anderen. Er führt allerdings im Literaturverzeichnis (unter [6]) eine eigene Arbeit über denselben Fragenkreis (dies. Zbl. 70, 70) an, in der er schrieb: „... Satz von Montel, dessen Zusammenhang mit Tauberschen Sätzen in letzter Zeit mehrfach bemerkt wurde ...“ und u. a. Delange zitierte, der die Offordsche Methode in etwas modifizierter Form bei der Laplace-Transformation benützt. In der vorliegenden Arbeit liest man aber: „... Untersuchung der in [6] aufgestellten Beweismethoden ...“ und „... wurde in [6] ein neuer einfacher Beweis angegeben“. — Am Rande sei bemerkt, daß eine mögliche Erweiterung der

Untersuchungen von Offord (und Delange, dies. Zbl. 47, 314) darin besteht, durch Betrachtung von Modifikationen der Laplace-Transformation eine Verbindung zwischen den Umkehrsätzen für das Abel- und das Borel-Verfahren herzustellen.

K. Zeller.

Jakimovski, Amnon: Some Tauberian properties of Hölder transformations. Proc. Amer. math. Soc. 7, 354—363 (1956); **Addendum.** Ibid. 8, 487—488 (1957).

Die komplexe Zahlenfolge $\{s_n\}$ heiße $A^{(\alpha)}$ -summierbar ($\alpha > -1$) zum Wert s , wenn $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} s_n z^n$ für $|z| < 1$ konvergiert und $(1-x)^{\alpha+1} g(x) \rightarrow s$ für $x \rightarrow 1 -$. Für jedes reelle β bezeichne $\{h_n^{(\beta)}\}$ die Hölder-Transformation der Ordnung β von $\{s_n\}$, wobei (H, β) als das zu $\mu_n = (n+1)^{-\beta}$ ($n = 0, 1, \dots$) gehörige Hausdorff-Verfahren definiert ist. Eines der Hauptresultate lautet: (I) Seien $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ reelle Zahlen mit $a + b = 1$, $\alpha < \beta < \gamma$, $0 \leq a$, $[a(\beta - \alpha) + b(\gamma - \alpha)] > 0$; dann ist notwendig und hinreichend für die (H, α) -Summierbarkeit von $\{s_n\}$, daß gleichzeitig die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind: (1) $\{s_n\}$ ist $A^{(\delta)}$ -summierbar für ein $\delta > -1$; (2) $h_n^{(\alpha)} - [a h_n^{(\beta)} + b h_n^{(\gamma)}] \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Zum Beweis werden Methoden und Resultate aus zwei früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 47, 66; 57, 294) bereitgestellt, ferner wird ein Satz von H. R. Pitt (dies. Zbl. 20, 17) über Mellin-Transformationen benützt. Ein weiteres Resultat, das mit denselben Mitteln wie (I) bewiesen wird: (II) a, \dots, γ wie in (I); ist $\{s_n\}$ $A^{(\delta)}$ -summierbar für ein $\delta > -1$ und $h_n^{(\alpha)} - [a h_n^{(\beta)} + b h_n^{(\gamma)}] = O_L(1)$ (bzw. $O(1)$) für $n \rightarrow \infty$, so ist $\{s_n\}$ $(H, \alpha + 1)$ -summierbar (bzw. $(H, -1 + \alpha + \varepsilon)$ -summierbar für jedes $\varepsilon > 0$). (I) und (II) für $a = 1$ finden sich schon in der oben an zweiter Stelle zitierten Arbeit des Verf. Zum Schluß werden die dort eingeführten Verfahren $J(\alpha, \beta)$ verallgemeinert. Sei $\alpha < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$, $a_1 + \dots + a_n = 1$ (a_i reell). Dann handelt es sich um das auf der Transformation

$$(3) \quad t_0 = h_0^{(\alpha)}, \quad t_m = h_0^{(\alpha)} + \sum_{k=1}^m \frac{h_k^{(\alpha)} - [a_1 h_k^{(\alpha_1)} + \dots + a_n h_k^{(\alpha_n)}]}{k [a_1(\alpha_1 - \alpha) + \dots + a_n(\alpha_n - \alpha)]} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

beruhende Verfahren. Dies ist ein Hausdorff-Verfahren mit explizit angegebener Momentfolge. Es ist für $a_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) äquivalent mit $(H, \alpha + 1)$. Weitere Verallgemeinerungen ergeben sich, wenn man die in (I), (II) und (3) zwischen den eckigen Klammern stehenden Summen durch entsprechende Stieltjes-Integrale ersetzt. Das Addendum bringt eine genauere Zitierung des genannten Pittschen Satzes und vervollständigt den Beweis eines der Sätze des Hauptteils. W. Meyer-König.

Rajagopal, C. T.: A Tauberian theorem for the Riemann-Liouville integral of integer order. Canadian J. Math. 9, 487—499 (1957).

Es wird gesetzt

$$s_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} s(t) dt, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t' \leq t} \frac{s(t') - s(t)}{t^{q-p}} = W_1(\lambda) \text{ mit } \lambda > 1,$$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{s_p(x)}{x^q} = \sigma(p, q), \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{s_p(x)}{x^q} = \sigma(p, q) \quad (p = \text{positiv ganz}, q > 1).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\lambda - 1}{p} \right)^p \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{s(x)}{x^{q-p}} &\leq \mathfrak{A}_q(\lambda, p) \underline{\sigma}(p, q) + \mathfrak{B}_q(\lambda, p) \bar{\sigma}(p, q) \\ &+ \left(\frac{\lambda - 1}{p} \right)^{p-1} \int_{1 + (1-p^{-1})(\lambda-1)}^{\lambda} W_1(t) dt, \end{aligned}$$

$$\text{wo} \quad \mathfrak{A}_q(\lambda, p) + \mathfrak{B}_q(\lambda, p) = - \sum_{v=0}^p (-1)^v \binom{p}{v} \left\{ 1 + (p-v) \frac{\lambda-1}{p} \right\}^q$$

ist und $\mathfrak{A}_q(\lambda, p)$ die Summe der negativen, $\mathfrak{B}_q(\lambda, p)$ die Summe der positiven Glieder bedeutet. — Es wird gezeigt, daß in diesem Resultat viele frühere Sätze Tauberscher Art [G. Doetsch, Math. Z. 11, 161—179 (1921); H. R. Pitt, dies. Zbl. 65, 46; J. Karamata, dies. Zbl. 16, 395] enthalten sind. *G. Doetsch.*

Ogieveckij, I. I.: Some tauberian theorems of N. Wiener's type for functions of two variables. Czechosl. math. J. 8(83), Nr. 1, 76—84, engl. Zusammenfassung 84—85 (1958) [Russisch].

Verf. beweist eine Aussage der Gestalt $(^{\circ})$ „Aus

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-u, y-v) h(u, v) du dv = s \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} K(u, v) du dv$$

folgt die entsprechende Beziehung für einen Kern K^{**} . Dabei sei K von der Form $K(x, y) = K_1(x) K_2(y)$ mit $K_1, K_2 \in L(-\infty, \infty)$; eine entsprechende Zerlegung gelte für K^* , überdies soll h beschränkt sein. Satz 1 besagt nun, daß $(^{\circ})$ richtig ist, wenn die Fourier-Transformationen von K_1 und K_2 keine reellen Nullstellen besitzen. Aus Satz 1 gewinnt man in üblicher Weise ein entsprechendes Resultat für das Intervall $(0, \infty)$ (Satz 2) sowie Taubersätze für „langsam schwankendes“ h (Satz 3 und 4). Verschiedene Anwendungen betreffen die Verfahren A (Abel) und C (α, β) (auch Konvexitätssätze) und enthalten Ergebnisse von Knopp (dies. Zbl. 23, 28) und Delange (dies. Zbl. 52, 57). *K. Zeller.*

Wilansky, Albert: On the Cauchy criterion for the convergence of an infinite series. Amer. math. Monthly 64, 469—471 (1957).

Ein altes Problem ist die Abgrenzung von Konvergenz und Divergenz mittels möglichst einfacher Abschätzungen [etwa für die Beträge der Reihenglieder, vgl. Knopp, Unendliche Reihen, dies. Zbl. 31, 118, S. 307ff.]. Ein negatives Resultat in dieser Richtung stammt von Mazur-Orlicz (dies. Zbl. 6, 52; 64, 56): Es gibt keine Folge $A^{(j)}$ von Matrixverfahren, für deren Nullwirkfelder $\mathfrak{N}_0^{(j)}$ gilt $\cap \mathfrak{N}_0^{(j)} =$ Menge der konvergenten Folgen; daher genügen irgendwelche abzählbar viele Cauchybedingungen nicht, um die Konvergenz einer Folge $\{x_n\}$ zu sichern. Unter einer Cauchybedingung ist dabei eine Beziehung $x_{p_n} - x_{q_n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ (wo $p_n \neq q_n$, $p_n \rightarrow \infty$, $q_n \rightarrow \infty$ feste Folgen sind) zu verstehen, die ja bedeutet, daß $\{x_n\}$ von einer gewissen Matrix A in eine Nullfolge transformiert wird. — Die vorliegende Note des Verf. gibt einen Vortrag wieder, den er vor der Philadelphia Section of the Mathematical Association of America gehalten hat. Er erläutert darin das oben genannte Ergebnis und zwei Beweise dafür (einer elementar, einer funktional-analytisch) in vorbildlich klarer Weise, so daß vor allem die funktionalanalytischen Grundgedanken voll zur Geltung kommen. *K. Zeller.*

Perron, Oskar: Über zwei Kettenbrüche von H. S. Wall. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1957, 1—13 (1958).

Verf. beweist folgende Sätze: Satz 1. Der Kettenbruch

$$(I) \quad \frac{1}{1 + \beta_1} - \frac{\alpha_2}{1 + \beta_2 + \alpha_2} - \frac{\alpha_3}{1 + \beta_3 + \alpha_3} - \dots$$

ist unter der Bedingung

$$(I^*) \quad |\alpha_{\nu+1}| \leq \varrho^2, \quad |\beta_{\nu}| \leq (1 - \varrho)^2, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

wo ϱ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, konvergent. Satz 2. Der Kettenbruch

$$(II) \quad \frac{1}{1 + \beta_1 + \alpha_1} - \frac{\alpha_1}{1 + \beta_2 + \alpha_2} - \frac{\alpha_2}{1 + \beta_3 + \alpha_3} - \dots$$

ist unter der Bedingung

$$(II^*) \quad |\alpha_{\nu}| \leq \varrho^2, \quad |\beta_{\nu}| \leq (1 - \varrho)^2, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

konvergent, wenn $0 < \varrho \leq \frac{1}{2}$ ist. Dagegen gibt es Zahlen ϱ , die nur um beliebig wenig größer als $\frac{1}{2}$ und so beschaffen sind, daß nicht jeder Kettenbruch (II), der der Bedingung (II*) genügt, konvergiert. Ob für jede Zahl ϱ im Intervall $\frac{1}{2} < \varrho < 1$ dasselbe

gilt, konnte Verf. bisher nicht entscheiden. Setzt man in I

$$\alpha_{\nu+1} = a_{2\nu}/a_{2\nu+1} \text{ und } \beta_{\nu} = 1/a_{2\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

so ist der Kettenbruch I dem mit a_1 multiplizierten Kettenbruch

$$(A) \quad \frac{1}{1+a_1} - \frac{a_1 a_2}{1+a_2+a_3} - \frac{a_2 a_3}{1+a_4+a_5} - \dots$$

äquivalent. Setzt man in II

$$\alpha_{\nu} = a_{2\nu}/a_{2\nu+1}, \quad \beta_{\nu} = 1/a_{2\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

so ist der Kettenbruch II dem Kettenbruch, der aus dem Kettenbruch

$$(B) \quad 1 - \frac{a_1}{1+a_1+a_2} - \frac{a_2 a_3}{1+a_3+a_4} - \frac{a_4 a_5}{1+a_5+a_6} - \dots$$

durch Weglassen von 1 und Multiplikation von -1 entsteht, äquivalent, wobei (A) und (B) der gerade und ungerade Teil des Kettenbruches

$$\frac{1}{1} + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \dots$$

sind. Verf. zeigt hier im Anschluß an eine Arbeit von H. S. Wall, daß die Kettenbrüche I und II und damit auch die Kettenbrüche (A) und (B) unter den erwähnten Voraussetzungen ein recht unterschiedliches Verhalten zeigen. Verf. beweist zunächst durch vollständige Induktion die beiden Hilfssätze: Hilfssatz 1. Wenn T_1 eine positive Zahl ≤ 1 ist, so sind die durch die Rekursionsformel

$$T_{\nu+1} = 1/(2 - T_{\nu}) \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

definierten Zahlen T_{ν} ebenfalls positiv und ≤ 1 , und zwar ist

$$T_{\nu} = [\nu - 1 - (\nu - 2) T_1] / [\nu - (\nu - 1) T_1], \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Hilfssatz 2. Sei n eine ganze Zahl ≥ 2 . Wenn dann in dem System von $(n + 1)$ Gleichungen

$x_0 = 1, x_1 = (1 + q_1 + p_1) x_0, x_{\nu} = (1 + q_{\nu} + p_{\nu}) x_{\nu-1} - p_{\nu} x_{\nu-2}, (\nu = 2, 3, \dots, n)$ für die Koeffizienten p_{ν}, q_{ν} die Ungleichungen

$$|p_{\nu}| \leq \varrho^2, \quad |q_{\nu}| \leq (1 - \varrho)^2, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots, n)$$

gelten, wo ϱ eine feste Zahl im Intervall $0 < \varrho < 1$ ist, und wenn außerdem

$$\varrho \left(1 + \frac{q_1 + p_1}{1 + q_1 + p_1} \right) \leq 1$$

ist, so gelten die beiden Ungleichungen

$$|x_{\nu} - x_{\nu-1}| \leq (T_{\nu} \varrho^{-1} - 1) |x_{\nu}|, \quad |x'_{\nu}| \geq |x_{\nu-1}| \varrho / T_{\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

wobei

$$T_1 = \varrho \left(1 + \frac{q_1 + p_1}{1 + q_1 + p_1} \right), \quad T_{\nu+1} = \frac{1}{2 - T_{\nu}}$$

ist, so daß nach Hilfssatz 1 alle T_{ν} positiv und ≤ 1 sind. Den Beweis von Satz 1 erbringt Verf., indem er mit Hilfe der einfachsten Kettenbruchrekursionsformeln und der beiden Hilfssätze die Näherungsnenner B_{ν} nach unten abgeschätzt und anschließend die Konvergenz der Reihe $\sum (A_{\nu}/B_{\nu} - A_{\nu-1}/B_{\nu-1})$ beweist. Den Beweis des 1. Teils von Satz 2 erbringt Verf. auf analoge Weise, wobei er jedoch die erweiterten Fundamentalformeln verwendet. Eine Sonderbehandlung erfordert der Fall $\varrho = \frac{1}{2}$, wobei auch die Abschätzung der Näherungsnenner des Kettenbruches

$$\frac{1}{1 + \beta_1 + \alpha_1} - \frac{\alpha_1}{1 + \beta_2 + \alpha_2} - \dots - \frac{\alpha_{n-2}}{1 + \beta_{n-1} + \alpha_{n-1}} - \frac{\alpha_{n-1}}{1 + \beta_n}$$

benötigt wird. Der Beweis des 2. Teiles von Satz 2 wird dadurch erbracht, daß $\varrho = \frac{1}{2} k/(k-1)$ gesetzt wird und der

für $\beta_{\nu} = -(1 - \varrho)^2, \alpha_{\nu} = -\varrho^2$ für $\nu \equiv 0 \pmod{k}$, bzw. $\alpha_{\nu} = +\varrho^2$ für $\nu \not\equiv 0 \pmod{k}$ sich ergebende Kettenbruch II gebildet wird, der k -gliedrig periodisch ist und von dem gezeigt wird, daß er divergiert.

J. Mall.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Timan, A. F.: Bemerkung zu einem Satz von S. M. Nikol'skij. *Uspechi mat. Nauk* **12**, Nr. 3 (75), 225—227 (1957) [Russisch].

Es wird ein lineares Approximationsverfahren konstruiert, welches zu jeder quasiglatten Funktion $f(x)$ Polynome $P_n(f; x)$ höchstens n -ten Grades mit

$$|f(x) - P_n(f; x)| \leq c [(1 - x^2)^{1/2} n^{-1} + n^{-2} \log n], \quad -1 \leq x \leq 1; \quad n = 2, 3, \dots$$

zuordnet. Für $f \in \text{Lip } 1$ wurde ein solches Verfahren von S. M. Nikol'skij (dies. Zbl. **60**, 168) angegeben und der Verf. zeigte in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **42**, 71), daß für $f \in \text{Lip } 1$ sogar n^{-2} statt $n^{-2} \log n$ auf der rechten Seite erreicht werden kann; gefragt wird, ob das nicht auch für quasiglatten Funktionen möglich ist.

G. Freud.

Paškovskij (Pashkovsky), S. F.: The position of the (e) -points of polynomials of best approximation. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **117**, 576—577 (1958) [Russisch].

Die e -Punkte sind diejenigen Argumentwerte, bei denen die „beste Annäherung“ $E_n(f) = \min \max |f - p_n|$ ($-1 \leq x \leq +1$) durch das Approximationspolynom wirklich erreicht wird. Die Intervalle, in denen die e -Punkte liegen, lassen sich, wie Verf. ohne Beweis mitteilt, unter der Voraussetzung $E_{n+1}(f)/E_n(f) \leq g < 1$ durch die Nullstellen gewisser einfach definierter, von f unabhängiger Polynome abschätzen.

W. Hahn.

Belevitch, Vitold: Sur quelques problèmes d'approximation de Tchebycheff en théorie des télécommunications. *Bull. Soc. math. Belgique* **8**, 158—168 (1957).

Versuch, einige Parameterdarstellungen gewisser rationaler Funktionen, Verallgemeinerungen der Tschebyscheff-Polynome, verständlich zu machen.

H. Tietz.

Öberg, T.: Formules approchées. *Mathesis* **66**, 370—373 (1957).

L'A. établit quelques représentations approchées de x par les expressions de la forme

$$\tilde{x} = \sin x \frac{a + b \cos x}{c + d \cos x + f \cos^2 x},$$

a, b, \dots, f entiers, $|x| \leq \alpha$ [cf. Goormaghtigh, *Mathesis* **65**, 505—508 (1956)].

L. Kosmák.

Stesin, I. M.: Die Umformung von Orthogonalentwicklungen in eine Folge von Näherungsbrüchen. *Vyčislit. Mat.* **1**, 116—119 (1957) [Russisch].

Let $\{\omega_k(x)\}$ be a system of orthogonal polynomials and let $R = \sum_0^\infty c_k \omega_k(x)$.

Then $P_n = \sum_0^{n-m} a_i \omega_i(x)$, ($m = [n/2]$) and $q_n = \sum_0^m b_i \omega_i(x)$ can be found so that

$$P_n(x) - q_n(x) R = \sum_{i=1}^\infty d_{n+i} \omega_{n+i}(x).$$

$P_n(x)$ may be calculated recurrently from a relation of the form

$$P_n(x) = \alpha_n P_{n-1}(x) + (\omega_1(x) + \beta_n) P_{n-2}(x) + \gamma_n P_{n-3}(x);$$

$q_n(x)$ satisfies the same relations. There are several misprints. F. W. Ponting.

Il'in (Ilyin), V. A.: On the uniform convergence of expansions in characteristic functions when the sum is taken in the order of increasing characteristic numbers. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **114**, 698—701 (1957) [Russisch].

Verf. beweist den folgenden Satz: Es seien $(u_i)_1^\infty$ Eigenfunktionen des Laplace-Operators, die am Rande des Gebietes Ω_N einer der drei homogenen Randbedingungen genügen (N -gerade). Wenn: 1° Ω_N den üblichen Bedingungen genügt; 2° $f \in W_p^{(N/2)}(\Omega_N)$, $p > 2$; 3° $f, \Delta f, \dots, \Delta^k f$ ($k = [(N-2)/4]$; im Falle 2. und 3. Randaufgabe $k = [(N-4)/4]$) genügen der Randbedingung „im Mittel“. Dann konvergiert die Reihe

$\sum_{i=1}^{\infty} f_i u_i \lambda_i^{\alpha} (f_i - \text{Fourierkoeffizienten von } f) \text{ in jeder streng inneren Untermenge } \Omega'_N \text{ von } \Omega_N. [\alpha < N(p-2)/4p \text{ für } 2 < p < 2N/(N-1); \alpha < 1/4 \text{ für } p \geq 2N/(N-1).]$
 [Bemerkung des Ref.: Dieses und verwandte Ergebnisse werden in einem umfassenden Bericht des Verf. (s. folgendes Referat) eingehend dargestellt. *K. Maurin.*

Il'in, V. A.: Über die Konvergenz der Entwicklungen nach Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators. Uspechi mat. Nauk 13, Nr. 1 (79), 87—180 (1958) [Russisch].

Let $\{u_k\}_1^{\infty}$ be a complete orthonormal set of solutions of $(\Delta + \lambda)u = 0$ in a bounded region G in n -space, ($n > 1$), satisfying one of the two classical boundary conditions (1) $u = 0$ or (2) $\partial u / \partial \nu + hu = 0$, where $h \geq 0$ at all points. The author reviews results on the convergence of the Fourier series $\sum (u_i, f) u_i(x)$ due to Levitan and himself and proves that the series converges uniformly on compact subsets of G provided $\Delta^k f$ satisfies the boundary conditions for $k \leq [\frac{1}{4}(n-2)]$ in case of (1) and $k \leq [\frac{1}{4}(n-4)]$ in case of (2) and $f \in W([\frac{1}{2}n], p)$ for $[\frac{1}{2}n]p > n$. Here $W(m, q)$ is the class of functions whose derivatives of order $\leq m$ belong to L^q in G . Examples show that these results are best possible. The series obtained by multiplying the terms by λ_i^{α} , $((\Delta + \lambda_i)u_i = 0)$, also converges in the same way for even n provided $4p\alpha < n(p-2)$ and $2 < p < 2n/(n-1)$ or $\alpha < \frac{1}{4}$ and $p > 2n/(n-1)$.

L. Gårding.

Natanson, G. I.: On the Lozinsky theorem. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 32—35 (1957) [Russisch].

On démontre pour les séries des polynômes ultrasphériques un théorème analogue à un résultat de S. M. Lozinsky (ce Zbl. 60, 183) concernant les séries de Fourier.

L. Kosmák.

Satô, Masako: Fourier series. VI: A convergence theorem. Proc. Japan Acad. 33, 4—9 (1957).

Mit Hilfe eines Satzes von W. Rogosinski beweist Verf. die beiden Konvergenzkriterien: Die Fourierreihe von $f(t)$ konvergiert an der Stelle $t = x$, wenn sie an der Stelle $t = x$ ($C, 1$)-summierbar ist und entweder die Bedingung

$$\int_0^t [f(\xi + u) - f(\xi - u)] du = o\left(\frac{t}{\log(1/t)}\right) \quad \text{für } t \rightarrow 0$$

gleichmäßig in ξ in einer Nachbarschaft von x erfüllt ist, oder wenn die Bedingung

$$\int_0^t [f(\xi + u) - f(\xi - u)] du = o(t) \quad \text{für } t \rightarrow 0$$

gleichmäßig in ξ in einer Nachbarschaft von x erfüllt ist und darüber hinaus

$$\int_0^{\pi/n} \left| \sum_{j=-[n/2]}^{[n/2]} \frac{\Delta_{\pi/n}^2 f(x+t+(2j-1)\pi/n)}{t+2j\pi/n} \right| dt = o(t) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt, unter Δ_h^2 die zweiten Differenzen mit der Spanne h verstanden. *V. Garten.*

Ul'janov, P. L.: Über die Divergenz Fourierscher Reihen. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3(75), 75—132 (1957) [Russisch].

Seit rund 50 Jahren bemüht man sich — bis jetzt ohne abschließenden Erfolg — die bei trigonometrischen Reihen und Fourierreihen möglichen Konvergenzmengen zu bestimmen. In der vorliegenden, sorgfältig geschriebenen und leicht verständlichen Arbeit gibt Verf. einen wohl gelungenen Überblick über dieses Gebiet und weist auf ungelöste Probleme hin. Nach allgemeinen Sätzen über Konvergenzmengen ($F_{\sigma\delta}$ usw.) gibt er zwei Beispiele von Fourierreihen mit $(\text{mod } 2\pi)$ genau einem Divergenzpunkt, wobei in einem Fall die Divergenz unbeschränkt ist, im andern alle Teilsummen der Reihe gleichmäßig beschränkt sind. Durch Kondensation gelangt man zu Divergenz in abzählbar vielen Punkten. In Satz 8 bringt Verf. die von Kolmogorov gefundene, fast überall divergente Fourierreihe (das weitergehende Beispiel mit

Divergenz überall wird ohne Beweis erwähnt). In Satz 8 kann man nach Marcinkiewicz sogar Beschränktheit der Teilsummen in fast allen Punkten erreichen, nach Hardy-Rogosinski-Sunouchi verlangen, daß auch die konjugierte Funktion L -integrierbar ist. Schließlich ist jede F_σ -Menge Konvergenzmenge einer Fourierreihe (Zeller). Ob das auch für jede $F_{\sigma\delta}$ -Menge gilt, ist ungeklärt, ebenso wie entsprechende Fragen für beschränkte Divergenz und uneigentliche Konvergenz (bei Fourier- oder trigonometrischen Reihen). K. Zeller.

Stečkin, S. B.: Über trigonometrische Reihen, die in jedem Punkte divergieren. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **21**, 711—728 (1957) [Russisch].

N. N. Lusin gab 1911 das Beispiel

$$S(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{\lambda_p}}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=0}^p z^{\mu(p+1)} \sum_{\nu=0}^p (ze^{-2\pi i \nu/(p+1)})^\nu, \quad \lambda_p = \sum_{\kappa=1}^p \kappa^2$$

einer Potenzreihe, die auf dem ganzen Rand des Einheitskreises divergiert und Koeffizienten $o(1)$ besitzt [Rend. Circ. mat. Palermo **32**, 386—390 (1911)]. Er zeigte außerdem, daß die trigonometrische Reihe $\Re S(e^{ix})$ fast überall divergiert. Verf. zeigt, daß $\Re S(e^{ix})$ und $\Im S(e^{ix})$ für alle x divergieren und unbeschränkte Teilsummen besitzen. Der Beweis ergibt sich fast unmittelbar aus der Tatsache, daß für $\pi/(p+1) < x < 3\pi/(p+1)$ und jedes ψ zwei Zahlen $0 \leq k_1 < k_2 \leq p$ mit

$$\left| \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} \cos(kx + \psi) \right| \geq \frac{p+1}{48} \text{ existieren } (p \geq 24). \text{ — Der Verf. beweist ferner}$$

als Ergänzung zu einem Satz von Kolmogoroff das folgende Analogon zu einem Satz von L. Neder [Math. Ann. **84**, 117—136 (1921)]: Für jede Folge $\{x_n\}$ mit $\alpha_n \searrow 0$, $\sum \alpha_n^2 = \infty$ gibt es trigonometrische Reihen $\sum \Re a_n e^{inx}$, $\sum \Im a_n e^{inx}$ ($a_n = \rho_n - i \sigma_n$), die für jedes x unbeschränkte Teilsummen besitzen und $a_n = O(x_n)$ erfüllen (Kolmogoroff betrachtet nur Realteil und Divergenz). Die Beispiele ergeben sich durch gewisse Änderungen aus dem obigen von Lusin.

A. Peyerimhoff.

Manaresi, Fabio: Sulle serie multiple di Fourier di alcune classi di funzioni. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **12**, 247—253 (1957).

If (*) $\sum a_{mn}(x, y)$ is any double trigonometric series with real coefficients, let σ_{mn} denote as usual its Cesaro (1, 1)-means. The following theorems are proved: I. (*) is the Fourier series of a function $f(x, y)$ which is $\text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, in the (x, y) -plane if and only if $\sigma_{mn}(x, y) - \sigma_{pq}(x, y) = O(m^{-\alpha} + n^{-\alpha})$ uniformly in the (x, y) -plane and for all p, q, m, n with $p \geq m$, $q \geq n$. II. (*) is the Fourier series of a function which is continuous in the (x, y) -plane if and only if σ_{mn} converges uniformly in the (x, y) -plane. III. (*) is the Fourier series of a L -integrable bounded function if and only if $|\sigma_{mn}(x, y)| \leq M$ for all m, n and some constant M .

L. Cesari.

Funktionentheorie:

Fekete, M. and J. L. Walsh: Asymptotic behavior of restricted extremal polynomials and of their zeros. Pacific J. Math. **7**, 1037—1064 (1957).

Die bekannte Beziehung zwischen dem transfiniten Durchmesser einer ebenen Punktmenge S , sowie der Greenschen Funktion des Komplementes von S einerseits und der Folge der zu S gehörigen Tschebyscheff-Polynome andererseits besteht noch bei weitgehender Verallgemeinerung der Norm und unter der Annahme gewisser Nebenbedingungen für die Polynome und wird für viele Fälle untersucht.

H. Tietz.

Meschkowski, Herbert: Interpolation durch Funktionen eines Orthonormalsystems. Arch. der Math. **8**, 175—179 (1957).

Es sei \mathfrak{B} ein von endlich vielen Konturen begrenztes Gebiet, \mathfrak{K} die Klasse der

in \mathfrak{B} einschließlich des Randes regulären und eindeutigen Funktionen, $\{u_\nu\}$ eine Folge von Punkten aus \mathfrak{B} , die sich im Innern von \mathfrak{B} häufen. Es sei $K(z, u)$ die nach Szegő definierte Kernfunktion von \mathfrak{B} . Ferner werde

$$H_\nu(z) = \sum_{\varrho=1}^{\nu} \beta_{\varrho}^{(\nu)} K(z, u_{\varrho})$$

durch die Bedingungen $H_\nu(u_{\varrho}) = 0$ für $1 \leq \varrho < \nu$ und $H_\nu(u_\nu) = 1$ bestimmt. Es zeigt sich, daß bei der Entwicklung der Funktionen aus \mathfrak{K} mittels des orthogonalen Systems $\{H_\nu(z)\}$ die Berechnung der Koeffizienten sich auf eine elementare algebraische Rechnung reduziert, wenn die Funktionswerte auf $\{u_\nu\}$ bekannt sind.

Y. Komatu.

Jacobsthal, Ernst: Über die Multiplizität der Fixpunkte einer analytischen Funktion und ihrer Iterierten. Math. Ann. 134, 134—139 (1957).

Sei $f(z) = \alpha z + z^m g(z)$, $m \geq 2$, $g(0) \neq 0$, in der Umgebung von $z = 0$ holomorph. $m = m_1$ ist die Multiplizität von $f(z)$ im Fixpunkt $z = 0$. Im Zusammenhang mit einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 65, 249) untersucht Verf. die Multiplizität m_r der r -ten iterierten Funktion $f_r(z) = f_{r-1}(f(z))$ im gleichen Fixpunkt. Nach den auf der Oberfläche liegenden Ergebnissen: für $\alpha = 1$ ist $m_r = m_1 > 1$ und wenn α keine Einheitswurzel ist, so $m_r = m_1 = 1$, wird mit mehr Mühe der Satz bewiesen: Ist α eine primitive n -te Einheitswurzel ($n \geq 2$), so gilt $m_n = m_{2n} = \dots \geq n + 1$ und $m_r = m_1 = 1$ für $r \neq 0 \pmod{n}$. W. Gröbner.

Zmorovič (Zmorovich), V. A.: On the generalisation of Schwarz's integral formula on n -connected circular domains. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1958, 489—492, russ. und engl. Zusammenfassg. 492 (1958) [Ukrainisch].

The author establishes a new form of the generalisation of Schwarz's well-known integral formula on n -connected circular domains which is more convenient for various applications than H. Meschkowski's (this Zbl. 55, 308). Using this formula the author establishes the structural formulas for three important classes of uniform regular functions in n -connected circular domains, which cannot be done by H. Meschkowski's formula.

Engl. Zusammenfassg.

Verblunsky, S.: On a class of integral functions. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 8, 312—320 (1957).

Let $k(u)$ be a function of bounded variation in $(0, 1)$, continuous on the right at 0 and on the left at 1 and with $k(1) \neq 0$. Let $K(z) = \int_0^1 k(u) e^{zu} du$, $z = x + iy$ and $D(z) = 1 - K(z)$. Then $K(z)$ and $D(z)$ are integral functions. The author proves that for a given $\delta > 0$, there exists an $\eta = \eta(\delta) > 0$ such that $|D(z)| \geq \eta$ for z outside the circles with radius δ described round the zeros of $D(z)$. As an application, the author derives an expansion theorem for functions of bounded variation. Let μ_ν , $\nu = 1, 2, \dots$ be the zeros, supposed simple, of $D(z)$, arranged in the order of increasing moduli. Then $D'(\mu_\nu) = -K'(\mu_\nu) \neq 0$. Write $\psi_\nu(t) = e^{-\mu_\nu t}$, $\Phi_\nu(t) = e^{\mu_\nu t} \int_{1-t}^1 k(u) e^{\mu_\nu u} du$. Then Φ, Ψ are biorthogonal in $(0, 1)$ and $\int_0^1 \Phi_\nu \Psi_\nu dt = K'(\mu_\nu)$. Let f be of bounded variation in $(0, 1)$ and $\alpha_\nu = \frac{1}{K'(\mu_\nu)} \int_0^1 f(u) \Phi_\nu(u) du$. Then $\sum_1^n \alpha_\nu e^{-\mu_\nu t} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(v) \frac{\sin n(t-v)}{t-v} dv$ converges to zero boundedly in any open interval $(\beta, 1)$, $0 < \beta < 1$. The proof of the first result is straightforward, depending on approximations to the zeros of $D(z)$ in terms of the zeros of $e^z - 1$.

V. Ganapathy Iyer.

Sunouchi, Gen-Ichirô: On functions regular in a half-plane. Tôhoku math. J., II. Ser. 9, 37—44 (1957).

Let $\Phi(z)$ be regular for $y > 0$ ($z = x + iy$) and satisfy the condition that

for a $p > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x + iy)|^p dx \leq K$, for all $y > 0$. Then Φ is said to belong to \mathfrak{S}_p , the Hille-Tamarkin class. Hille, Tamarkin and Kawata have investigated the properties of such functions. A function $\Phi(z) = \Phi(x + iy)$ of class \mathfrak{S}_p tends a. e. to a function $\Phi(x)$ of class $L_p(-\infty, \infty)$ as $y \rightarrow 0$ along any non-tangential path and $\Phi(z)$ can be expressed as the product of a Blaschke product and a non-vanishing function of \mathfrak{S}_p . The author considers the expression

$$g_{\alpha}^*(x) = g_{\alpha}^*(x; \Phi) = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} y^{2\alpha} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p'(t + iy)|^2}{|t - z|^{2\alpha}} dt \right\}^{1/2}$$

and proves that if $\Phi(z) \in \mathfrak{S}_p$ then $\int_{-\infty}^{\infty} \{g_{\alpha}^*(x)\}^p dx \leq A(p, \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x)|^p dx$ if $\alpha > 1/p$ for $0 < p \leq 2$, $\alpha > \frac{1}{2}$ for $p > 2$ and $A(p, \alpha)$ is a constant depending on p and α . If $1 < p < \infty$ and $\Phi(x)$ has a Fourier transform in some L_q , $1 \leq q \leq \infty$, write

$$\sigma(\omega, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \omega^{\alpha}} \int_0^{\infty} (\omega - t)^{\alpha} \Phi(t) e^{ixt} dt.$$

Then it is shown

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \int_0^{\infty} \omega \left[\frac{d}{d\omega} \sigma^{\alpha}(\omega, x) \right]^2 d\omega \right\}^{p/2} \leq A(p, \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x)|^p dx$$

where $\alpha > 1/p$ for $1 < p \leq 2$ and $\alpha > \frac{1}{2}$ for $p > 2$. Using a result based on the Wiener random process and Bochner integrals, the author also proves that if $f(x) \in L_p$, $1 < p < \infty$, $F(t)$ its Fourier transform and

$$\Delta_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2^n}^{2^{n+1}} F(t) e^{ixt} dt,$$

then

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_0^{\infty} |\Delta_n(x)|^2 \right)^{p/2} dx \leq C_p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx.$$

V. Ganapathy Iyer.

Katznelson, Yitzhak: Sur le problème « $M(r)$ ». C. r. Acad. Sci., Paris 246, 211—213 (1958).

Es wird eine Bedingung für eine Folge von positiven Zahlen M_n und eine abgeschlossene Menge E auf der reellen Achse angegeben derart, daß die einzige außerhalb E eindeutige analytische Funktion $\Phi(z)$, die den Bedingungen $|\Phi(z) z^n y| \leq M_n$ ($z = x + iy$) genügt, die Funktion $\Phi \equiv 0$ ist. Die Bedingung führt weiter als die bisher bekannten von Mandelbrojt und MacLane (dies. Zbl. 32, 67) und Kahane (dies. Zbl. 64, 359).

G. Doetsch.

Hummel, J. A.: The coefficient regions of starlike functions. Pacific J. Math. 7, 1381—1389 (1957).

Let S^* be the class of all normalized functions $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$, schlicht and starlike in the unit circle, V_n^* the $(2n - 2)$ -dimensional region composed of all points (a_2, a_3, \dots, a_n) belonging to the functions of S^* , and $C_n^* = C_n^*(a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$ the two dimensional cross section of V_n^* in which a_n varies. In an other paper [Proc. Amer. math. Soc. 9, 82—87 (1958)], the author presented a new variational method in the class of starlike functions, by use of which he showed that any function $f(z)$ in S^* which maximizes $R \left\{ \sum_{v=2}^n \lambda_v a_v \right\}$ must be of the form

$$f(z) = z \cdot \prod_{v=1}^m (1 - \alpha_v z)^{-\mu_v}, \mu_v \geq 0, \sum_{v=1}^m \mu_v = 2, |\alpha_v| = 1, m \leq n - 1,$$

and that $f(z)$ must satisfy the differential equation $R(z) \cdot z f'(z)/f(z) = Q(z)$, where

$R(z)$ and $Q(z)$ are certain rational functions. (In the formula for $Q(z)$ there are two misprints.) In order to study the coefficient regions, the author determines the nature of C_n^* . He first proves that C_n^* is closed and convex. By use of the $2n - m - 2$ common zeros of $R(z)$ and $Q(z)$ and an algorithm process to obtain the g. c. d. of $R(z)$ and $Q(z)$ he finds the condition $|A_{1,m}| = |B_{1,m}|$, where $A_{j,k}$ and $B_{j,k}$ are polynomials in the a_v and their conjugates, given by recursion relations. By use of this condition he obtains the main result of the paper: If $(a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$ is an interior point of V_{n-1}^* then C_n^* is a circular disk whose boundary is determined by $a_n = C_n + e^{i\theta} \cdot R_n$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, where C_n and R_n are rational functions of the a_v and their conjugates ($R_n > 0$). If $(a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$ is a boundary point of V_{n-1}^* then C_n^* consists of a single point. In the paper C_n is expressed in terms of $A_{1,k}$ and $B_{j,k}$, and R_n in terms of $B_{1,k}$, and in order to express them in terms of a_v and the conjugates, the recursion process is needed. The results of this calculations are given in the cases $n = 2, 3, 4$. As a final remark, the author proves the sharp estimation $R_n \leq 2/(n-1)$, and gives the extremal function. *H. Waadeland.*

Rahman, Qazi Ibadur: A note on the derivatives of integral functions. *Math. Student* **25**, 21—24 (1957).

Let $\mu(r, f^{(u)})$, $\nu(r, f^{(u)})$, $u = 0, 1, 2, \dots, s$, denote the modulus and the rank respectively on $|z| = r$ of $f^{(u)}(z)$, where $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ denotes an integral function of order ρ . A sharpened form of the result $\mu(r, f) \geq \mu(r, f') \geq \dots \geq \mu(r, f^{(s)})$ valid for $r > r_0(f)$ if $\rho < 1$ (Jain, this Zbl. **53**, 238) is deduced from the author's main theorem, $\nu(r, f) \leq r \mu(r, f') [\mu(r, f)]^{-1} \leq \nu(r, f')$. Amongst other deductions, some involving the lower order λ , is $\nu(r, f) \leq \nu(r, f') \leq \dots \leq \nu(r, f^{(s)})$. *N. A. Bowen.*

Shah, S. M.: Exceptional values of entire and meromorphic functions. II. *J. Indian math. Soc.*, n. Ser. **20**, 315—327 (1957).

(Teil I s. dies. Zbl. **50**, 304.) — Verf. beweist verschiedene Sätze aus dem Gebiete der Nevanlinnaschen Wertverteilungslehre für ganze und meromorphe Funktionen, so wird u. a. gezeigt: Ist $F(z)$ eine meromorphe Funktion der endlichen Ordnung ρ , dann gilt

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r)}{n_1(r, x)} \leq \frac{10}{\rho}$$

für alle x , mit vier möglichen Ausnahmen. Ist $\Sigma \delta(\alpha) > 0$, so gilt

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r)}{n_1(r, x)} \leq \frac{4}{\rho \Sigma \delta(\alpha)}$$

für jedes x mit drei möglichen Ausnahmen. Ist $\Sigma \delta(\alpha) > 1$, so gilt

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r)}{n_1(r, x)} \leq \frac{3}{\rho \{\Sigma \delta(\alpha) - 1\}}$$

für jedes x mit zwei möglichen Ausnahmen. Entsprechende Sätze gelten für ganze Funktionen, so beweist Verf., daß für eine ganze Funktion der endlichen Ordnung ρ gilt

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{n_1(r, x)} \leq \frac{9 \cdot 2^\rho}{\rho \Sigma \delta(\alpha)}$$

für jedes x mit zwei möglichen Ausnahmen. Verschiedene weitere Sätze in dieser Richtung und ein explizites Beispiel folgen. *H. P. Künzi.*

Hiong, King-Lai: Sur les fonctions méromorphes et les fonctions algébroides. Extensions d'un théorème de M. R. Nevanlinna. *Mém. Sci. math.* **139**, 104 p. (1957).

Le présent travail repose sur la théorie de R. Nevanlinna relative aux fonctions méromorphes dans tout le plan fini ou dans un cercle. L'A. ne s'occupe pas ici de la forme donnée à la théorie par Shimizu et Ahlfors; il utilise la méthode même de R. Nevanlinna s'appuyant sur l'étude de la dérivée logarithmique. Il donne

un exposé synthétique de différentes extensions du second théorème fondamental. Certains résultats ont déjà été publiés; d'autres, dus à l'A., sont nouveaux. — Un premier ensemble d'extensions, qui s'appliquent à une fonction méromorphe, est obtenu en faisant intervenir des dérivées; les travaux cités, qui ont eu pour origine une idée de Montel, sont dus essentiellement à Bureau, Miranda, Milloux. — Un deuxième ensemble d'extensions est relatif aux fonctions algébroides; sur cette question, l'A. expose particulièrement les travaux de Valiron. — Un troisième ensemble d'extensions concerne la théorie des systèmes de fonctions; les travaux étudiés sont ceux de R. Nevanlinna lui-même et ceux de H. Cartan. L'A. indique plusieurs applications de ces derniers; il obtient notamment des résultats nouveaux relatifs aux algébroides.

J. Dufresnoy.

Lehto, Olli: *Distribution of values and singularities of analytic functions.* Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 249/3, 16 p. (1957).

Dans cette Conférence, l'A. expose succinctement les résultats obtenus et les questions non résolues relativement à la distribution des valeurs des fonctions analytiques uniformes dans un domaine du plan complexe. Les grandes lignes sont les suivantes: 1. théorèmes fondamentaux de Nevanlinna et notion de défaut; relations entre la distribution des valeurs, le comportement de la fonction à la frontière de son domaine d'existence, la structure de la surface de Riemann de la fonction inverse. — 2. étude analogue des fonctions de caractéristique bornée; nouvelle définition du défaut adaptée à ce cas. — 3. applications de la théorie des familles normales de Montel; notion de fonction normale; comportement au voisinage d'un point singulier essentiel isolé. — 4. cas d'un domaine d'existence qui n'est ni simplement connexe, ni voisinage d'un point singulier essentiel isolé.

J. Dufresnoy.

Mikhail, M. N.: *The behaviour of the random meromorphic function at its zeros. I. II.* Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 60, 88—95; 96—103 (1957).

Übertragung der Sätze von I. E. Littlewood und A. C. Offord betr. „random-ganze“ Funktionen [vgl. M. N. Mikhail, *ibid.* 59, 170—180 (1956)] auf „random-meromorphe“ Funktionen $g(z, t) = b(z, t)/c(z, t)$ wobei $b(z, t)$ und $c(z, t)$ „random-ganz“ von endlicher Ordnung $\rho > 0$. Der Verf. zeigt, daß fast alle dieser Funktionen das gleiche „pits behaviour“ zeigen wie die „random-ganzen“ Funktionen. — In Teil II zeigt der Verf., daß für die Werteverteilung von „random-meromorphen“ Funktionen für fast alle solchen Funktionen analoge Aussagen gemacht werden können wie im Falle von „random-ganzen“ Funktionen.

W. Saxon.

Mikhail, M. N.: *The behaviour of the random meromorphic function at its poles.* Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 60, 590—597 (1957).

Unter Benutzung der gleichen Definitionen und Funktionsklassen für „random-meromorphe“ Funktionen wie in den beiden vorangegangenen Publikationen (s. vorstehendes Referat), untersucht der Verf. mit der gleichen Methode die Werteverteilung einer solchen Funktion in der Umgebung eines Poles. Er zeigt, daß sich die Pole in „inverted pits“ befinden und formuliert ähnliche Sätze für dieselben wie für die „pits“ in den genannten Arbeiten.

W. Saxon.

Mizumoto, Hisao: *On Riemann surfaces with finite spherical area.* Kōdai math. Sem. Reports 9, 87—96 (1957).

Eine Riemannsche Fläche \mathfrak{B} heißt zur Klasse O_{MD} gehörig, wenn auf ihr keine nichtkonstante meromorphe Funktion existiert, die \mathfrak{B} auf eine Fläche von endlichem sphärischen Inhalt abbildet. Im Zusammenhang hiermit betrachtet Verf. offene Riemannsche Flächen W , die eine unendliche zyklische Gruppe G von konformen Automorphismen besitzen. Dabei sei die mod G reduzierte Fläche R ebenfalls offen und gehöre zu der von Kusunoki [Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 30, 1—22 (1956)] eingeführten Flächenklasse O'' . (Es ist $O'' \subset O_G$ [O_G : Klasse der nullberandeten Flächen].) Verf. stellt sodann eine hinreichende Bedingung für $W \in O_G$ auf.

Der Hauptsatz der Arbeit gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für $W \in O_{MD}$, wobei $W \in O_G$ vorausgesetzt wird. Diese Bedingung besteht in einer Eigenschaft der Periodenmatrix einer kanonischen Homologiebasis der Fläche R . [Ein ähnlicher Satz wurde kürzlich von Ozawa — Kōdai math. Sem. Reports 8, 152—157 (1956) — für den Fall einer kompakten Fläche R bewiesen.] — Schließlich wird — unter Verwendung von Resultaten von Heins — ein Schema von Inklusionen zwischen den Klassen O'_{HB} , O'_L , O'_{MD} , O'_{AB} , O'_{AD} ($O' = O - O_G$) und einigen ihrer Durchschnitts- und Vereinigungsmengen aufgestellt. [Es sei darauf hingewiesen, daß die in dem Schema (B) behauptete Relation $O'_{HB} \subseteq O'_L$ nicht in vollem Umfang begründet wird, da es sich bei dem angeführten Beispiel von Heins um eine parabolische Fläche handelt.] P. Seibert.

Cornea, A.: On the behaviour of analytic functions in the neighbourhood of the boundary of a Riemann surface. Nagoya math. J. 12, 55—58 (1957).

Verf. gibt einen neuen Beweis des Satzes von Z. Kuramochi (dies. Zbl. 64, 325), nach welchem eine Riemannsche Fläche der Klasse $O_{HB} - O_G$ ($O_{HD} - O_G$) nach Entfernung einer beliebigen kompakten Menge zur Klasse O_{AB} (O_{AD}) gehört. H. P. Künzi.

Heinhold, J.: Zur konformen Abbildung schlichter Gebiete. Math. Z. 67, 133—138 (1957).

Der Begriff der Koebeschen Schmiegungsfunktion für konforme Abbildung wird verallgemeinert, indem ein Funktional als Maß der Approximation in Betracht gezogen wird. Ein allgemeiner Konvergenzsatz wird bewiesen, der die Existenz konformer Abbildungen von einem gegebenen Gebiet auf gewisse Normalgebiete festsetzt. Dann wird der Satz insbesondere auf ein zweifach zusammenhängendes Ringgebiet angewandt, um ein Iterationsverfahren zur schlichten Abbildung auf einen konzentrischen Kreisring zu gewinnen. Y. Komatu.

Gaier, Dieter: Über ein Iterationsverfahren von Komatu zur konformen Abbildung von Ringgebieten. J. Math. Mech. 6, 865—883 (1957).

In seiner früheren Note mit demselben Titel [Z. angew. Math. Mech. 36, 252—253 (1956)] hat Verf. eine quantitative Fehlerabschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit eines vom Ref. (dies. Zbl. 60, 236) eingeführten Iterationsverfahrens vorher verkündigt, welches eine konforme Abbildung von einem zweifach zusammenhängenden Ringgebiet auf einen konzentrischen Kreisring liefert. In der vorliegenden Arbeit werden Beweise für die angegebene Abschätzung sowie verwandte Ergebnisse ausführlich erwähnt. Y. Komatu.

Strebel, Kurt: Eine Abschätzung der Länge gewisser Kurven bei quasikonformer Abbildung. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 243, 10 S. (1957).

Der Verf. betrachtet diejenigen quasikonformen Abbildungen des unendlichen Parallelstreifens $G_z: -\infty < x < \infty$, $0 < y < 1$ auf einen kongruenten Streifen G_w , welche die durch die Abbildungsfunktion $w_0(z) = K_0 x + i y (K_0 \geq 1)$ gegebenen Randwerte haben. Bezeichnet man mit K den Dilatationsquotienten einer beliebigen solcher Abbildung, so gilt $K \geq K_0$ und das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle $w(z) \equiv w_0(z)$. Dabei wird die Länge der Bilder der Vertikalstrecken von G_z abgeschätzt und gezeigt, daß diese nicht sehr lang sein können, falls die horizontalen Strecken auf Kurven fast K -facher Länge abgebildet werden. Y. Juve.

Shibata, Keichi: On boundary values of some pseudo-analytic functions. Proc. Japan Acad. 33, 628—632 (1957).

Es sei $\zeta = \varphi(z)$ eine quasikonforme Abbildung von $|z| < 1$ in $|\zeta| < 1$. Bekanntlich ist dann $\varphi(z)$ nicht notwendigerweise absolut stetig auf $|z| = 1$. Verf. gibt nun ein hinreichendes Kriterium für die absolute Stetigkeit von $\varphi(e^{it})$ in t , indem er den Satz beweist: $\zeta = \varphi(z)$ sei eine stetig differenzierbare, richtungserhaltende und eineindeutige Abbildung des Einheitskreises in der z -Ebene ($z = r e^{it}$) auf den Einheitskreis der ζ -Ebene ($\zeta = \rho e^{i\theta}$), welche sich konform verhält bezüg-

lich der Riemannschen Metrik $ds = |dz + h(z) d\bar{z}|$. Efficace $h(z)$ una Hölderbedingung der Ordnung α ($0 < \alpha \leq 1$), so verhält sich die Randfunktion $\theta = \theta(t)$ absolut stetig. Mit Hilfe dieses interessanten Satzes ergeben sich auch Anwendungen in der Theorie der pseudoanalytischen Funktionen. *H. P. Künzi.*

Berg, Paul W.: On univalent mappings by solutions of linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. math. Soc. **84**, 310—318 (1957).

Ausgehend von Arbeiten der Autoren Bers, Lewy und Heinz beweist Verf., daß für ein lineares elliptisches System der Art

$$A u_{xx} + 2 B u_{xy} + C u_{yy} + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_x + d_1 v_y = 0$$

$$A v_{xx} + 2 B v_{xy} + C v_{yy} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y = 0$$

($AC - B^2 > 0$), in $x^2 + y^2 \leq 1$ eine Konstante $\mu > 0$ existiert, welche nur von den Koeffizienten des Systems abhängt, so daß für ein Lösungspaar $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in $x^2 + y^2 < 1$, welches den Kreis $x^2 + y^2 \leq 1$ homeomorph auf $u^2 + v^2 \leq 1$ bezieht, wobei sich die Nullpunkte entsprechen, die Relation

$$u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2|_{(0,0)} \geq \mu$$

gilt. An die Koeffizienten werden bestimmte Höldervoraussetzungen gestellt. Dieses Theorem enthält als Spezialfall das Resultat von Heinz über harmonische Abbildungen (vgl. dies. Zbl. **48**, 154). *H. P. Künzi.*

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Merli, Luigi: Sul teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **22**, 580—584 (1957).

È dimostrato il seguente teorema di unicità: Sia S l'insieme dei punti $(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$, definiti per $0 < t \leq a$, $-b_i \leq x^{(i)} \leq b_i$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$), con $b_i > 0$, e sia S_0 l'insieme dei punti S con l'aggiunta del punto $(0, 0, 0, \dots, 0)$. Se $f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$ è una funzione continua in S_0 e soddisfacente la condizione

$$\begin{aligned} & |f(t, x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n-1)}) - f(t, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n-1)})| \\ & \leq L_n \frac{|x_1 - x_2|}{t^n} + L_{n-1} \frac{|x_1^{(1)} - x_2^{(1)}|}{t^{n-1}} + \dots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)} - x_2^{(n-1)}|}{t}, \end{aligned}$$

dove $(t, x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n-1)})$, $(t, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n-1)})$ sono due punti qualsiasi di S , e le costanti L_k sono positive e tali che $\sum_{k=1}^n \frac{L_k}{k!} = 1$, esiste un $t_0 > 0$, tale che l'equazione $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$ non può avere più di una soluzione, definita per $0 \leq t \leq t_0$, e soddisfacente le $x(0) = x^{(1)}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$. *M. Cingini-Cibrario.*

Wintner, Aurel: Schwarz's lemma and a singularity of Briot-Bouquet. Amer. J. Math. **79**, 778—796 (1957).

L'A. stabilisce il seguente lemma: Se $f(z, w) = \sum_{m+n \geq 0} c_{mn} z^m w^n$, $f(0, 0) = 0$, è una funzione regolare delle due variabili complesse z, w nel dominio $D: |z| < 1$, $|w| < 1$, e se risulta in D , $|f(z, w)| \leq 1$, allora il sistema $z w' = f(z, w)$, $w|_{z=0} = 0$ ammette un'unica soluzione $w = w(z)$ che è regolare nel cerchio $|z| < 1$. Il lemma si estende al caso di $|f(z, w)| \leq M$. Nel caso dell'equazione di Briot-Bouquet (*) $z w' = \alpha z + \beta w + \sum_{m+n \geq 2} a_{mn} z^m w^n$,

quando β non è intero positivo, l'A. dà alcune precisazioni sul raggio di convergenza della $w = w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ che soddisfa la (*) (cfr. App. II). *G. Sansone.*

Gröbner, Wolfgang: Nuovi contributi alla teoria dei sistemi di equazioni differenziali nel campo analitico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **23**, 375—379 (1958).

Eine Anwendung der vom Verf. untersuchten „Lieschen Reihen“ [Arch. der Math. 9, 82—93 (1958)]

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} D^{\nu} F(z) \quad \text{mit} \quad D = \vartheta_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \vartheta_n(z) \frac{\partial}{\partial z_n},$$

wo die $\vartheta_i(z)$ und $F(z)$ holomorph in einem Gebiet der (z_1, \dots, z_n) sind. Dann sind die

$Z_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} D^{\nu} z_i$ die Lösungen des Systems der Differentialgleichungen $\frac{dZ_i}{dt} = \vartheta_i(Z)$ mit den Anfangsbedingungen $Z_i = z_i$ für $t = 0$. Analog lassen sich die Lösungen gewisser Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen darstellen.

H. Hornich.

Zbornik, Josef: Ein neuartiges Verfahren zur Uniformierung und allgemeinen Lösung von linearen Differentialgleichungen und zur Herleitung ihrer Rekursionsformeln. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II 166, 21—62 (1957).

Verf. gibt ein Verfahren an, nach dem die Lösungen einer Fülle von Differentialgleichungen erhalten werden können, für die bisher spezielle Lösungsmethoden je nach der Art der Differentialgleichung benutzt worden sind. Er benutzt dabei Operatoren

$$O_p y = x^{p+1} \frac{d}{dx} (x^{-p} y) = \left(x \frac{d}{dx} - p \right) y, \quad O_p^{-1} y = x^p \left(\int x^{-p-1} y dx + C \right).$$

Die betrachteten Differentialgleichungen sind $O y = H(x)$; dabei ist

$$O y = \left(\prod_{i=1}^m O_{p_i} + B x^r \prod_{j=1}^n O_{q_j} \right) y.$$

Nach Aufstellung von Rechenregeln werden Indexpaare p, q , zugeordnete Polynome $S[p, q]_s$, Potenzreihen $[p, q]_a$ und Funktionen

$${}_a L = [p, q]_a + \sum_{s=1}^{a-1} \binom{a-1}{s-1} \ln {}^a s x \cdot S[p, q]_s$$

eingeführt. Dann sind die Lösungen von $O y = 0$ durch

$$y = \sum_{i=1}^m c_i \cdot {}_a L_i(x)$$

gegeben. Das Verfahren wird auf eine Reihe von Beispielen angewendet.

E. Kamke.

Fadini, Angelo: Sull'integrazione di un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee la cui matrice dei coefficienti è composta mediante matrici circolanti. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl., II. Ser. 8, Nr. 2, 17—31 (1957).

Integration des homogenen linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_6'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ c & a & b & \gamma & \alpha & \beta \\ b & c & a & \beta & \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta & \gamma & a & b & c \\ \gamma & \alpha & \beta & c & a & b \\ \beta & \gamma & \alpha & b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_6(x) \end{pmatrix},$$

wobei die Koeffizienten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ in der Umgebung von $x = x_0$ integrierbare reelle Funktionen der reellen Variablen x sind.

I. Paasche.

Sargsjan, I. S.: Über die Differentiation der Entwicklungen nach Eigenfunktionen des Sturm-Liouvilleschen Operators. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 21, 263—282 (1957) [Russisch].

Sargsjan, I. S.: Das asymptotische Verhalten der Ableitungen der Spektralfunktion des Sturm-Liouvilleschen Operators. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 10, Nr. 3, 3—16 (1957) [Russisch].

Let A be a self-adjoint restriction of a Sturm-Liouville operator $D^2 + q$ on

$L^2(0, \infty)$. It has a spectral function θ which will be denoted θ^* when $q = 0$ and the boundary conditions are $f'(0) = 0$. Assuming that A is bounded from below, and that q is locally suitably regular, the author investigates the asymptotic behaviour of the Riesz means of $D_x^j D_y^k (\theta - \theta^*)(x, y, \lambda)$. These results are applied to the study of the convergence of the differentiated eigenfunction expansions. In the second paper the author uses a Tauberian theorem of Marčenko (this Zbl. 66, 66) and thus obtains more precise results. The methods used are those of Levitan, who later treated the same problem for the Schrödinger operator $\Delta + q$ [Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 7, 269—290 (1958)].

L. Gårding.

Škil' (Shkil), N. I.: On the asymptotic representation of solutions of a system of ordinary linear differential equations. Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR 1958, 123—127, russ. und engl. Zusammenfassg. 127 (1958) [Ukrainisch].

The paper deals with the asymptotic representation of solutions of $\dot{x} = A(\tau, \varepsilon)x + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)e^{i\theta}$, $\dot{\theta} = k(\tau) > 0$, x being a four-dimensional vector, $\tau = \varepsilon t$, $A = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A^s(\tau)$, $B = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B^s(\tau)$, A, ε real, it is assumed that $A^0(\tau)$ has a double purely imaginary characteristic root $i\alpha(\tau)$, $\tau > 0$. The resonance (where $k = \alpha$ for some τ) and non-resonance cases are considered. (From the Author's summary).

J. Massera.

Rjabov (Riabov), Ju. A. (Yu. A.): Estimations of the convergence region of periodical series representing solutions of differential equations involving a small parameter. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 642—645 (1958) [Russisch].

Betrachtet wird die Konvergenz der Reihenentwicklungen periodischer Lösungen nichtlinearer Systeme mit kleinem Parameter im allgemeinen Fall, d. h. wenn die charakteristische Gleichung des entsprechenden linearen Systems auch rein imaginäre Wurzeln besitzt. Ausgehend von klassischen Untersuchungen Ljapunovs entwickelt der Verf. ein etwas umständliches Verfahren zur Abschätzung des Konvergenzbereiches. An einem Beispiel wird gezeigt, daß das vorgeschlagene Verfahren einen etwa 20-mal größeren Konvergenzbereich sichern kann als das Verfahren von D. C. Lewis, Duke Math. J. 22, 39—56 (1955).

P. Sagirow.

Nagumo, Mitio and Kusuo Isé: On the normal forms of differential equations in the neighborhood of an equilibrium point. Osaka math. J. 9, 221—234 (1957).

Gli AA. dimostrano il seguente teorema sulla trasformazione di un sistema differenziale ordinario non lineare in un sistema differenziale ordinario lineare. i) La matrice quadrata $m \times m$, $A = (a_{ij})$, abbia tutte le sue radici caratteristiche λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) con parte reale non nulla; ii) Sia $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, ed $f(x)$ un vettore colonna $m \times 1$ tale che le sue componenti $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ siano definite in un intorno dell'origine, di classe C' , con $f_i(0) = 0$, ($i = 1, \dots, m$). Posto

$$|x| = \left(\sum_i x_i^2 \right)^{1/2}, \quad |\partial_x f(x)| = \left[\sum_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) \right)^2 \right]^{1/2},$$

esista una costante positiva k tale che $|\partial_x f(x)| \leq k|x|$. iii) Si abbia $f_i(x) = p_i(x) + q_i(x)$, ($i = 1, \dots, m$) dove $p_i(x)$ sono polinomi in x con coefficienti reali tali che $p_i(0) = \partial/\partial x_j p_i(0) = 0$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, m$), e le $q_i(x)$ siano funzioni reali della classe C' soddisfacenti le condizioni

$$q(0) = 0, \quad \left[\sum_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} q_j(x) \right)^2 \right]^{1/2} \leq Q|x|^h,$$

con Q costante positiva e h intero positivo; iv) Non esista alcuna relazione della forma

$\lambda_i = \sum_{j=1}^m n_j \lambda_j$, con le n_j numeri interi non negativi tali che $h > \sum_{j=1}^m n_j > 1$. In queste ipotesi, ove risulti $h > h_0$, essendo h_0 una costante positiva dipendente unicamente dalle λ_i ($i = 1, \dots, m$), assegnato il sistema $dx/dt = Ax + f(x)$, esiste una tras-

formazione $y = x + u(x)$, con $u(x)$ della classe C' ,

$$u(0) = 0, \quad \left[\sum_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_j(x) \right)^2 \right]^{1/2} \leq L |x|,$$

L costante positiva, la quale muta il sistema proposto nel sistema a coefficienti costanti $dy/dt = A y$. G. Sansone.

Kaplan, Wilfried: Stability theory. Proc. Sympos. nonlinear Circuit Analysis Vol. 6, 3—21 (1957).

Verf. gibt einen Überblick über die neueren Arbeiten der Fachliteratur, die die Stabilität von Lösungen nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen behandeln. Er weist in der Einleitung darauf hin, daß man zahlreiche derartige Publikationen, darunter viele russische Beiträge, findet. Dann skizziert er die allgemeinen Grundlagen der Stabilitätstheorie, sowie einige spezielle Aufgaben und Resultate. Er formuliert für ein System von Differentialgleichungen die wohlbekannte Definition der Stabilität und der asymptotischen Stabilität einer Lösung hinsichtlich der Koordinaten oder der Struktur. Danach wird das Problem der Stabilität nach der ersten Näherung erörtert; ferner werden Beiträge zur Ljapunovschen „zweiten Methode“ und Untersuchungen Malkins über kritische Fälle erwähnt. Die nächsten Abschnitte sind einer Abhandlung von Cesari über die Stabilität der trivialen Lösung eines linearen Systems mit periodischen Koeffizienten und einer Arbeit von Hartman-Wintner über das asymptotische Verhalten eines linearen Systems mit beliebigen veränderlichen Koeffizienten gewidmet. Weiter zitiert der Verf. einige Ergebnisse über die Stabilität erzwungener Schwingungen und über das ebene Phasenbild für den Fall, daß das System aus zwei Gleichungen besteht, in denen die unabhängige Veränderliche nicht explizit auftritt. Den Hauptteil des Berichtes bildet ein umfangreiches Literaturverzeichnis, das nach verschiedenen Themenstellungen geordnet ist. R. Reißig.

Sideriades, M. L.: Étude mathématique des systèmes non linéaires du premier ordre. J. Phys. Radium 18, 25—30 (1957).

Der Verf. betrachtet ein dynamisches System mit den Gleichungen $dx/dt = X(x, y)$, $dy/dt = Y(x, y)$, wobei X, Y analytische Funktionen ihrer Argumente sind. Als Fundamentalkurven bezeichnet er die Kurven $X = Y = 0$, die Fundamentalisoklinen der Schar $Y - k X = 0$. Jedem Punkt $P(x, y)$ der Ebene wird eine Matrix $A = \begin{bmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{bmatrix}$ zugeordnet. Diese definiert eine Transformation $A \vec{u}$ des Vektors \vec{u} .

Wenn der Vektor \vec{u} bei der Transformation nur eine Kontraktion oder Dilatation erleidet, ohne seine Wirkungsgerade zu verändern, ist er ein Eigenvektor von A , seine Richtung eine Eigenrichtung von A und der Kontraktions- oder Dilatationskoeffizient ein Eigenwert m von A , $A \vec{u} = m \vec{u}$. Für m ergibt sich eine quadratische Gleichung, die charakteristische Gleichung der Matrix A . Die so definierte Transformation ist besonders interessant, wenn sie in einem Schnittpunkt der Fundamentalkurven, d. h. in einem singulären Punkt des Phasenbildes für das vorgegebene dynamische System, angewandt wird. Darauf konzentriert sich nun der Verf. und gibt eine Klassifikation der möglichen Fälle je nach den Eigenwerten und Eigenrichtungen der Transformationsmatrix A . Dabei unterscheidet er insbesondere singuläre Punkte von ein-, zwei- und mehrfachem Charakter. Für ein nichtlineares System erster Ordnung der Form $-D \dot{x} + B \dot{y} + \bar{X} = 0$, $C \dot{x} - A \dot{y} + \bar{Y} = 0$ (wobei $A, B, C, D, \bar{X}, \bar{Y}$ analytische Funktionen von x, y sind) stellt er eine Reihe von Sätzen bezüglich der singulären Punkte des Phasenbildes auf, und erläutert schließlich den Begriff des Spektrums eines Systems und seine Bedeutung. R. Reißig.

Yoshizawa, Taro: Appendix to the paper „Note on the boundedness and the ultimate boundedness“. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 30, 91—103 (1957).

Let (1): $\dot{x} = F(t, x)$ be an n -dimensional system defined and continuous in

$0 \leq t < \infty, \|x\| < \infty$. The solutions of (1) are said to be totally bounded if for any $\alpha > 0$ there exist $\beta, \gamma > 0$ such that $\|x_0\| \leq \alpha, \|H(t, x)\| \leq \gamma$, for $\alpha < \|x\| < \beta$, imply that the solution of $\dot{x} = F(t, x) + H(t, x)$ starting at (t_0, x_0) , $t_0 \geq 0$, satisfies $\|x\| < \beta$ for $t \geq t_0$; they are said to be ultimately bounded under constantly acting perturbations of order $f(r)$, where $f(r)$ is any positive function of a positive variable, if there exist $B, \alpha > 0$ such that $\|H\| < \alpha f(\|x\|)$ for $\|x\| < B$ implies that any solution of $\dot{x} = F + H$ satisfies $\limsup \|x\| \leq B$. Theorems: 1. If (1) is linear, total boundedness implies uniform ultimate boundedness and all the solutions tend to 0 when $t \rightarrow \infty$. 2. If a Lyapunov function φ exists which satisfies the assumptions of theorem 4 of the paper mentioned in the title (cf. this Zbl. 67, 315) and if moreover φ satisfies a local Lipschitz condition with respect to x , uniformly with respect to t , then the solutions of (1) are totally bounded. 3. If F has continuous partials with respect to x and is periodic in t and if the solutions are equibounded and ultimately bounded, they are totally bounded. 4. If φ satisfies the assumptions of theorem 2 and moreover $D_F \varphi \leq -G(\|x\|)$ where $G(r)$ is positive continuous for $r \geq R_0$ and $K(r)f(r) = O(G(r))$ where $K(r)$ is a Lipschitz constant of φ for $\|x\| \leq r$, then the solutions of (1) are ultimately bounded under constantly acting perturbations of order f . The paper also contains a theorem on the existence of a generalized Lyapunov function for periodic systems satisfying assumptions of Carathéodory's type, if the solutions are equibounded and ultimately bounded.

J. Massera.

Yoshizawa, Taro: On the necessary and sufficient condition for the uniform boundedness of solutions of $x' = F(t, x)$. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 30, 217—226 (1957).

Let $\dot{x} = F(t, x)$. 1. If F belongs to the class C_0 with respect to x (i. e. if it satisfies a Lipschitz condition in any bounded region of (t, x) -space), a n. a. s. c. for the solutions to be uniformly bounded and uniformly ultimately bounded is that there exists a Lyapunov function φ satisfying the assumptions of theorem 4 of a previous paper of the same author (cf. this Zbl. 67, 315); if $F \in \bar{C}_0$ (i. e. if the Lipschitz condition is satisfied uniformly with respect to t) and F is bounded for bounded x , then $\varphi \in \bar{C}_0$. 2. For the uniform boundedness, n. a. s. c. are those stated in Theorem 3 of the previous paper. Other theorems prove the existence of regular (continuously differentiable) Lyapunov functions.

J. Massera.

Zubov, V. I.: An investigation of the stability problem for systems of equation with homogeneous righthand members. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 942—944 (1957) [Russisch].

L'A. énonce sans démonstrations plusieurs théorèmes sur le système $dx_s/dt = X_s^{(\mu)}(x_1, \dots, x_n)$ où les fonctions $X_s^{(\mu)}$ sont homogènes de degré $\mu - p/q$, q impair. Si p est pair la solution banale du système ne peut être asymptotiquement stable. Si la solution banale est asymptotiquement stable et $X_s^{(\mu)} \in C_\nu$, $\nu \geq 1$, on a

$$(*) \quad |X(t, X_0)| < A t^{-\alpha} \text{ pour } |X_0| = 1.$$

Si (*) est vérifiée il existent $V^{[m-\mu+1]}$ et $W^{[m]}$ positivement homogènes de degré resp. $m-\mu+1$ et m , $m > \mu-1$, telles que $dV^{[m-\mu+1]}/dt = W^{[m]}$, $V^{[m-\mu+1]} < 0$, $W^{[m]} > 0$ pour $X \neq 0$. On considère le système

$$(**) \quad dx_s/dt = X_s^{(\mu)} + f_s(x_1, \dots, x_n, t), \quad X_s^{(\mu)} \in C_\nu.$$

Si (*) est vérifiée les solutions du système (**) sont bornées quelles que soient les fonctions f_s avec $|f_s| \leq c |X|^\lambda$, $\lambda \leq \mu$, pour $|X| \geq R$, et la solution banale du système (**) est asymptotiquement stable quelles que soient les fonctions f_s avec $|f_s| \leq c_1 |X|^\lambda$, $\lambda \geq \mu$, pour $|X| \leq h$.

A. Halanay.

Zubov, V. I.: On the reduction principle. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 228—230 (1958) [Russisch].

Gegeben sei (1): $dy_s/dt = f_s(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$, $dx_j/dt = g_j(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$; $s = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, n$. Die f_s und g_j seien stetig in $t \geq 0$, $|X| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} < H$, $|Y| < H$; es sei $f_s \equiv 0$ für $Y = 0$ und $g_j \equiv 0$ für $X = Y = 0$.

In der ersten Gleichung (1) ersetze man x_1, \dots, x_n durch $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — willkürliche stetig differenzierbare Funktionen, für die $|X(t)| < H$ ist; man erhält (2): $dy_s/dt = f_s(t, x_1(t), \dots, x_n(t), y_1, \dots, y_k)$. Def.: Die Lösung $Y = (y_1, \dots, y_k)$ von (2) heiße stark stabil, wenn sie bei jedem $X(t)$, $|X(t)| < H_1$, stabil ist. Es sei $W(t, X, Y) \equiv 0$ für $X = Y = 0$. Def.: $W(t, X, Y)$ heiße streng negativ definit in X , wenn es eine solche stetige Funktion $f(r)$ gibt, daß 1. $f(0) = 0$, $f(r) > 0$ für $r > 0$ und 2. $W(t, X, Y(X))$ bei jedem $Y(X)$, für welches $|Y(X)| \leq f(|X|)$ ist, negativ definit in X ist. Satz: 1. Die triviale Lösung von (2) sei stark stabil, 2. in $|X| < H_2$, $t \geq 0$ existiere eine stetig differenzierbare positiv definite Funktion $V(t, X)$, die für $X \rightarrow 0$ gleichmäßig in t nach Null strebt.

$$3. \quad W(t, X, Y) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} g_j(t, X, Y)$$

sei streng negativ definit. Dann ist die triviale Lösung von (1) auch stabil. Im zweiten Satz wird die Stabilität der trivialen Lösung von (1) aus der Stabilität der trivialen Lösung von (2) und (3): $dx_j/dt = g_j(t, X, 0)$ bei zahlreichen weiteren Voraussetzungen gefolgert. Ein dritter Satz behandelt einen Spezialfall.

P. Sagirow.

Gel'man, A. E.: The reducibility of a certain class of simultaneous differential equations containing quasiperiodic coefficients. Doklady Akad. Nauk SSSR 116, 535—537 (1957) [Russisch].

In diesem vorläufigen Bericht werden ohne Beweis zwei Sätze angeführt, welche die „Reduzibilität“ des Systems $\dot{x} = P_{11}(t)x + P_{12}(t)y$, $\dot{y} = P_{21}(t)x + P_{22}(t)y$ betreffen, wobei P_{ik} ($i, k = 1, 2$) fastperiodische Funktionen sind. Zur Betrachtung wurde eine neue Methode der sog. „passenden Majorante der Funktion“ gebraucht.

M. Ráb.

Schäffer, J. J.: On non-linear almost-periodic differential equations. Fac. Ing. Agrimensura Montevideo, Publ. Inst. Mat. Estadist. 3, 17—50, engl. Zusammenfassg. 51—52 (1957) [Spanisch].

This paper deals with differential equations of the form (*) $\dot{x} + g(f(x), p(t)) = 0$ where $x, f(x), g(u, v), p(t)$ are n -vectors. Assume that: (1) $f(x)$ is differentiable and the matrix $\partial f(x)/\partial x$ is continuous, symmetric, positive and satisfies a local Lipschitz condition everywhere; (2) the Euclidean norm $\|f(x)\| \rightarrow \infty$ as $\|x\| \rightarrow \infty$; (3) $g(u, v)$ is continuous and differentiable with respect to u , the matrix $\partial g(u, v)/\partial u$ is continuous and positive everywhere; (4) for every unit vector e and every v , the scalar product $e \cdot g(re, v) \rightarrow \infty$ when $r \rightarrow \infty$. Assume also that $p(t)$ is almost periodic and its range is restricted in a certain way we will not state here. Then all solutions of (*) converge more rapidly than a certain decreasing exponential function to the unique almost periodic solution of (*); if $f(x)$ is linear the result holds without restriction on the range of $p(t)$. Other results about the asymptotic behaviour of solutions of (*) are given under assumptions (1)–(4) with $p(t)$ continuous and bounded.

M. M. Peixoto.

Seifert, George: On stability in the large for periodic solution of differential systems. Ann. of Math., II. Ser. 67, 83—89 (1958).

Verf. betrachtet ein Differentialgleichungssystem in Vektorform $x' = f(x, t)$, wobei $f(x, t + \tau) = f(x, t)$ sein soll. Es handele sich um 2-gliedrige Vektoren, d. h. $x = (x_1, x_2)$, $f = (f_1, f_2)$. Die Lösung mit dem Wert x_0 zur Anfangszeit t_0 wird mit $x(t, x_0, t_0)$ bezeichnet. Eine Lösung $x(t)$ ist in einem Bereich R der (x_1, x_2) -Ebene asymptotisch stabil im Großen, wenn für jeden Punkt $x_0 \in R$ und jede Anfangs-

zeit t_0 die entsprechende Lösung gegen $x(t)$ konvergiert: $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0, t_0) - x(t)| = 0$.

Der abgeschlossene Bereich R ist eine relative Schranke der Grundgleichung, wenn er beschränkt, sowie einfach zusammenhängend ist und folgende wichtige Eigenschaft besitzt: Gilt $x_0 \in R$, während t_0 willkürlich ist, so hat man $x(t, x_0, t_0) \in R$ für $t \geq t_0$. Wird der Bereich R (mit dem Rand Γ) der Transformation T_{t_0} , wobei $T_{t_0} x_0 = x(t_0 + \tau, x_0, t_0)$ ist, unterworfen, so entsteht der Bereich $R_1 \subset R$. Die n -fache Transformation $T_{t_0}^n [T_{t_0}^n x_0 = x(t_0 + n\tau, x_0, t_0)]$ liefert den Bereich R_n , und es gilt $R_{n+1} \subset R_n$. Für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich der größte invariante Bereich D_{t_0} in R . Er enthält mindestens einen Fixpunkt, zu dem eine periodische Lösung gehört; insbesondere kann er mit dem Fixpunkt identisch sein, so daß die periodische Lösung asymptotisch stabil im Großen ist. Um ein hinreichendes Kriterium für diesen bedeutsamen Fall aufzustellen, führt Verf. folgende Überlegung durch. Er denkt sich für den Rand Γ von R eine Parameterdarstellung $x(u)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, gegeben. Dann betrachtet er die Lösungen $x(t, u) = x(t, x(u), t_0)$ für $t \geq t_0$; die ihnen entsprechenden Raumkurven im (x_1, x_2, t) -Raum bilden eine Röhre, aus der die Ebene $t = t_0$ die Kontur Γ herauschneidet. Der allgemeine Querschnitt wird mit $\Gamma_{t_0}(t)$ und seine Länge mit $\lambda(t)$ bezeichnet. In einem (X_1, X_2, X_3) -Raum sei eine Fläche $X_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2, 3$, gegeben. Auf ihr ist der Kurve $\Gamma_{t_0}(t)$ wieder eine geschlossene Kurve $X_i(x(t, u))$ mit der Länge $L(t)$ zugeordnet. Verf. formuliert nun Bedingungen für die Fläche, unter denen $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = 0$ und somit auch $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$ gilt. Diese Bedingungen sind demnach hinreichend für die asymptotische Stabilität (im Großen) der erzwungenen Schwingungen. Das gefundene Kriterium wendet Verf. schließlich auf die Gleichung $x'' + f(x)x' = g(x) + p(t)$ an.

R. Reißig.

Lykova, O. B.: On the behaviour of solutions of differential equations in the neighbourhood of closed orbits. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1957, 535—537, russ. und engl. Zusammenfassg. 537 (1957) [Ukrainisch].*

Let $\dot{x} = X(x) + \varepsilon X^*(t, x, \varepsilon)$, x, X, X^* being n -vectors, X^* periodic in t . Under certain assumptions the existence of a two-parameter family of solutions is proved which have the property of attracting all other solutions of the system. (From the Author's summary.)

J. Massera.

Zadiraka, K. V.: On periodic solutions of a system of nonlinear differential equations with a small parameter by the derivatives. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1958, 131—133, russ. und engl. Zusammenfassung 133—134 (1958) [Ukrainisch].*

A proof of the existence of a unique solution of $\dot{x} = f(t, x, z)$, $\mu \dot{z} = F(t, x, z)$ which tends uniformly when $\mu \rightarrow 0$ to a solution of the corresponding degenerate system. (From the Author's summary.)

J. Massera.

Santoro, Paolo: Studio qualitativo del sistema $\dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2 + f(x, y)$, $\dot{y} = dx^2 + exy + hy^2 + g(x, y)$ nell'intorno del punto singolare $(0, 0)$. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 566—590 (1957).*

On suppose que pour le système écrit dans le titre l'origine est un point singulier isolé, a, b, c, d, e, h ne sont pas tous nuls, $f(x, y), g(x, y)$ sont de classe C^2 dans un voisinage de l'origine et s'annulent à l'origine avec leurs dérivées du premier ordre, $f(x, y) = \varrho^3 \varphi(x, y)$, $g(x, y) = \varrho^3 \psi(x, y)$, $\varrho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ de classe C^2 . On étudie en détail le système réduit $\dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2$, $\dot{y} = dx^2 + exy + hy^2$ y compris le cas dégénéré où les deux polynômes ont un facteur commun du premier degré. On en déduit le comportement des courbes intégrales du système donné. On obtient la conclusion que dans les hypothèses admises il existe toujours au moins une courbe intégrale qui tend à l'origine avec une tangente déterminée.

A. Halanay.

Pliss, V. A.: An investigation of a non-linear system of three differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 184—187 (1957) [Russisch].

On étudie le système

$$dx/dt = y - f(x), \quad dy/dt = z - x, \quad dz/dt = -a x - b f(x)$$

où $f(x)/x > a + b f(x)/x > 0$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$ (Conditions généralisées de Hurwitz). L'A. énonce sans démonstrations quelques théorèmes généraux sur le comportement des solutions et quelques théorèmes sur la stabilité de la solution banale. Voici un théorème de stabilité: la solution banale est asymptotiquement stable pour toutes perturbations initiales quelle que soit la fonction $f(x)$ vérifiant les conditions généralisées de Hurwitz si une des conditions 1. $a < 0$, $b > 0$, 2. $a = 0$, $0 < b < 1$, 3. $a > 0$, $b < 0$, $a^2 + b(1-b)^2 \leq 0$ est vérifiée et seulement dans ce cas. Dans les cas où $a > 0$, $a^2 + b(1-b)^2 > 0$ et $a > 0$, $0 \leq b < 1$, $a + b \geq 1$ on formule des conditions supplémentaires de stabilité, des conditions pour l'existence d'une solution périodique et un théorème général sur le comportement des solutions. Le système étudié est obtenu du système

$$dx/dt = f_1(x) + a_{12}y + a_{13}z, \quad dy/dt = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \quad dz/dt = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \\ a_{22} + a_{33} = 0$$

par un changement de variables.

A. Halanay.

Loud, W. S.: Behavior of certain forced nonlinear systems of second order under large forcing. Duke math. J. 24, 235—247 (1957).

Betrachtet wird (1) $x'' + (c + f(x))x' + kx + g(x) = A h(t)$. Voraussetzungen: $h(t)$ ist stückweise stetig und periodisch mit der Periode ω . c und $k \neq 0$ seien so, daß $x'' + c x' + kx = 0$ keine mit ω periodische Lösung besitzt. $f(x)$

ist für alle x beschränkt und $f \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$. $\int_0^x f(\tau) d\tau$ ist für alle x beschränkt.

$g(x)$ ist für alle x beschränkt und erfüllt eine Lipschitzbedingung; die zugehörige Lipschitzkonstante strebt für $|x| \rightarrow \infty$ gegen null. Die eindeutige mit ω periodische Lösung von $x'' + c x' + kx = h(t)$ verschwindet nur auf einer Menge vom Maß null. Dann hat (1) für hinreichend großes A eine eindeutige mit ω periodische Lösung. Weiterhin wird gezeigt, daß unter den genannten Voraussetzungen für hinreichend großes $A = A(n)$ keine mit $n\omega$ ($n = 2, 3, \dots$) periodischen Lösungen von (1) existieren. Für den Fall $k = 0$ erhält man ähnliche Ergebnisse unter etwas abgeänderten Voraussetzungen.

E. Kreyszig.

Rosenberg, R. M.: On the periodic solutions of the forced oscillator equation. Quart. appl. Math. 15, 341—354 (1958).

Verf. betrachtet einen einfachen Schwinger mit linearer oder nichtlinearer elastischer Kraft und harmonischer Fremderregung. Er nimmt ferner an, daß eine kleine (positive) Dämpfung wirkt, die aber nicht in der Bewegungsgleichung erscheint. Sie macht sich dadurch bemerkbar, daß die freien Schwingungen des Systems vernachlässigbar kleine Amplituden besitzen; daher werden nur erzwungene Schwingungen beobachtet. Die Grundgleichung lautet $x'' + f(x) = P_0 \cos \omega t$. Sie ist mit verschiedenen Methoden schon häufig auf ihre harmonischen und subharmonischen Lösungen hin untersucht worden; allerdings beschränkten sich die Untersuchungen meistens auf quasilineare oder ganz spezielle Fälle. Verf. studiert ebenfalls die periodischen Lösungen und benutzt dabei folgende Bezeichnungsweise: Die Lösung

$$x = A_r \cos\left(\frac{\omega}{r} t + \varphi_r\right) + \sum_{\omega_i \neq \omega/r} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

wobei r eine ganze Zahl ist, heißt stark subharmonisch von der Ordnung $1/r$ im Falle $|A_r| \gg |A_i|$, rein subharmonisch im Falle $A_r \neq 0$, $A_i = 0$ und einfach subharmonisch für $A_r \neq 0$, $\varphi_r = 0$, $A_i = 0$. Verf. diskutiert nun die einzelnen Fälle. Unter der Einschränkung, daß $f(x)$ analytisch ist, zeigt er: Jeder einfachen Subharmonischen $x = x_0 \cos(\omega t/r)$ entspricht eine und nur eine Gleichung $x'' + f_r(x) = P_0 \cos \omega t$,

die diese zu reproduzieren vermag; hierbei gilt $f_r(x) = \sum_{n=0}^r \gamma_r^n x^n$. Die Gleichung läßt sich überdies in eine Form überführen, die nur einen Parameter enthält. Bei der Stabilitätsuntersuchung trennt Verf. die ungeraden und geraden Subharmonischen und benutzt die linearisierte Variationsgleichung, die vom Hillschen Typ ist und bei gewissen Vernachlässigungen in eine Mathieusche Gleichung übergeht. Danach studiert Verf. stark subharmonische Lösungen solcher Gleichungen, die sich von Gleichungen mit einfachen subharmonischen Lösungen nur durch kleine Korrekturglieder unterscheiden. Das Korrekturglied kann z. B. ein reines Dämpfungsglied sein oder ein ortsabhängiges Glied, so daß eine Verallgemeinerung der Duffingschen Gleichung entsteht. Für den letzteren Fall konstruiert Verf. die subharmonische Lösung und untersucht wieder die Stabilität nach der ersten Näherung.

R. Reißig.

Minorsky, M. N.: Structure topologique de l'équation de M. Liénard. J. Phys. Radium 18, Suppl. au Nr. 12, 121 A—130 A (1957).

Verf. gibt einen hinsichtlich der Methode und der Ergebnisse detaillierten Bericht, der zugleich weitere Anwendungsmöglichkeiten seiner in früheren Arbeiten (siehe z. B. dies. Zbl. 64, 334) entwickelten Methoden zeigt. Zur kurzen Charakterisierung der Erscheinungen wird eine Symbolik verwendet: mit S = stabil und I = instabil bedeutet z. B. ISI (von innen nach außen:) innen ist ein instabiler Punkt, der umgeben ist von einer stabilen (geschlossenen) Kurve, die ihrerseits von einer instabilen Kurve umgeben ist. Bei stetiger Veränderung der Daten der Differentialgleichung sind drei verschiedene Verzweigungserscheinungen möglich, z. B. kann SI in SISI übergehen. Bei der Liénardschen Gleichung $\ddot{x} + f(x) \dot{x} + x = 0$ wird der Fall $f(x) = a + c x^2 + e x^4$ mit kleinen Größen a, c, e mittels der stroboskopischen Methode (Einführung von $x = r \cos \psi$, $y = r \sin \psi$, $\rho = r^2$, Aufstellung einer Differentialgleichung für ρ) in einem 3-dimensionalen Koeffizientenraum ausführlich diskutiert und in den einzelnen Oktanten eine genaue Klassifizierung der Erscheinungen vorgenommen. Auch verwandte Gleichungen lassen sich mit diesen Methoden behandeln, wobei natürlich die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen wächst, z. B. kann bei $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) \dot{x} + g(x) = 0$ im Falle $g(x) \neq x$ schon in der ersten Näherung eine nichtlineare Korrektur der Frequenz auftreten.

L. Collatz.

Chudaj-Verenov, M. G.: Einige Sätze über Grenzzyklen für die Liénardsche Gleichung. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3(75), 389—396 (1957) [Russisch].

Consider $\ddot{x} + f(x) \dot{x} + x = 0$. 1. If there exist four numbers $x_1 \leq x_1^* \leq 0 \leq x_2^* \leq x_2$ such that f is monotonic for $x < x_1$ and $x > x_2$; if f is non-decreasing in $[x_1^*, 0]$ and non-increasing in $[0, x_2^*]$ or inversely; if $|f| < 2$ in $[x_1, x_1^*]$ and $[x_2^*, x_2]$, then any limit cycle in the phase plane is star-shaped with respect to the origin. 2. If f is non-increasing for $x > 0$ and non-decreasing for $x \leq 0$ and $f(0) > 0$ there is at most one limit cycle. Under certain complicated assumptions the existence of at least two limit cycles is also proved.

J. Massera.

Peretjagin (Peretiagin), B. M.: On the number of limit cycles of the equation $\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy + P(x, y)}{ax + by + Q(x, y)}$, where $P(x, y)$ and $Q(x, y)$ are homogeneous polynomials of degree n . Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 29—32 (1957) [Russisch].

Assume $ad - bc \neq 0$; then there are at most $n + 1$ limit cycles and there exist systems with at least $\frac{1}{2}(n + 2)$ [$\frac{1}{2}(n + 3)$] limit cycles if n is even [odd].

J. Massera.

Landis, E. M. and I. G. Petrovskij (Petrovsky): On the number of limit cycles of equation $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, in which P and Q are polynomials of degree n . Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 748—751 (1957) [Russisch].

Dans cette annonce est défini le nombre des cycles limites de l'équation (1) $y' = P(x, y)/Q(x, y)$, P et Q désignant des polynômes du degré n . Profitant des méthodes, dont les AA. se sont servis dans leur Mémoire antérieur, dans le cas de $n = 2$ (ce Zbl. 65, 72), ils ont réussi de démontrer le théorème suivant: Il existe pour l'équation (1) pas plus des $\frac{1}{2}(9n^3 + n^2 - 6n + 6)$ cycles limites, n étant un nombre impair, et pas plus des $\frac{1}{2}(9n^3 - 4n^2 - 27n + 14)$ cycles limites, si n était un nombre pair.

N. Saltykow.

Landis, E. M. und I. G. Petrovskij: Über die Anzahl der Grenzzyklen der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, wo P und Q Polynome sind. Mat. Sbornik, n. Ser. 43 (85), 149—168 (1957) [Russisch].

Ils'agit du nombre supérieur des cycles limites de l'équation (1) $y' = P(x, y)/Q(x, y)$, P et Q étant des polynômes, dont le degré ne surpasse pas le nombre n . On démontre que le nombre n étant impair, celui des cycles limites de l'équation (1) ne surpasse pas le nombre $\frac{1}{2}(6n^3 - 7n^2 - 11n + 16)$, or, n étant pair le nombre des cycles limites ne surpasse pas $\frac{1}{2}(6n^3 - 7n^2 + n + 4)$. Les résultats cités généralisent ceux que les AA. avaient obtenu pour les équations de la forme considérée, dans le cas $n = 2$ (ce Zbl. 65, 72), en profitant des résultats qui y était donnés. Considérant les équations (1), aux coefficients et aux variables complexes, les AA. les comparent avec ceux aux coefficients et aux variables réels correspondants. On relie de cette manière les cycles limites d'équations réelles avec ceux d'équations complexes, moyennant sept lemmes antérieurement établies. En y joignant quatre nouvelles lemmes qu'il démontrent actuellement, en invoquant les points singuliers d'équations considérées, on parvient à démontrer le théorème fondamental mentionné plus haut.

N. Saltykow.

Swinnerton-Dyer, H. P. F.: On an extremal problem. Proc. London math. Soc., III. Ser. 7, 568—583 (1957).

Considerato il sistema di equazioni differenziali (sotto forma integrale)

$$(1) \quad \alpha(t) - \alpha(0) = \int_0^t f(\alpha, \beta; x) dt, \quad \beta(t) - \beta(0) = \int_0^t g(\alpha, \beta; x) dt$$

e assegnato, assieme alle funzioni $f(\alpha, \beta; x)$, $g(\alpha, \beta; x)$ e ai valori iniziali $\alpha(0)$, $\beta(0)$, un valore $T > 0$, si tratta di determinare la funzione $x = x(t)$, in modo da rendere massimo $\alpha(T)$. Per tale problema viene stabilita l'analoga dell'equazione differenziale di Eulero

$$g_x^2 f_\beta - f_x^2 g_\alpha + f_x g_x (f_\alpha - g_\beta) = g_x df_x/dt - f_x dg_x/dt.$$

Per giungere all'esistenza dell'estremale l'A. introduce il seguente concetto: una funzione $\Delta(\xi, t)$ viene chiamata funzione distribuita di t , se per ogni t fissato è crescente in ξ , e se è $\Delta(\xi, t) \rightarrow 0$ per $\xi \rightarrow -\infty$ e $\Delta(\xi, t) \rightarrow 1$ per $\xi \rightarrow +\infty$. Inoltre l'A. accenna all'estensione al caso in cui il sistema (1) è costituito di n equazioni differenziali.

S. Cinquini.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Lelong, Pierre: Integration of a differential form on an analytic complex subvariety. Proc. nat. Acad. Sci. USA 43, 246—248 (1957).

Sei D ein Gebiet im $\mathbb{C}^n(z_1, \dots, z_n)$, W eine analytische Menge in D , φ eine Differentialform in D mit stetigen Koeffizienten und kompaktem Träger. Ist W speziell eine Untermannigfaltigkeit von D , so ist das Integral (1) $t(\varphi) = \int_W \varphi$ wohldefiniert. Verf. kündigt an, daß sich (1) auch im allgemeinen Fall sinnvoll definieren läßt. Es werden die Begriffe des positiven Courant und der einfachen Erweiterung eines Courant eingeführt und verschiedene Aussagen hierüber angegeben. Das Hauptresultat läßt sich wie folgt formulieren: Ist $W = W^p$ rein p -

dimensional und bezeichnet W_0^p die Mannigfaltigkeit der gewöhnlichen Punkte von W^p , so wird durch $t_0(\varphi_0) = \int_{W_0^p} \varphi_0$, wo φ_0 die Differentialformen in $D - (W^p - W_0^p)$

mit stetigen Koeffizienten und kompakten Trägern durchläuft, ein geschlossener positiver Courant t_0 vom Grade $n - p$ in $D - (W^p - W_0^p)$ definiert. Dann existiert in D die einfache Erweiterung t von t_0 und liefert einen geschlossenen positiven Courant vom Grade $n - p$ in D . — Falls $p = n - 1$ ist und W^{n-1} in D durch eine Gleichung $f(z_1, \dots, z_n) = 0$ gegeben wird, gilt $t = \frac{i}{\pi} (dz dz \log |f|)$. *K. Stein.*

Lelong, Pierre: Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. math. France **85**, 239—262 (1957).

Die vorliegende Arbeit enthält die ausführlichen Beweise zu früher angekündigten Resultaten über Existenz und Eigenschaften des Integrals $t(\varphi) = \int_W \varphi$ (siehe vorstehendes Referat; die dort gewählten Bezeichnungen seien beibehalten). Zunächst wird untersucht, wann ein in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit V (der Klasse C^∞) gegebener Courant sich zu einem Courant in einer V umfassenden Mannigfaltigkeit V' erweitern läßt. Es werden Bedingungen aufgestellt, welche die Existenz der einfachen Erweiterung eines geschlossenen Courant zu einem geschlossenen Courant sicherstellen; speziell wird der Fall behandelt, daß $V' - V$ eine Teilmannigfaltigkeit niedriger Dimension in V' ist. Sodann werden positive Courants in Gebieten des $C^n(z_1, \dots, z_n)$ betrachtet. Dabei wird die folgende Definition zugrunde gelegt: Ein Courant T heißt positiv vom Grade q , wenn gilt:

1. T ist homogen vom Typus (q, q) . 2. Für jedes System von Formen $\omega_k = \sum_{j=1}^n \alpha_k^j dz_j$ ($k = 1, \dots, n - q$) mit Koeffizienten der Klasse C^∞ ist der Courant $(i/2)^{n-q} T \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-q} \wedge \bar{\omega}_{n-q}$ ein positives Maß. — Insbesondere ist der durch $t_0(\varphi_0) = \int_{W_0^p} \varphi_0$ in $D - (W^p - W_0^p)$ definierte geschlossene Courant t_0 positiv. Verf. zeigt,

daß die Erweiterungsbedingungen für t_0 erfüllt sind, woraus die Existenz der einfachen Erweiterung von t_0 zu einem geschlossenen positiven Courant t vom Grade $n - p$ in D folgt. — Als Anwendung ergibt sich, daß W^p in jedem kompakten Teil von D einen endlichen Flächeninhalt besitzt. Bezeichnet $B(z^{(0)}; R)$ eine in D enthaltene Kugel vom Radius R um einen Punkt $z^{(0)} \in W^p$ und $\sigma(z^{(0)}; R)$ den Flächeninhalt von $W^p \cap B(z^{(0)}; R)$, so ist $\sigma(z^{(0)}; R)/R^{2p}$ eine monoton wachsende Funktion von R .

K. Stein.

Ghizzetti, Aldo: Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali. I, II. Atti Acad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **22**, 276—281, 430—433 (1957).

Es ist $E(U)$ ein linearer partieller Differentialoperator von zweiter oder dritter Ordnung und es wird das Integral $\Phi(U) = \int_T E(U) dx dy$ betrachtet. Der Rand

FT von T besitze endlich viele Eckpunkte. Verf. untersucht folgende Frage: unter welchen Bedingungen hängt $\Phi(U)$ bloß von den in den Eckpunkten von FT angenommenen Werten von U (und seinen partiellen Differentialquotienten im Falle, daß E von dritter Ordnung ist) ab? Eine solche Bedingung ist, daß FT aus Charakteristiken von $E(U)$ zusammengesetzt ist. Es werden folgende Fälle studiert: I. E es ist von zweiter Ordnung und T ein beliebiger Bereich, begrenzt durch Charakteristiken, welche zu zwei Systemen von charakteristischen Kurven gehören. II. E ist von dritter Ordnung und zu jedem Punkte gehören zwei verschiedene (reelle) charakteristische Richtungen (eine von ihnen von doppelter Multiplizität). FT ist aus Charakteristiken zusammengesetzt, welche zu diesem System gehören. III. E ist wieder von dritter Ordnung, zu jedem Punkte gehören drei ver-

schiedene charakteristische Richtungen. FT ist entweder aus Kurven zweier dieser Systeme oder aus Linien aus allen drei charakterischen Systemen zusammengesetzt. Die Zusammenfassung der Resultate ist etwas verwickelt. *S. Fenÿö.*

Parsons, D. H.: Invariance of the rank of a partial differential equation of the second order, under contact transformations. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 8*, 112—116 (1957).

Considérons l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$f(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n, p_{11}, \dots, p_{nn}) = 0,$$

où l'on a $p_i = \partial z / \partial x_i$, $p_{ij} = \partial^2 z / \partial x_i \partial x_j$, la fonction f étant analytique par rapport aux arguments qui y figurent et l'équation donnée étant résoluble par rapport à l'un de ces arguments. L'A. appelle rang de l'équation considérée le rang de la matrice

$$\begin{bmatrix} \partial f / \partial p_{11} & \frac{1}{2} \partial f / \partial p_{12} & \dots & \frac{1}{2} \partial f / \partial p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} \partial f / \partial p_{n1} & \dots & \dots & \partial f / \partial p_{nn} \end{bmatrix},$$

en la désignant par $[C_{ik}]$, où l'on a $C_{ii} = \partial f / \partial p_{ii}$, $C_{ik} = C_{ki} = \frac{1}{2} \partial f / \partial p_{ik} = \frac{1}{2} \partial f / \partial p_{ki}$. L'A. avait démontré dans sa thèse (Oxford 1952) que, dans le cas $n = 3$, l'équation correspondante, son rang étant 1, admettait une famille de caractéristiques d'une dimension et deux familles de caractéristiques des deux dimensions, si le rang de l'équation était 2. Or, si le rang de l'équation était 3 ou supérieur, elle n'admettait point de caractéristiques correspondentes. L'A. généralise, à présent, les résultats cités, sur les équations étudiées à n variables indépendantes, en démontrant que si leur rang était supérieur ou non à deux, ce rang est un invariant par rapport aux transformations de contact. *N. Saltykow.*

Il'in, V. A.: Zur Frage der Begründung der Fourierschen Methode für die Schwingungsgleichung. *Uspechi mat. Nauk 12*, Nr. 4(76), 289—296 (1957) [Russisch].

L'A. considère le problème mixte

$$\Delta v = v_{tt} - f(M, t), \quad v(M, 0) = \varphi(M), \quad v_t(M, 0) = \psi(M), \quad v|_r = 0,$$

où M parcourt un domaine N -dimensionnel, borné par la surface Γ , appartenant à la classe de Liapounoff. Il démontre que le théorème d'existence et unicité reste valable avec les conditions données dans *Doklady Akad. Nauk* (v. ce Zbl. 41, 218) par O. A. Ladyženskaja, pour les fonctions f, φ, ψ . *G. Marinescu.*

Lieberstein, H. M.: On the generalized radiation problem of A. Weinstein. *Pacific J. Math. 7*, 1623—1640 (1957).

This paper is concerned with a method developed recently by A. Weinstein [Cf. *Summa Brasil. Math. 3*, 125—146 (1955)] to solve the generalized radiation problem. The main result is a uniqueness theorem for this problem. In a first section the author proves several properties of the solutions of the Euler-Poisson-Darboux equation

$$u^{(k)}_{xx} = u^{(k)}_{yy} + \frac{k}{y} u^{(k)}_y, \quad k < 1,$$

with initial conditions

$$(2) \quad \lim_{y \rightarrow 0} u^{(k)}(x, y) = 0, \quad u^{(k)}(x, x) = 0,$$

which are regular in the triangle T with vertices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a)$. Regularity means here that the solutions are twice continuously differentiable in a triangle containing T and having only the side $y = 0$ in common with it. These properties are obtained by constructing general solutions for $0 < k < 1$, $k < 0$ and $k = 0$, then particularizing them by expressing that the initial conditions are satisfied. A second section shows that for $-2 < k < 1$ the only solution of (1) and (2) is $u^{(k)} = 0$. The same result is then extended to all negative values of k , by a complete induction: if the statement holds for k , it holds for $k - 2$. *C. Racine.*

Aguiló Fuster, Rafael: Untersuchung und Integration einer Familie von partiellen Differentialgleichungen vierter Ordnung. Collect. Math. 9, 153—181 (1957) [Spanisch].

L'A. prosegue la propria precedente ricerca (questo Zbl. 71, 314), applicando i funzionali abeloidi alla risoluzione di quelle equazioni a derivate parziali (a coefficienti costanti)

$$\frac{\partial^4 U}{\partial t^4} + a_0 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 4 a_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial t} + 6 a_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2} + 4 a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial t^3} - \frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial t^2} = f(t, x, y),$$

per le quali il cono caratteristico è di genere uno ed è simmetrico rispetto al piano tangente al cono lungo la generatrice tacnodale. S. Cinqini.

Sidorov, Ju. V.: Lösung des Cauchyschen Problems für die Gleichung $\partial^2 u / \partial t^2 + \Delta \Delta u = 0$. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 4(76), 341—348 (1957) [Russisch].

L'A. considera l'equazione (') $\partial^2 u / \partial t^2 + \Delta \Delta u = 0$ (Δ operatore di Laplace) con le condizioni iniziali (') $u|_{t=0} = 0$, $\partial u / \partial t|_{t=0} = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ nell'ipotesi che φ sia continua e assolutamente integrabile nell'intero spazio (x_1, x_2, \dots, x_n) insieme con tutte le derivate parziali fino all'ordine $2\lambda + 4 = 2[(n+1)/4] + 4$ e trova la soluzione del problema (') (') nella forma

$$('') u(t, x_1, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n} \int \Delta^n \varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n) S_n\left(\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right)^{1/2}, t\right) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

dove

$$S_n(r, t) = (-1)^\lambda (2\pi)^{n/2} r^{(2-n)/2} \int_0^\infty \alpha^{(n-4\lambda)/2-2} \sin \alpha^2 t J_{(n-2)/2}(r\alpha) d\alpha$$

(con J_μ funzione di Bessel). L'A. prova con un esempio, $n = 1$, che la u rappresentata dalla (') pur restando soluzione di (') può non soddisfare la (') qualora vengano a mancare le condizioni di regolarità imposte alla φ . R. Conti.

Slobodeckij, L. N.: Verallgemeinerte Lösungen parabolischer und elliptischer Systeme. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 21, 809—834 (1958) [Russisch].

L'A. fait l'étude des propriétés des solutions généralisées au sens de Sobolev d'un système

$$(A) \quad Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{r=1}^{2p} \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n A^{(i_1, \dots, i_p)}(t, x) \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}} - A(t, x) u = f(t, x),$$

supposé parabolique au sens de Petrovskij. L'A. démontre, sous certaines hypothèses, qu'une solution généralisée du système homogène $(A_0) Lu = 0$ sommable dans un cylindre $Q = [0, T] \times \Omega$ ($0 \leq t \leq T$; $x \in \Omega$) est équivalente à une solution de ce système régulière à l'intérieur de Q [c'est à dire y admettant les dérivées qui apparaissent dans (A_0) continues]. La variété linéaire $M^q(Q)$ des solutions généralisées de (A_0) appartenant à $L^q(Q)$ constitue une sous-espace de $L^q(Q)$ [on désigne par $L^q(Q)$ l'espace des vecteurs-fonctions sommables dans Q avec la puissance q], dont les éléments sont des solutions régulières de (A_0) à l'intérieur de Q ; la convergence faible (resp. forte) d'une suite $\{u_{0m}\}$ de solutions généralisées de (A_0) entraîne la convergence (resp. la convergence uniforme) de cette suite et des suites de dérivées qui figurent dans (A_0) à tout point intérieur de Q (resp. dans toute partie fermée et bornée de Q). L'A. passe ensuite à l'étude des intégrales appelées par lui intégrales du type du potentiel parabolique, et du potentiel parabolique de

volume $u_1(t, x) = \int_0^t ds \int_\Omega \dots \int U(t, x; s, y) f(s, y) dy$, $U(t, x; s, y)$ étant la solution fondamentale de (A_0) . Soit $N^q(Q)$ l'espace des vecteurs-fonctions $f(t, x)$ tels que $f(t, x) \in L^q(\Omega)$ pour presque tout $t \in [0, T]$, la fonction $\varphi(t) = \|f\|_{L^q(\Omega)}$ étant sommable dans $[0, T]$. L'A. suppose que $f \in N^q(Q)$ et démontre qu'afin qu'une fonction $u(t, x)$ soit une solution généralisée de (A) appartenant à $L^q(Q)$, il faut et il suffit que l'on ait $u(t, x) = u_0(t, x) + u_1(t, x)$, avec $u_0(t, x) \in M^q(Q)$. Dans la suite sont

démontrés les théorèmes concernant l'existence des dérivées des solutions généralisées. Dans la partie finale l'A. démontre des théorèmes analogues relatifs au système elliptique.

$$Mu \equiv \sum_{r=1}^{2p} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n A^{(i_1, \dots, i_r)}(x) \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} + A(x) u = f(x).$$

M. Krzyżański.

Fulks, W.: Regular regions for the heat equations. *Pacific J. Math.* **7**, 867—877 (1957).

A. Tychonoff a démontré (ce Zbl. **24**, 112) qu'un domaine borné R régulier par rapport au problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace est aussi régulier relativement au problème de Dirichlet pour l'équation $\Delta u = \lambda u$ ($\lambda \geq 0$) et relativement au problème de Fourier pour l'équation de la chaleur. Et inversement, un domaine borné régulier par rapport au problème de Fourier est régulier relativement au problème de Dirichlet. Il s'agit du problème de Fourier posé d'une manière suivante: $\Delta u(x, t) = u'_t$, $x \in R$, $t > 0$; $u(x, 0) = \Phi(x)$, $x \in \bar{R}$, $u(\xi, t) = \psi(\xi, t)$ pour $\xi \in B$, $t \geq 0$, B étant la frontière de R . L'A. suppose que le domaine R est régulier par rapport au problème de Dirichlet et expose une nouvelle méthode de démonstration de la régularité de ce domaine relativement au problème de Fourier. L'A. introduit notamment la fonction de Green pour le problème de Dirichlet et en appliquant la transformation de Laplace, ramène le problème de Fourier à une équation intégrale de Fredholm au noyau symétrique. L'inversion de la transformation de Laplace donne la solution du problème de Fourier. L'application de cette méthode exige certaines restrictions relatives aux données. Or dans la partie finale du travail l'A. écarte ces restrictions en approximant les fonctions données par des polynômes.

M. Krzyżański.

Doob, J. L.: A new look at the first boundary-value problem. *Proc. Sympos. appl. Math.* **7**, 21—33 (1957).

L'A. résume en simplifiant des recherches publiées ailleurs [*Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability* **2**, 48—80 (1956)], d'ailleurs prolongées depuis cet aperçu dans [*Illinois J. Math.* **2**, 19—36 (1958)]. Il développe une axiomatique du problème de Dirichlet dans des espaces topologiques très généraux en utilisant, à côté d'une frontière ou sous frontière, des limites selon des suites de points (trajectoires) inspirées du mouvement brownien et considérées dans un processus de Markov. Dans l'espace R , dense dans $R \cup R'$ métrique compact ($R \cap R'$ vide, R' frontière de R), on distingue des ouverts „réguliers“ D relativement compacts tels que tout ouvert δ de R soit réunion dénombrable de tels $D \subset \bar{D} \subset \delta$. A chaque D de frontière D' et chaque point $z \in D$ est associée une mesure $\mu(z, D, \cdot) \geq 0$ sur D' de total 1. On suppose: M_1) Notons $I_f^D(z) = \int_{D'} f(\zeta) \mu(z, D, d\zeta)$ (f borélienne). Si I_f ($f \geq 0$) est finie sur un ensemble dense dans D_1 , elle est finie continue dans D_1 (ouvert $\subset D$) et si f est continue, I_f est prolongeable continûment par f dans \bar{D} . M_2) Une fonction u continue dans α ouvert est dite régulière si elle vaut I_u^D pour tout $D \subset \bar{D} \subset \alpha$; alors I_f^D est régulière dans tout ouvert partiel où elle est finie. Enfin un axiome M_3 joue le rôle d'un principe de maximum. On introduit des fonctions sousrégulières et superrégulières analogues aux sous- ou surharmoniques. On peut alors reprendre la théorie de Perron-Wiener-Brelot (PWB) et étudier les données-frontière résolutives ainsi que l'allure des solutions à la frontière. On introduit une suite fixée de \bar{R}_n réguliers. ($\bar{R}_n \subset R_{n+1}$; $\bigcup R_n = R$) et des suites de points z_n où z_n d'abord égal à z_0 appartient à R'_n pour n assez grand. L'espace $\Omega(z_0)$ des suites z_n (trajectoires ω) issues de z_0 est pourvu d'une mesure-probabilité telle que, connaissant z_{n-1} , la probabilité du choix de z_n soit la mesure harmonique sur R'_n prise au point z_{n-1} . Alors si

u est sous-régulière ou régulière, $u(z_n)$ définit une semi-martingale ou martingale. Les u sous-régulières majorées par une fonction régulière ≥ 0 ont une limite finie pour presque toutes les ω issues de z_0 ; lorsque u est de plus régulière et „uniformément sommable“ sur les R'_n , $u(z_0)$ s'exprime par une intégrale (espérance mathématique de la limite). On approfondit en particulier le cas où u est une PWB solution pour une donnée résolutive. Puis on se passe même de frontière R' en introduisant une donnée-frontière stochastique. C'est une famille $x_z(\omega)$ de fonctions réelles, telles que l'ensemble des points de Ω_z où x appartient à un ensemble linéaire borélien a une probabilité-mesure régulière en z . On remplace les conditions-limite de la PWB-théorie par des conditions-limite relatives à la frontière stochastique et on précise les classes de fonctions régulières et de frontières stochastiques pour qu'il y ait correspondance grâce à la nouvelle „SPWB“ théorie et représentation des solutions comme espérance mathématique. La théorie s'applique à de larges classes d'équations aux dérivées partielles linéaires de type elliptique et parabolique. *M. Brelot.*

Ventcel' (Wentzell), T. D.: Certain quasilinear parabolic systems. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 21—24 (1957) [Russisch].

L'A. considère le système du type parabolique de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \left\{ b_{ij}(x, t, u_1, \dots, u_N) \frac{\partial u_j}{\partial x} + c_{ij}(x, t, u_1, \dots, u_N) u_j \right\} + f_i(x, t) \quad (i=1, \dots, N)$$

et énonce (sans exposer la démonstration) un théorème d'existence et d'unicité de la solution du premier problème aux limites pour (1) dans un rectangle $R_T \{x_1 \leq x \leq x_2, 0 \leq t \leq T\}$ avec les conditions aux limites

$$(2) \quad u_i(x, 0) = u_i^{(0)}(x), \quad u_i(x_j, t) = u_i^{(j)}(t) \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, 2.$$

L'A. en déduit un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy. Dans la seconde partie l'A. applique ces théorèmes pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions du premier problème aux limites et du problème de Cauchy relatifs à certains systèmes intervenant dans la mécanique. Dans l'énoncé du théorème concernant le problème de Cauchy pour (1) manque la détermination de la classe dans laquelle l'unicité de la solution subsiste. *M. Krzyżański.*

Zagorskij (Zagorsky), T. Ja. (T. Y.): Certain boundary problems for a system of differential equations of the parabolic type with changing coefficients. Dopovidi Akad. Nauk Ukraï. RSR 1958, 364—367, russ. und engl. Zusammenfassg. 367 (1958) [Ukrainisch].

The paper gives a solution of a parabolic system

$$\partial u / \partial t - A_s(x, t, D) u - A_{s-1}(x, t, D) u - \dots - A_0(x, t, D) u = 0$$

with sufficiently smooth coefficients depending on x and t and satisfying conditions

$$u|_{t=0} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow y \in S} B(y, D) u = \lim_{x \rightarrow y \in S} [B_{s-1}(y, D) + \dots + B_0(y, D)] u = f(y, t),$$

where

$$A_k(x, t, D) = \left\| \sum_{(k)} a_{ij}^{k_1 \dots k_n, k}(x, t) \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right\|_{i, j=1}^{i, j=N};$$

$$B_k(y, D) = \left\| \sum_{(k)} b_{ij}^{k_1 \dots k_n, k}(y) \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right\|_{i, j=1}^{i=SN/2, j=N}.$$

Engl. Zusammenfassg.

Shirota, Taira: The initial value problem for linear partial differential equations with variable coefficients. III. Proc. Japan Acad. 33, 457—461 (1957).

[Teile I, II s. dies. Zbl. 77, 93; 78, 83.] Es werden gemischte Probleme für lineare parabolische Differentialgleichungen betrachtet unter den von J. L. Lions [Acta math. 94, 13—153 (1955)] formulierten Randbedingungen. Die Ergebnisse werden auf die Fokker-Plancksche Gleichung angewendet. Die Beweise werden nur skizziert. *G. Doetsch.*

Bellman, Richard: On the nonnegativity of solutions of the heat equation. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **12**, 520—523 (1957).

Con l'impiego del metodo alle differenze e sfruttando la supposta esistenza ed unicità della soluzione della equazione del calore: $u_t = u_{xx} + q(x, t)u$, con $u(x, 0) = v(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $t > 0$, che risulta funzione continua di $v(x)$, si dà una semplice dimostrazione della non negatività della soluzione stessa.

G. Sestini.

Olejniki (Oleinik), O. A.: On equations of the unsteady filtration type. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **113**, 1210—1213 (1957) [Russisch].

L'A. considère le problème de Cauchy pour l'équation

$$(1) \quad \partial u / \partial t = \partial^2 \varphi(t, x, u) / \partial x^2 \quad \text{avec la condition initiale} \quad (2) \quad u(0, x) = u_0(x),$$

la fonction $u_0(x)$ étant non négative et bornée, et la fonction $\varphi(t, x, u)$ étant continue et telle que $\varphi'_u \geq 0$, $\varphi'_u > 0$ pour $u > 0$. L'A. appelle solution généralisée de ce problème une fonction $u(t, x)$ continue et bornée dans le domaine $G\{0 \leq t \leq T, -\infty < x < +\infty\}$ et telle que 1. la dérivée généralisée $\partial \varphi(t, x, u(t, x)) / \partial x$ existe et soit bornée dans G , 2. pour toute fonction $f(t, x)$ de classe C^1 dans G , s'annulant en dehors d'un domaine du semi-plan $t \leq T$ subsiste l'égalité

$$\iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial t} u(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x, u(t, x)) \right] dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(0, x) u_0(x) dx = 0.$$

L'A. expose la démonstration de l'unicité et de l'existence d'une solution de ce problème et en déduit, sous certaines hypothèses, l'existence d'une solution du problème de Cauchy pour (1) au sens classique. La méthode s'étend à la solution généralisée du problème qui consiste à la recherche d'une solution de (1) continue et bornée pour $0 \leq t \leq T$, $x \geq 0$, satisfaisant aux conditions: $u(0, x) = u_0(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, $u(t, 0) = u_1(t) \geq 0$ pour $0 \leq t \leq T$.

M. Krzyżański.

Hartman, Philip: Hölder continuity and non-linear elliptic partial differential equations. *Duke math. J.* **25**, 57—65 (1958).

In a first part the author considers two functions $p(x, y)$, $q(x, y)$ of class C^1 on a domain D which satisfy the inequality:

$$(1) \quad p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 \leq \sigma \partial(q, p) / \partial(x, y) + \tau$$

where σ and τ are positive constants and $\sigma > 2$. Setting $z = x + iy$ and $I = I_D(p) + I_D(q)$ where $I_D(f) = \iint_D (f_x^2 + f_y^2) dx dy$, it is shown that there exists a constant C such that

$$|p(z_0) - p(z)| + |q(z_0) - q(z)| \leq C(\sqrt{I} + \sqrt{\tau}) |z_0 - z|^\lambda / d^\lambda(z_0)$$

where λ is determined by the conditions $\lambda + \lambda^{-1} = \sigma$, $0 < \lambda < 1$, and $d(z)$ stands for the distance from z to the boundary of D . A similar Hölder condition holds if in the right hand member of (1) $\tau[1 + \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2}]$ is substituted for τ . This result is easily applied to the study of a solution (p, q) of the elliptic system

$$(2) \quad p_x = -dq_x - c q_y - g; \quad p_y = a q_x + b q_y + f$$

with bounded coefficients. The second part of the paper is concerned with an elliptic, non linear, equation of the form

$$(3) \quad G(x, y, r, s, t) = 0$$

when G satisfies a uniform Hölder condition of index $\lambda \leq 1$ with respect to the point (x, y) . It is shown that if Φ is a C^2 solution of (3) in a domain D , the second order partial derivatives of Φ are uniformly Hölder-continuous with an index $\mu < \lambda$ on compact subsets of D . The proof is as follows: set $f^0(x, y) = f(x + h, y + k)$ and $f^\delta(x, y) = (f^0 - f) / (h^2 + k^2)^{\lambda/2}$. The given elliptic equation yields for arbitrary (h, k) the equation

$$(4) \quad A \cdot r + 2 B \cdot s + C \cdot t = \psi$$

where A, B, C are continuous functions of $x^0, y^0, r, s, t, r^0, s^0, t^0$ and have limits $G_r(x, y, r, s, t), G_s, G_t$ as $(h, k) \rightarrow 0$. Further

$$\psi = [G(x, y, r, s, t) - G(x^0, y^0, r, s, t)] / (h^2 + k^2)^{1/2}.$$

If Φ^0 is a solution of (4), it is a solution of the system

$$p_x^0 = -(2 B q_x^0 + C q_y^0 - \psi) / A, \quad p_y^0 = q_y^0$$

where $p^0 = \Phi_x^0, q^0 = \Phi_y^0$. Then the results of Part I, slightly modified, yield the theorem.

C. Racine.

Koševlev (Koshelev), A. I.: On the differentiability of solutions of elliptical differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 806—809 (1957) [Russisch].

Verf. beweist den folgenden Satz: Es sei $Lu \stackrel{\text{def}}{=} \sum \partial(a_{ik}(x) \partial u / \partial x_k) / \partial x_i$; ein elliptischer Operator im beschränkten Gebiet Ω_N , dessen Rand $\partial\Omega_N$ zweimal stetig differenzierbar ist; $a_{ik} \in C^1(\bar{\Omega}_N)$; $f \in L^p(\Omega_N)$, $p > N/2$. Dann existiert eine verallgemeinerte Lösung des Problems $Lu = f, u|_{\partial\Omega_N} = 0$ die der Ungleichung

$$\left(\int_{\Omega_N} |\nabla^\alpha u|^2 dx \right)^{1/p} \leq c \|f\|_{L^p(\Omega_N)}$$

genügt (∇^α bedeutet starke Ableitung).

K. Maurin.

Cimmino, Gianfranco: Una nuova forma del teorema di unicità per la soluzione del problema generalizzato di Dirichlet. Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Anno 245°, Rend., XI. Ser. 4, Nr. 1, 83—88 (1957).

Si considera il problema generalizzato di Dirichlet, per le soluzioni di una equazione lineare alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine, nei riguardi della condizione al contorno: si richiede che l'incognita converga in media verso una data funzione integrabile con una sua potenza. Sia D un dato dominio, limitato, connesso, nello spazio dei punti $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$, FD la sua frontiera, con $x = \bar{x}(s)$ la rappresentazione parametrica di FD , col dominio base T di variabilità del punto $s(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, in corrispondenza ai numeri t di un intorno destro dello zero. Nel teorema di unicità, il quale si può formulare così: una funzione soluzione della data equazione entro il dominio, se è convergente in media a zero sulla frontiera di questo, non può che ridursi alla costante zero, l'ipotesi della convergenza in media a zero sulla frontiera si può sostituire con l'altra meno restrittiva. Si deduce così una nuova maniera di caratterizzare le soluzioni convergenti in media sulla frontiera. Per questo si dimostra il teorema seguente: condizione necessaria e sufficiente, affinché esista una funzione di quadrato sommabile in T , verso la quale la $u(x)$ sia convergente in media su FD , è che, in un intorno destro dello zero, riesca limitata la funzione di t rappresentata dall'integrale $\int_T P(s) u^2[x(s, t)] ds$, con

$P(s)$ una funzione misurabile, limitata, sempre positiva.

M. Nedelcu.

Mizel, Victor J.: A boundary layer problem for an elliptic equation in the neighborhood of a singular point. Proc. Amer. math. Soc. 8, 62—67 (1957).

The author considers a boundary value problem for

$$(1) \quad Lu = \varepsilon \Delta u + A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = D(x, y)$$

on a region R which is an open simply — or multiply — connected region in the (x, y) -plane, whose boundary S consists of a finite number of simple closed curves, and $R + S$ is contained in an open connected region R_0 , throughout which A, B, C and D are of class C^6 and $C < 0$. Along S the boundary value \bar{u} is of class C^6 . The system of characteristics of the equation (1) where $\varepsilon = 0$ has as singularities on $R + S$ a finite number of stable attractors P_1, P_2, \dots, P_n . By denoting $u(x, y, \varepsilon)$ the solution of the boundary value problem, the author proves that if $U(x, y)$ is the solution of equation (1) where $\varepsilon = 0$, which solves the initial value problem for $R + S - P_1 - \dots - P_n$: $U = \bar{u}$ on those portions of S where the solutions of (1) cross into R , then throughout $R - P_1 - \dots - P_n$, $v(x, y, \varepsilon) \equiv U(x, y) -$

$u(x, y, \varepsilon)$ approaches zero as $\varepsilon \rightarrow +0$ except possibly at characteristics of (1) which are somewhere tangent to S . Use is made of the work of N. Levinson (cf. this Zbl. 36, 68).

M. Nedelcu.

Barancev (Barantsev), R. G.: A mixed problem for equation $\psi_{\sigma\sigma} - K(\sigma) \psi_{\theta\theta} = 0$ with Cauchy data given on curve $\theta = s(\sigma)$. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 919—922 (1957) [Russisch].

In una precedente Nota (v. questo Zbl. 78, 85) l'A. ha trattato il seguente problema: data l'equazione $(') \psi_{\sigma\sigma} - K(\sigma) \psi_{\theta\theta} = 0$ nella regione iperbolica ($K(\sigma) > 0$), con $K(\sigma) \in C^{(2)}$, sia \widehat{AB} un arco di caratteristica di estremi $A = (\sigma_0, \theta_0)$, $B = (\sigma_1, \theta_1)$, $\sigma_0 < \sigma_1$. Assegnata la funzione $\bar{\psi}(\sigma)$ nell'intervallo (σ_0, σ_1) si ricercano soluzioni della $(')$ definite nella striscia $S: \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, -\infty < \theta < +\infty$, e soddisfacenti le condizioni ai limiti $\psi|_{\widehat{AB}} = \bar{\psi}(\sigma)$, $\psi|_{\sigma=\sigma_0} = \bar{\psi}(\sigma_0)$, $\psi|_{\sigma=\sigma_1} = \bar{\psi}(\sigma_1)$. Con gli stessi metodi l'A. tratta nel presente lavoro il caso in cui \widehat{AB} sia un arco di curva non caratteristica portante i dati di Cauchy e perviene alla costruzione effettiva, sotto forma di serie, della soluzione in ipotesi di sufficiente regolarità dei dati e dell'arco \widehat{AB} .

R. Conti.

Barancev (Barantsev), R. G.: Two expansion theorems connected with boundary problems for the equation $\psi_{\sigma\sigma} - K(\sigma) \psi_{\theta\theta} = 0$. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 551—554 (1958) [Russisch].

L'A. estende i metodi usati nel lavoro sopra recensito al caso in cui anziché le condizioni $\psi|_{\sigma=\sigma_0} = \bar{\psi}(\sigma_0)$, $\psi|_{\sigma=\sigma_1} = \bar{\psi}(\sigma_1)$ si impongano le condizioni $a_0 \psi|_{\sigma=\sigma_0} + b_0 \psi_{\sigma}|_{\sigma=\sigma_0} = 0$, $a_1 \psi|_{\sigma=\sigma_1} + b_1 \psi_{\sigma}|_{\sigma=\sigma_1} = 0$ con a_0, b_0, a_1, b_1 costanti, $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$.

R. Conti.

Drapkin, A. B.: Asymptotic expressions for eigenvalues and characteristic functions of a class of elliptical systems. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 465—467 (1957) [Russisch].

Verf. gibt klassische asymptotische Ausdrücke für elliptische Operatorensysteme zweiter Ordnung an. [Bemerkung des Ref.: Dem Verf. waren offenbar viel allgemeinere Ergebnisse von Gårding (vgl. dies. Zbl. 58, 88) unbekannt. In diesem Zusammenhang vgl. die neue Untersuchung von Bergendal in Math. Scand. 5, 241—254 (1958)].

K. Maurin.

Biernacki, Miéclislas: Sur la position des extrêmes relatifs de certaines fonctions composées par des fonctions surharmoniques ou sousharmoniques. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 7—11 (1958).

Sei w eine in einem Gebiete G des R_n definierte stetige reellwertige Funktion, welche eine Produktzerlegung der Form

$$w = e^g h_1 h_2 \cdots h_s$$

zuläßt, wobei die Funktionen g, h_1, h_2, \dots, h_s in G stetig, g daselbst superharmonisch, h_1, h_2, \dots, h_s je entweder positiv und superharmonisch oder negativ und subharmonisch sein sollen. Dann besitzt w im Innern von G weder ein positives relatives Maximum, noch ein negatives relatives Minimum, es sei denn eine Konstante. — Es werden Anwendungen auf harmonische und analytische Funktionen erwähnt. Schließlich verallgemeinert Verf. den Satz, indem er die Sub- und Superharmonizität durch die Bedingung ersetzt, daß die betreffenden (in diesem Fall als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzten) Funktionen gewisse elliptische Differentialungleichungen zweiter Ordnung erfüllen sollen.

A. Huber.

Yamasuge, Hiroshi: Harmonic functions with two singular points. II. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A. 8, 181—183 (1957).

(Pour la première partie voir ce Zbl. 77, 98.) — Sur un espace de Riemann compact M , de dimension n , on considère les fonctions φ harmoniques sur $M - \xi_1 - \xi_2$, où $\xi_1, \xi_2, \xi_1 \neq \xi_2$, sont deux points donnés. Si l'on impose à φ les limitations: $|\varphi| = O[r^{2-n}(x, \xi_i)]$, $i = 1, 2$, au voisinage des deux points, alors φ est nécessaire-

ment de la forme $\varphi = a\varphi_0 + b$ où a et b sont des constantes, et l'on a au voisinage des ξ_i $\varphi = r^{2-n}(x, \xi_i) \cdot u + \log r(x, \xi_i) \cdot v + w$, u, v, w étant analytiques aussi en ξ_i . Si $n = 2$, on a plus simplement $\varphi = u \log r(x, \xi_i) + v$. P. Lelong.

Tjapkin (Tyapkin), K. F.: On classifying anomalies of potential fields. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1958, 407—409, russ. und engl. Zusammenfassg. 409—410 (1958) [Ukrainisch].

In this paper a new method is proposed for classifying potential fields into plane and spatial ones by applying known solutions of the potential theory boundary problems. A field is to be assumed plane in case the values of its intensity components calculated by the formulae for plane and spatial problems are equal within the available limits of accuracy. If not, the field should be considered spatial. Engl. Zusammenfassg.

Topoljanskij (Topolyansky), D. B.: On the upper and lower functions of Chaplygin in some boundary problems. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1958, 361—363, russ. und engl. Zusammenfassg. 363 (1958) [Ukrainisch].

It is shown that the lower function of Chaplygin is an expansion of one class of subharmonic functions. Chaplygin's results apply to the boundary problem with mixed conditions. The properties of one class of sub-biharmonic functions and lower functions of Chaplygin are considered in connection with the biharmonic problem of Mathieu-Lauricella and Mathieu-Riquier.

Engl. Zusammenfassg.

Amanov, I. I.: On the solution of the biharmonic problem. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 727—730 (1957) [Russisch].

Let u be a real biharmonic function defined in the unit circle σ for which $|u|_m^2 = \int_{\sigma} \sum (D_x^\alpha D_y^\beta u)^2 dx dy$, $(\alpha + \beta \leq m)$, is finite. Extending earlier work for $m = 2$ (Amanov, this Zbl. 50, 324), the author studies the boundary values $v = u$ and $w = du/dr$ on the unit circle. Roughly speaking, they have square integrable derivatives of orders $m - \frac{1}{2}$ and $m - \frac{5}{2}$ respectively. Conversely, any v and w which satisfy slightly stronger conditions are boundary values of some biharmonic u with $|u|_m < \infty$.

L. Gårding.

Payne, L. E.: Multivalued functions in generalized axially symmetric potential theory. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 10, 135—145 (1957).

L'A. considère dans le demi-plan $y > 0$ la fonction de Neumann (dite potentiel d'une source en anneau) de l'équation

$$\partial(y^p \partial u / \partial x) / \partial x + \partial(y^p \partial u / \partial y) / \partial y = 0, \quad p > 0.$$

On sait d'après Weinstein que la conjuguée (fonction de courant) n'est pas uniforme. L'A. le met en évidence par une nouvelle expression analytique, au moyen d'une surface de Riemann qui ramène l'uniformité et d'une somme de deux termes respectivement uniforme (s'annulant au pôle) et non uniforme (en arc cotg). D'autres questions analogues de source, liées à la précédente, sont étudiées de façon similaire.

M. Brelot.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Mysovskich (Mysovskikh), I. P.: Computation of the eigenvalues of integral equations by means of iterated kernels. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 45—48 (1957) [Russisch].

Die bekannte Methode, für einen reellen, symmetrischen, positiven und stetigen Kern $K(s, t)$ beiderseitige Schranken für den kleinsten Eigenwert mit Hilfe der Spuren seiner iterierten Kerne $K_m(s, t)$ zu bestimmen, die das Ergebnis $\sqrt[m]{p_1/k_m} < \lambda_1 < \frac{k_{m-1}}{k_m}$ liefert ($k_m = \int_a^b K_m(s, s) ds$, $m = 1, 2, \dots$; p_1 sei die zunächst unbekannte Vielfachheit von λ_1), wird verfeinert. Es gelingt, die obere Schranke, die gröber ist als die untere, herunterzudrücken. Als Ausgangspunkt dient die Tatsache, daß λ_1 Wurzel der Gleichung $f(\lambda) = a_1 + a_2 \lambda + a_3 \lambda^2 + \dots = 0$ ist, deren Koeffizienten

durch die Rekursionsformeln $k_1 a_1 = -1$, $k_1 a_2 + k_2 a_1 = 0$, $k_1 a_3 + k_2 a_2 + k_3 a_1 = 0$ usw. bestimmt sind. Für $m \geq 3$ findet Verf. als genauere obere Schranke den Wert $\lambda^{(m)} < k_{m-1}/k_m$, der die kleinste positive Wurzel der abgeänderten Gleichung $S_m(\lambda) = a_1 + a_2 \lambda + \dots + a_{m-2} \lambda^{m-3} + [\lambda^{m-2} a_{m-1}^2 / (a_{m-1} - \lambda a_m)] = 0$ ($f(\lambda) > S_m(\lambda)$) darstellt und somit etwa durch die Newtonsche Methode berechnet werden kann. p_1 erhält man aus der näherungsweise geltenden Beziehung $1/p_1 = S'_m(k_{m-1}/k_m)$. — Für $m = 2$ versagt die Methode. In diesem Fall wird unter der Voraussetzung, daß $k_2/k_1^2 > \frac{1}{2}$ ausfällt, auf ähnliche Weise die genauere obere Schranke $\lambda^{(2)*} = 2k_2/k_1(3k_2 - k_1^2)$ ermittelt. Wenn λ_1 ein einfacher Eigenwert ist ($p_1 = 1$), ist die erwähnte Voraussetzung für einen iterierten Kern $K_r(s, t)$ genügend hoher Ordnung r als Ausgangskern erfüllt, weil k_{2r}/k_r^2 nahezu gleich $1/p_1$ ist (wodurch man auch p_1 bestimmen kann). Somit gilt in diesem Fall für λ_1^r die Abschätzung $\sqrt{p_1/k_{2r}} < \lambda_1^r < 2k_{2r}/k_r(3k_{2r} - k_r^2)$. Auch für den allgemeinen Fall wird eine (kompliziertere) nur von den Werten p_1, k_r und k_{2r} abhängige genauere Abschätzung für λ_1^r angegeben. — An einem zahlenmäßig durchgeführten Beispiel wird gezeigt, daß durch die Verwendung der verfeinerten Methode unter Umständen die Genauigkeit der angenäherten Berechnung von λ_1 um zwei Zehnerpotenzen erhöht wird. *E. Svenson.*

Sachnovič (Sakhnovich), L. A.: The spectral analysis of Volterra operators and some inverse problems. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 666—669 (1957) [Russisch].

In der Arbeit wird folgender Satz bewiesen: Wenn der Kern $K(x, t)$ des Operators K

$$Kf = \int_0^x f(t) K(x, t) dt, \quad f(x) \in L^2[0, l],$$

den folgenden Bedingungen entspricht: 1. Es existieren beschränkte Derivationen

$$\frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial t^k} K(x, t) \quad (j, k = 0, 1, 2), \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, t) \Big|_{t=x} \right] \quad (x \geq t);$$

$$2. \quad K(x, x) \equiv 0; \quad 3. \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) \Big|_{t=x} \right| > 0,$$

dann ist der Operator K linear äquivalent dem Operator J^2 :

$$J^2 f = \int_0^x f(t) (x-t) dt, \quad f(t) \in L^2[0, l].$$

Verf. wendet den Satz an beim Beweise der Eindeutigkeitssätze für Systeme von Differentialgleichungen. *M. Greguš.*

Case, K. M.: On Wiener-Hopf equations. Ann. of Phys. 2, 384—405 (1957).

Verf. verallgemeinert eine von V. Ambarzumian und S. Chandrasekhar angegebene Methode, so daß sie auf Integralgleichungen vom Wiener-Hopf'schen Typus anwendbar wird. Es handelt sich dabei um die allgemeine lineare Integralgleichung

$$(1) \quad \varrho(z) - \int_0^\infty K(z-z') \varrho(z') dz' = q(z),$$

in welcher der Kern K für $|z| \rightarrow \infty$ exponentiell gegen Null strebt. Verf. geht bei seinen Untersuchungen von der speziellen Integralgleichung

$$(2) \quad \varrho(z; p_0, z_0) - \int_{z_0}^\infty K(z-z') \varrho(z') dz' = S(z-z_0) e^{p_0(z-z_0)}$$

aus mit $\operatorname{Re} p_0 < 0$, $S(z) = 1$, wenn $z > 0$, $S(z) = 0$, wenn $z < 0$. Die Auflösung dieser speziellen Integralgleichung ermöglicht die einer umfassenden Klasse von Gleichungen (1). (2) wird nach Paley-Wiener in eine Integralgleichung mit den Grenzen $-\infty$ bis $+\infty$ umgeschrieben und eine weitere von gleichem Typus

mit $\hat{\varrho}$, p_1 , z_1 und dem Kern $K(z' - z)$ hinzugefügt. Es wird nach Lösungen dieser Gleichungen gesucht, die für $z \rightarrow \infty$ beschränkt sind. Bei symmetrischem Kern K kann die zu ϱ gehörende Laplace-Transformierte Φ durch

$$\Phi(p_1, p_0) = -H(p_1)H(p_0)/(p_1 + p_0)$$

dargestellt werden, wobei $H(p)$ der Integralgleichung

$$H(p) = 1 - \frac{H(p)}{2\pi i} \int_C \kappa(p') \frac{H(p')}{p+p'} dp' \quad \text{mit} \quad \kappa(p) = \int_{-\infty}^{\infty} K(z) e^{pz} dz$$

genügt. — Im folgenden Abschnitt werden die Eigenschaften von $H(p)$ untersucht, wobei die beiden Fälle $\kappa(0) \neq 1$ und $\kappa(0) = 1$ zu unterscheiden sind. Im ersten Fall kann $H(p)$ durch eine Potenzreihe in p dargestellt werden, im zweiten besitzt $H(p)$ im Nullpunkt einen Pol erster Ordnung. Es wird dann die Verbindung zur Wiener-Hopfschen Theorie hergestellt, die Faktorzerlegung von $1 - \kappa(p)$ führt auf die folgende Darstellung von $H(p)$:

$$H(p) = \sigma_-(p) Q_n(p) / \prod_{i=1}^n (p - p_i)(p + p_i),$$

Q_n Polynom vom Grade n . Bei der Untersuchung der Eigenschaften von $H(p)$ werden die folgenden drei Fälle unterschieden: 1. es liegen keine Nullstellen auf der imaginären Achse, 2. Null ist die einzige Nullstelle auf der imaginären Achse, 3. es gibt Nullstellen, die auf der imaginären Achse liegen. Für alle diese Fälle wird das Verhalten der analytischen Funktion $H(p)$ untersucht. Die entwickelten Methoden werden an den folgenden Beispielen erläutert: a) $K(z) = \lambda e^{-z}$ (Lalesco-Kern), b) $K(z) =$

$\frac{c}{2} \int_{|z|}^{\infty} e^{-y} \frac{dy}{y}$ (Milne-Kern), c) $K(z) = \frac{\beta^2}{\pi} K_0(z)$, wo $K_0(z)$ die Besselsche Funktion

vom Index Null mit imaginärem Argument ist. Verf. legt dann dar, daß es zur Gewinnung numerischer Ergebnisse vorteilhaft ist, die Zerlegung in Linearfaktoren durch die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung für $H(p)$ zu ersetzen. Schließlich wird in den beiden letzten Abschnitten die vollständige Auflösung der Integralgleichung (1) vorgeführt, zuerst für die homogene, dann für die inhomogene Integralgleichung, wobei die Lösung durch Umkehrung der Laplaceschen Transformation gewonnen wird. W. Quade.

Roseau, Maurice: Sur une équation intégrale de la théorie de la diffraction des ondes élastiques. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 2013—2014 (1957).

An integral equation of the Wiener-Hopf type

$$i\tau \cos \varphi \exp(i\tau x \cos \varphi) + \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (G_2 - G_1) + \sigma^2 G_2 \right] f(x') dx' = 0, \quad x > 0$$

where $G_1 = \frac{1}{4} i H_0^1(\tau|x - x'|)$, $G_2 = \frac{1}{4} i H_0^1(\sigma|x - x'|)$, $\text{Im}(\sigma, \tau) > 0$ occurring in a problem of the diffraction of elastic waves is considered. The unknown function $f(x)$ defined for $x > 0$ is extended into $x < 0$ putting $f(x) = 0$. The Fourier transform of $f(x)$ is given in the form of an integral expression which allows to show that $f(x)$ is zero for $x < 0$, behaves like $x^{-1/2}$ for $x > 0$ near zero and behaves like $e^{-\eta x}$ ($\eta > 0$) for large x and is continuous for positive x . F. Oberhettinger.

Corput, J. G. van der: On a limit theorem in the theory of the Laplace transformation. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 1—4 (1958).

In dem Tauberschen Satz funktionentheoretischer Art für die Laplace-Transformation [G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (dies. Zbl. **18**, 129), S. 216—222] kann die Voraussetzung, daß $F(t)$ monoton zunehmend ist, ersetzt werden durch die folgende: Zu jedem $\varepsilon > 0$ soll es ein $\delta > 0$ geben derart, daß für je zwei Zahlen t und t' mit $t \leq t' \leq t + \delta$ gilt: $F(t) \leq (1 + \varepsilon)F(t')$.

G. Doetsch.

Buschman, R. G.: A substitution theorem for the Laplace transformation and its generalization to transformations with symmetric kernel. *Pacific J. Math.* 7, 1529—1533 (1957).

Wenn $f(s)$ die Laplace-Transformierte von $F(t)$ ist, so fragt es sich, wie man aus $f(s)$ die Laplace-Transformierte von $F(g(t))$ finden kann. Verf. zeigt, daß unter gewissen Bedingungen zu $k(t) F(g(t))$ die Laplace-Transformierte $\int_0^\infty \Phi(s, u) f(u) du$ gehört, wo $\Phi(\alpha, t)$ die Originalfunktion zu $\varphi(\alpha, s) = e^{-\alpha h(s)} k(h(s)) |h'(s)|$ und h die inverse Funktion zu g ist. Die Beziehung wird auf allgemeinere Transformationen $f(s) = \int_a^b K(s, t) F(t) dt$ mit symmetrischem Kern erweitert. *G. Doetsch.*

Kupev, N. P.: Zur Frage der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Fourierintegrale. *Mat. Sbornik, n. Ser.* 42 (84), 461—478 (1957) [Russisch].

Let q be real and locally square integrable for $x \geq 0$ and let T be a Fourier transform associated with the operator $L = -(d/dx)^2 + q(x)$ and the boundary condition $u(0) \cos \alpha - u'(0) \sin \alpha = 0$. If φ satisfies $L\varphi = \lambda\varphi$ and $\varphi(0, \lambda) = -\sin \alpha$, $\varphi'(0, \lambda) = \cos \alpha$, then $Tf(\lambda) = \int \varphi(\lambda, x) f(x) dx$, T maps $L^2(0, \infty)$ isometrically onto all functions F which are square integrable with respect to a measure $d\sigma(\lambda)$ and T has the inverse (1) $T^{-1}F(\lambda) = \int \varphi(\lambda, x) F(\lambda) d\sigma(\lambda)$. By virtue of results by Levitan (see this Zbl. 67, 312) and Marčenko (s. this. Zbl. 66, 66), the study of the uniform convergence of (1) reduces to the uniform convergence of the inverse cosine transform. The author gives criteria for the local and global uniform and absolute convergence of (1) with $F = Tf$, the first of which involves only a condition on f . *L. Gårding.*

Zemanian, Armen H.: Bounds on the Fourier transforms of monotonic functions. *Duke math. J.* 24, 499—504 (1957).

Let Φ be the class of real decreasing functions $\Phi(t)$ on $(0, \infty)$ satisfying the conditions $\int_0^\infty \Phi(t) dt = 1$ and $\Phi(0) = 1$. Let

$$f(x) = \int_0^\infty \Phi(t) \cos xt dt, \quad g(x) = \int_0^\infty \Phi(t) \sin xt dt \quad \text{and} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

In a previous paper [*Proc. Radio Inst. Engineers* 43, 322—326 (1955)], the author has obtained best possible bounds for $F(x)$ as Φ varies over the class Φ . In this paper the author obtains similar best possible bounds for f and g . The results for f are as follows where x_1 is the root of $x = \tan x$ in the range $(\pi/2, 3\pi/2)$:

$$f(x) \leq \sin x/x \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ and } \leq 1/x \text{ for } x \geq \pi/2.$$

$$f(x) \geq \sin x_1/x_1 \quad \text{for } 0 < x \leq x_1, \quad f(x) \geq \sin x/x \quad \text{for } x_1 \leq x \leq 3\pi/2$$

and

$$f(x) > -1/x \quad \text{for } x \geq 3\pi/2.$$

The results for g are as follows: $g(x) \geq 0$ for $x \geq 0$ (already a well known result). $g(x) \leq (1 - \cos x_2)/x_2$ for $0 < x \leq x_2$, $g(x) \leq (1 - \cos x)/x$ for $x_2 \leq x \leq \pi$ and $g(x) \leq 2/x$ for $x \geq \pi$ where x_2 is the root of $x \sin x = 1 - \cos x$ in the range $(\pi/2, \pi)$. *V. Ganapathy Iyer.*

Branges, Louis de: Local operators on Fourier transforms. *Duke math. J.* 25, 143—153 (1958).

Wenn $f(x) = \int e^{ixt} F(t) dt$ absolut konvergiert, so ist $f'(x) = \int e^{ixt} i t F(t) dt$, wenn dieses Integral absolut konvergiert. Unter Weglassung des Faktors i wird daher die Differentiation für solche $f(x)$ als Operator so definiert: Eine absolut konvergente Fourier-Transformierte $f(x) = \int e^{ixt} F(t) dt$ gehört zum Bereich von H und hat das Bild $Hf(x) = g(x)$, wenn $g(x) = \int e^{ixt} t F(t) dt$ absolut konvergiert.

Nun läßt sich für eine meßbare komplexwertige Funktion $K(x)$ der Operator $K(H)$ so definieren: Eine absolut konvergente Fourier-Transformierte $f(x)$ gehört zum Bereich von $K(H)$ und ihr Bild ist $K(H)f(x) = g(x)$, wenn $g(x) = \int e^{ixt} K(t) F(t) dt$ absolut konvergiert. — $Hf(x)$ hängt als Ableitung nur lokal von $f(x)$ ab. Der allgemeine Operator $K(H)$ wird lokal genannt, wenn für zwei Funktionen f_1 und f_2 , die in einer Umgebung eines Punktes x_0 übereinstimmen, auch die Bilder $K(H)f_1$ und $K(H)f_2$ in x_0 übereinstimmen. Satz: Eine hinreichende Bedingung dafür, daß $K(H)$ lokal ist, besteht darin, daß $K(x)$ mit einer ganzen Funktion von minimalem Exponentialtypus für fast alle reellen x übereinstimmt. Wenn zu dem Bereich von $K(H)$ eine Funktion gehört, die in einem Intervall verschwindet, ohne identisch zu verschwinden, so ist die Bedingung auch notwendig. G. Doetsch.

Herz, Carl S.: A note on summability methods and spectral analysis. Trans. Amer. math. Soc. **86**, 506—510 (1957).

Let $\varphi \in L^\infty$ on $(-\infty, \infty)$. $\Lambda(\varphi)$, the „spectrum“ of φ , is defined as the set of those points t on the real line for which $\int \exp(-itx) f(x) dx = 0$ holds for all $f \in L^1$ such that $\int f(y) \varphi(x-y) dy \equiv 0$. Following investigations of Beurling (s. this Zbl. **29**, 46) and Pollard (s. this Zbl. **51**, 83), the set $\Lambda(\varphi)$ will be characterized by the property that, for $t \notin \Lambda(\varphi)$, the integral $\int \exp(isx) \varphi(x) dx$ is summable, in some sense, to 0 in a neighborhood of t . (Beurling has treated Abel summability, while Pollard ($R, 2$)-summability.) Now a large class of summability methods is considered, namely all those which are generated by a „spectral kernel“, i. e. a

function $k \in L^1$ such that $k(0) = 1$, $k(-x) = k(x)$, $k(x) = \int_x^\infty k'(y) dy$ for $x \geq 0$,

where $k' \in L^1$. Putting $\Phi_h(t) = \int \exp(-itx) k(hx) \varphi(x) dx$, the limit of $\Phi_h(t)$ for $h \rightarrow 0$ gives a regular summation method. — We quote the following typical results of the paper: (i) For $t \notin \Lambda(\varphi)$ we have $\Phi_h(t) \rightarrow 0$, uniformly in any closed set at positive distance from $\Lambda(\varphi)$. (ii) If, for some $\varepsilon > 0$, $\liminf_{t \rightarrow \varepsilon} |\Phi_h(s)| ds = 0$, then $t \notin \Lambda(\varphi)$. (iii) Let k have the additional property that, for any $\varphi \in L^\infty$, $\Phi_h(t) \rightarrow 0$ everywhere implies $\varphi = 0$ almost everywhere. Then, if for some $\varphi \in L^\infty$, $\Phi_h(s) \rightarrow 0$ in a neighborhood of the point t , we have $t \notin \Lambda(\varphi)$. B. Sz. Nagy.

Džrbašjan, M. M.: Über eine Integraltransformation. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk **10**, Nr. 4, 3—18 (1957) [Russisch].

Es werden Integraltransformationen untersucht, deren Kern die Lösung $\Phi(x, \lambda)$ des nicht selbstadjungierten Problems $y'' - i2a_0\lambda y' + \lambda^2 y = 0$, $a_0 > 0$ und $y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$ (α reell und willkürlich) ist, mit dem Grundgebiet $(0, +\infty)$. Ist $f(x) \in L_1(0, \infty)$, in $(0, \infty)$ stetig und in jedem Abschnitt (δ, R) ($0 < \delta < R$) von beschränkter Schwankung, so ist die Umkehrung von $F(\lambda) = \int_0^\infty f(x) e^{-i2a_0\lambda x} \Phi(x, \lambda) dx$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1+a_0^2}} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F(\lambda) \Phi(x, \lambda) \lambda^2 d\lambda}{\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + i a_0 \lambda \sin 2\alpha}$$

für $\cotg \alpha \leq 0$, und durch

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1+a_0^2}} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F(\lambda) \Phi(x, \lambda) \lambda^2 d\lambda}{\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + i a_0 \lambda \sin 2\alpha} \\ + \frac{\cotg \alpha}{\sin \alpha \sqrt{1+a_0^2}} \{ \omega_1^2 F(-i \omega_1 \cotg \alpha) + \omega_2^2 F(i \omega_2 \cotg \alpha) \} e^{-x \cotg \alpha}$$

für $\cotg \alpha > 0$, $\omega_{1,2} = \sqrt{1+a_0^2} \pm a_0$. Dieser Satz kann auf Funktionen der Klasse $L_2(0, \infty)$ erweitert werden und stellt dann eine Verallgemeinerung eines bekannten

Plancherelschen Resultates über die Transformation mit dem Kern $\Phi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \vartheta \sin \sqrt{\lambda} x / \sqrt{\lambda}$, d. h. der Lösung von $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = \vartheta y(0)$ mit ϑ reell, dar. F. Selig.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Pettis, B. J.: On a vector space construction by Hausdorff. Proc. Amer. math. Soc. 8, 611—616 (1957).

Im n -dimensionalen, reellen, euklidischen Vektorraum E^n wird eine Untergruppe konstruiert, in welcher mehrere pathologische Eigenschaften kombiniert sind, die bisher nur getrennt bekannt waren. G. Nöbeling.

Deprit, André: Une propriété des homomorphismes d'espaces de Fréchet. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 834—837 (1957).

Let E and F be Fréchet spaces, and let u and v be continuous linear transformations of E into F . Suppose that the range of u is closed and that the range of v is finite-dimensional. Then the range of $u + v$ is closed. J. D. Weston.

Kawai, Itizo: Locally convex lattices. J. math. Soc. Japan. 9, 281—314 (1957).

Verf. untersucht als Verallgemeinerung normierter Vektorverbände lokal konvexe Verbände; d. h. Vektorverbände über den reellen Zahlen, die gleichzeitig lokal konvexe Hausdorff-Räume sind und in denen aus $(x_\lambda) \rightarrow 0$ und $|x_\lambda| \geq |y_\lambda|$ auch $(y_\lambda) \rightarrow 0$ folgt. Die Topologie eines lokal konvexen Verbandes kann durch eine Familie von Halbnormen beschrieben werden. Ein topologischer Vektorverband ist genau dann lokal konvex, wenn er zu einem Unter-Vektorverband eines Produkts normierter Vektorverbände (topologisch und algebraisch) isomorph ist. Jeder lokal konvexe Verband E ist isomorph zu einem dichten Unter-Vektorverband eines projektiven Limes von Banachverbänden, der gleichzeitig die Vervollständigung von E ist. Es werden konjugierte und duale Räume sowie die Vervollständigung lokal konvexer Verbände untersucht. Eingehend werden zum Schluß diejenigen lokal konvexen Verbände behandelt, die gleichzeitig LF -Räume sind.

H.-J. Kowalsky.

Rajkov (Raikov), D. A.: Inductive and projective limits with completely continuous mappings. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 984—986 (1957) [Russisch].

L'A. énonce des propriétés de permanence des espaces (M^*) et (LN^*) définis par Sebastião e Silva (ce Zbl. 64, 358). Ces catégories se conservent par passage à un sous-espace fermé et à l'espace quotient, la limite inductive de (LN^*) est un (LN^*) , la limite projective de (M^*) est un (M^*) . La dualité forte établie par Sebastião e Silva s'étend aux sous-espaces et aux espaces quotients. L'A. définit aussi une catégorie (c) d'espaces localement convexes, dont la propriété essentielle est la suivante: toute application linéaire continue d'un (LN^*) sur un (c) est ouverte. Certaines propriétés sont étendues aussi aux limites inductives, resp. projectives définies par des familles dirigées non dénombrables. G. Marinescu.

Ślowski, W.: On a certain subclass of (DF) linear locally convex spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 387—388 (1957).

Die von A. Grothendieck eingeführte Definition der (DF) -Räume benutzt den starken Dualraum. Verf. betrachtet eine Unterklasse der (DF) -Räume mit analogen Eigenschaften hinsichtlich des vom Verf. eingeführten stärksten Dualraumes (dies. Zbl. 77, 308). Der lokal konvexe Raum X heißt ein (DB_0) -Raum, wenn er bornologisch ist und wenn es eine Folge (X_n) von Banachräumen mit folgenden Eigenschaften gibt: X_n ist ein linearer Unterraum von X , und die Injektionsabbildung von X_n ist stetig. Jede beschränkte Teilmenge von X ist in mindestens einem X_n beschränkt. Dann gilt: Jeder (DB_0) -Raum ist ein tonnelierter (DF) -Raum. Der stärkste und der starke Dualraum eines (DB_0) -Raumes sind identisch, und beide sind lokal konvexe, vollständige, metrisierbare Räume. Der stärkste

Dualraum eines metrisierbaren lokal konvexen Raumes ist ein (DB_0) -Raum. Die lokal konvexen, vollständigen, metrisierbaren Räume und die (DB_0) -Räume liegen in einer Klasse K lokal konvexer Räume, die folgende Eigenschaft besitzt: Jede stetige lineare 1-1-Abbildung eines Raumes $X \in K$ auf einen Raum $Y \in K$ ist topologisch.

H.-J. Kowalsky.

Browder, Felix E.: Non-linear functional equations in locally convex spaces.
Duke math. J. **24**, 579—589 (1957).

Topological methods (fixed point theorem and degree of mapping) have been successfully applied to obtain existence theorems in the case of non linear functional equations. However the question of uniqueness remains open in most cases. In this short but very important paper the author gives precise and simple proofs of uniqueness and multiplicity theorems for functional equations. These proofs utilize the theory of the degree of a mapping developed by Leray-Schauder and recently generalized by M. Nagumo (see this Zbl. **43**, 178). They utilize also two important notions due to the author: that of regular completely continuous mapping (denoted here c. c. m.) and that of a permissible family of mappings. If G is an open, convex, symmetric set in X , a Hausdorff vector space; if C is a mapping of \bar{G} (closure of G) into Y , another Hausdorff vector space, C is said to be a G -c. c. m. if $C(G) \subset K$, K : a compact and convex set of Y . It is called regularly G -c. c. m. (a) either if K is contained in a metrisable subspace of Y , (b) or if K and a point not in K generate a linear subspace of Y in which K is an absolute retract, (π) or if $X = Y$ and C is constant on the cosets modulo N_G of X . ($N_G = p_G^{-1}(0)$, where p_G is the semi norm defined by G in the usual manner). C must also induce a continuous mapping (continuous in the sense of the p_G norm) of X/N_G onto itself. If A and B are Hausdorff spaces, f a mapping of A into B , f is said to be a covering mapping (see Browder, this Zbl. **56**, 166) if it is onto and if for each $b \in B$ there is a neighbourhood N of b such that f is a homeomorphism of each component of $f^{-1}(N)$ onto N . The definition of a permissible parametrized family of mappings on a locally convex vector space X is too complicated to be completely explained in this review. Suffice it to say that it is a family of mappings of X into a similar space Y depending on a parameter $t \in (0, 1)$ and of the form $T_t = H_t + C_t$, where H_t is a homeomorphism and $C_t H_t^{-1}$ a (π) -regular c. c. m. of a neighbourhood V of $0 \in Y$, uniformly continuous in (y, t) ; T_t is locally one-to-one and for each t and each $x_0 \in X$ there is a neighbourhood of x_0 in which the equation $T_t(x) = 0$ has only one solution at the most. Three groups of theorems are proved by the author. The first one deals with conditions for a mapping to be domain preserving. The author's theorems are all easily deduced from the first: a mapping T of a locally convex vector space X into itself is domain preserving with respect to an open convex set G if it is of the form $I + C$, I : the identity mapping and C an (a)-regularly c. c. m. Further if U is open, convex and symmetric and C a (π) -regularly c. c. m. inducing a continuous mapping on the cosets modulo N_U , $I + C$ will be domain preserving. The generalization to mappings of a locally convex vector space into another is quite straightforward. In the second group there is only one theorem: let T_t , $t \in (0, 1)$ be a permissible family of mappings and $T_0(x) = 0$ have exactly m solutions. Then there exist m continuous and disjoint curves containing all the solutions of $T_t(x) = 0$. The last group consists of a fundamental theorem and several of its generalizations. The basic proposition runs as follows: Let X and Y be locally convex vector spaces and T a continuous mapping of X into Y . The distinction between regular points (forming a set R) and the others (branching points forming a set B) is well known. Set $M = T(R) - T(B)$ and assume that M is not empty, that $Y - T(B)$ is connected and that T is a closed mapping. Then T is a covering mapping of $T^{-1}(M)$ onto $Y - T(B)$ and the

number of solutions in R of the equation $T(x) = y$ is the same for all $y \in Y - T(B)$.
C. Racine.

Nakano, Hidegorô: An extension theorem. Proc. Japan Acad. **33**, 603—604 (1957).

Für den bekannten Satz, daß eine konvexe abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes schwach abgeschlossen ist, wird ein Beweis gegeben, der einen Fortsetzungssatz aus der Theorie der modularen Räume des Verf. benützt.

G. Köthe.

Andô, Tsuyoshi: On the continuity of norms. Proc. Japan Acad. **33**, 429—434 (1957).

R sei im folgenden ein universal stetiger (d. h. mit $a_\lambda \geq 0$ ist stets $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ in R) normierter halbgeordneter linearer Raum. Eine Norm auf R heißt stetig, wenn aus $a_k \downarrow_{k=1}^\infty 0$ stets $\inf_k \|a_k\| = 0$ folgt. Es wird eine Reihe hinreichender Bedingungen für die Stetigkeit einer Norm auf R angegeben, u. a. die folgenden: a) Jedes Segment von R (Menge aller x mit $a \leq x \leq b$, $a, b \in R$) ist vollständig und separabel; b) jedes Segment ist vollständig und die Norm ist gleichmäßig monoton (d. h. es gibt ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß aus $a \wedge b = 0$, $\|a\| = 1$, $\|b\| \geq \varepsilon$ folgt $\|a + b\| \geq 1 + \delta$); c) jedes Segment ist vollständig und die Norm ist lokal gleichmäßig stetig; d) jedes Segment ist vollständig und für die Norm gilt: zu $a, b \in R$ mit $\|a\| = \|b\| = 1$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(a, b, \varepsilon)$ mit $\|a + \xi b\| + \|a - \xi b\| \leq 2 + \xi \varepsilon$ für $0 \leq \xi \leq \delta$.

G. Köthe.

Yamamuro, Sadayuki: Monotone completeness of normed semi-ordered linear spaces. Pacific J. Math. **7**, 1715—1725 (1957).

R sei im folgenden ein stetiger (d. h. mit $x_k \geq 0$ liegt stets $\bigcap_{k=1}^\infty x_k$ in R) normierter halbgeordneter Raum (Halbordnung und Norm sind durch $|x| \leq |y| \Leftrightarrow \|x\| \leq \|y\|$ verknüpft). Eine Norm auf R heißt monoton vollständig, wenn aus $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$ und $\sup \|x_\nu\| < \infty$ die Existenz von $\bigcup_{\nu=1}^\infty x_\nu$ folgt. Eine Norm heißt stetig, wenn aus $x_\nu \downarrow_{\nu=1}^\infty 0$ stets $\lim \|x_\nu\| = 0$ folgt. Es wird bewiesen, daß eine Norm auf R dann und nur dann monoton vollständig ist, wenn sie vollständig ist im üblichen Sinn und wenn R K -beschränkt ist, d. h. wenn zu jeder (im Sinne der Halbordnung) nichtbeschränkten Folge $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$ eine Folge reeller Zahlen $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots$ mit $\lim \xi_\nu = 0$ existiert, so daß auch die Folge $\xi_\nu x_\nu$ nicht beschränkt ist. Ein universal stetiger halbgeordneter Raum, auf dem im Sinn von Nakano (Modulared Semiordered Linear Spaces, dies. Zbl. **41**, 234) ein Modular $m(x)$ erklärt ist, heißt ein Nakanoraum. Auf jedem Nakanoraum ist eine Norm $\|x\| = \inf 1/|\xi|$ erklärt, wobei das Infimum über alle $\xi > 0$ mit $m(\xi x) \leq 1$ zu bilden ist. Der Modular $m(x)$ heißt einfach, wenn aus $m(x) = 0$ stets $x = 0$ folgt, gleichmäßig einfach, wenn $\inf_{x \neq 0} m\left(\xi \frac{x}{\|x\|}\right) > 0$ ist für alle $\xi > 0$. Ferner heißt $m(x)$ endlich, wenn $m(x) < \infty$ für alle x gilt, total endlich, wenn aus $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$ und $\sup m(x_\nu) < \infty$ stets $\sup m(\xi x_\nu) < \infty$ für jedes $\xi > 0$ folgt. Ein Modular heißt monoton vollständig, bzw. vollständig, wenn die Norm $\|x\|$ diese Eigenschaften besitzt. Es gilt dann, daß ein Modular auf einem Nakanoraum dann und nur dann monoton vollständig, einfach und seine Norm stetig ist, wenn er gleichmäßig einfach und vollständig ist. Ferner ist $m(x)$ monoton vollständig und endlich dann und nur dann, wenn er total endlich und vollständig ist. Weitere Beziehungen zwischen monotoner Vollständigkeit und Endlichkeit von $m(x)$.

G. Köthe.

Amemiya, Ichiro and Kôji Shiga: On tensor products of Banach spaces. Kodai math. Sem. Reports **9**, 161—178 (1957).

A. Grothendieck [vgl. Bol. Soc. Mat. São Paulo 8, 1—79 (1956)] entwickelte eine Theorie der Tensorprodukte von Banachräumen, ohne jedoch die Beweise im einzelnen auszuführen. Verff. geben für einige der Hauptresultate vollständige Beweise und gelangen an einer Stelle zu einer Verschärfung eines Grothendieckschen Resultats.

G. Köthe.

Iséki, Kiyoshi: On a theorem on function space of A. Grothendieck. Proc. Japan Acad. 33, 605—607 (1957).

Généralisations de résultats de A. Grothendieck (ce Zbl. 46, 117) au cas où il s'agit de fonctions numériques continues définies dans un espace pseudo-compact E ; par un passage au quotient convenable, on se ramène au cas où E est compact métrisable, et les raisonnements de Grothendieck s'appliquent alors sans modification.

J. Dieudonné.

Orlicz, W.: On perfect convergence in certain Banach spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 779—782 (1957).

Eine Reihe $\sum x_\nu$ in einem Banachraum heißt vollkommen beschränkt, wenn die Normen aller aus endlich vielen Elementen der Reihe zu bildenden Summen unter einer festen Schranke liegen. Ferner sei Φ der Banachraum der endlich-additiven Funktionen φ von beschränkter Schwankung $v(\varphi)$ auf einem Mengenring E . Theorem 1. Ist $\varphi_n \in \Phi$ und die Reihe $\sum \varphi_\nu$ vollkommen beschränkt, so konvergiert $\sum [v(\varphi_\nu)]^2$. Dieses Ergebnis ließe sich aus einem allgemeinen Satz über $L(\Omega)$ -Räume herleiten [die Methode des Verf. für den Fall $\Omega = \text{Intervall}$ (s. dies. Zbl. 8, 315) ist verallgemeinerungsfähig]. Hier zieht Verf. jedoch einen direkten Beweis vor. Theorem 2 behandelt den Sonderfall der Funktionen von beschränkter Schwankung in einem Intervall. Literatur über verwandte Fragen: Dvoretzky-Rogers (s. dies. Zbl. 36, 363), Orlicz (s. dies. Zbl. 66, 356).

K. Zeller.

Brodskij, M. S.: Über ein Problem von I. M. Gel'fand. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 2 (74), 129—132 (1957) [Russisch].

Gel'fand hat die Frage gestellt: für welche Funktionen $f(x) \in L_2[0, a]$ ist die lineare Hülle der Funktionenfolge

$$f_1(x) = f(x), f_2(x) = \int_0^x f_1(t) dt, f_3(x) = \int_0^x f_2(t) dt, \dots$$

dicht in $L_2[0, a]$. Diese Frage wird hier mit Hilfe gewisser Ergebnisse von Livšic über die Spektraldarstellung nichtselbstadjungierter Operatoren beantwortet. Es stellt sich heraus, daß $f(x)$ die erwähnte Eigenschaft dann und nur dann besitzt, wenn für jedes $\alpha > 0$ das Maß derjenigen Punkte des Intervalls $(0, \alpha)$, für die $f(x) \neq 0$ ist, positiv ist.

A. Korányi.

Krejn, M. G.: Über Barische Basen des Hilbertschen Raumes. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3(75), 333—341 (1957) [Russisch].

Ein System $\{\psi_j\}$ ($j = 1, 2, \dots$) in einem Hilbertraum \mathfrak{H} heißt ω -linear unabhängig (ω -l. u.), wenn $\sum c_j \psi_j = 0$ nur für $c_j \equiv 0$ gilt. Ein ω -l. u. System heißt eine Barische Basis, wenn es zu irgendeiner normierten Basis $\{\varphi_j\}$ in der Beziehung $\sum \|\psi_j - \varphi_j\|^2 < \infty$ steht. Aus einem System $\{\psi_j\}$ bildet man die Gramschen Determinanten $D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \|(\psi_j, \psi_k)\|_1^n$. Satz 1 und 2. Ein vollständiges System $\{\psi_j\}$ ist genau dann eine Bari-Basis, wenn $\lim_n D(\psi_1, \dots, \psi_n) > 0$ ist, und auch genau dann, wenn es ω -l. u. ist und $\sum \sum_n |(\psi_j, \psi_k) - \delta_{jk}|^2 < \infty$ erfüllt. Satz 3. Ist $\{\psi_j\}$ eine Bari-Basis und $\{\varphi_j\}$ eine othornormierte Basis, so gilt $\sum \|\psi_j - \varphi_j\|^2 \geq \sum (\sqrt{\mu_j} - 1)^2$, wo μ_j die Eigenwerte der Gramschen Matrix $\|(\psi_j, \psi_k)\|_1^\infty$ sind. — Als Anwendung erhält Verf. die Abschätzung $\sum_{j=1}^n \sqrt{\mu_j} \geq \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{D_j}{D_{j-1}}}$ für die Eigenwerte μ_j einer positiv definiten Hermiteschen Matrix mit Hauptminoren D_j (Satz 4).

K. Zeller.

Ėskin, G. I. and S. I. Zuchovickij (Zukhovitsky): Some theorems on the Tchebycheff approximation of functions with values belonging to a commutative C^* -algebra. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1958, 368—369, russ. und engl. Zusammenfassg. 370—371 (1958) [Ukrainisch].

A problem is considered of the Tchebycheff approximation of a continuous function $f(q)$ [$q \in Q$, $f(q) \in R$, where Q is a compact, R a commutative C^* -algebra with unity] by means of the polynomials $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(q)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ being complex numbers and $\varphi_1(q), \dots, \varphi_n(q)$ some

fixed continuous functions on Q to R . In other words, a polynomial $\sum_{k=1}^n \alpha_k^{(0)} \varphi_k(q)$ is sought which satisfies

$$\max_{q \in Q} \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(0)} \varphi_k(q) - f(q) \right\| = \inf_{\alpha_k} \max_{q \in Q} \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(q) - f(q) \right\|.$$

The necessary condition is given for the polynomial to be a Tchebycheff polynomial as well as the necessary condition for the uniqueness of such a polynomial. Then a similar problem is considered related to the ring engendered by an Hermitian operator in Hilbert space.

[Engl. Zusammenfassg.]

Gelfand, I.: Some aspects of functional analysis and algebra. *Proc. internat. Congr. Math.* 1954 Amsterdam 1, 253—276 (1957).

Der Bericht behandelt eine Reihe von Fragen, in denen die Methoden der Funktionalanalysis mit Erfolg verwendet werden. Es wird zuerst auf die Darstellung Liescher Gruppen eingegangen und erläutert, warum neben den in der regulären Darstellung enthaltenen irreduziblen Darstellungen noch ergänzende Serien irreduzibler Darstellungen auftreten. Die Dimensionszahlen der irreduziblen Darstellungen werden zu erklären versucht durch Analogie zu Burnsideschen Sätzen über die irreduziblen Darstellungen endlicher Gruppen. Die Theorie der Charaktere wird erwähnt, ferner wird auf die bisher erzielten Ergebnisse bei reellen halbeinfachen Lieschen Gruppen eingegangen, insbesondere auf die Frage, warum eine Anzahl dieser Darstellungen analytisch ist. Im Anschluß daran wird über russische Untersuchungen über verallgemeinerte Funktionen berichtet. Am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung wird auseinandergesetzt, daß man über die Schwartzschen Distributionen hinausgehen muß, und es wird der Standpunkt vertreten, daß es nicht nur eine Theorie der verallgemeinerten Funktionen gibt, sondern daß man für verschiedene Problemkreise verschiedene solche Theorien braucht. Die Anwendungen verallgemeinerter Funktionen auf Differentialgleichungen und die Darstellungstheorie Liescher Gruppen, insbesondere eine auf M. Riesz zurückgehende Methode, wird besprochen. Über eine Reihe von Ergebnissen russischer Mathematiker über partielle Differentialgleichungen wird kurz referiert, insbesondere über Fragen der Spektraltheorie der Differentialoperatoren. Der Bericht schließt mit Beispielen aus der Quantenelektrodynamik, an denen Fragen einer Analysis in Funktionalräumen entwickelt werden. Auf eine große Zahl ungelöster Fragen wird hingewiesen.

G. Köthe.

Williamson, J. H.: On the functional representation of certain algebraic systems. *Pacific J. Math.* 7, 1251—1277 (1957).

Es wird ein Versuch gemacht, die Gelfandsche Theorie der Darstellung kommutativer Banachalgebren durch Funktionalalgebren auf dem Raum der Maximalideale zu verallgemeinern. Es sei A eine kommutative Algebra über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K , mit dem Einselement e , und B eine e enthaltende Teilalgebra derart, daß für jedes maximale Ideal M in B gilt $B/M \cong K$. Ein B -Modul J , der e nicht enthält, wird als B -Ideal bezeichnet. Ist J eine Algebra, so heißt J ordentliches B -Ideal. Zu jedem maximalen Ideal M von B gibt es wenigstens ein M enthaltendes maximales ordentliches B -Ideal J in A . Für jedes B -Ideal J wird $f_J(a)$ erklärt: Es sei $f_J(a) = \lambda$, wenn $a - \lambda e \in J$; $f_J(a) = \infty$, wenn $a - \lambda e$ für kein $\lambda \in K$ zu J gehört. Ordnet man jedem $a \in A$ die auf der Menge \mathfrak{J} aller maximalen

ordentlichen B -Ideale J erklärte Funktion $f_J(a)$ zu, so erhält man eine Abbildung, für die gilt: $f_J(\alpha a) = \alpha f_J(a)$, $f_J(a_1 + a_2) = f_J(a_1) + f_J(a_2)$, $f_J(a_1 a_2) = f_J(a_1) f_J(a_2)$, falls die rechten Seiten sinnvoll sind (die Werte von f_J liegen in K' , dem in üblicher Weise aus K durch Hinzunahme von ∞ entstehenden Bereich). Es sei B_2 die Menge aller $a \in A$, für die $f_J(a)$ für alle $J \in \mathfrak{J}$ endlich ist. B heißt stark gesättigt, wenn $B = B_2$ gilt. In diesem Fall besitzt a dann und nur dann ein Inverses in B , wenn a in keinem $J \in \mathfrak{J}$ liegt. Gibt es zu jedem $a \in A$ ein $\alpha \in K$, so daß $(a - \alpha e)^{-1}$ in B liegt, so ist B stark gesättigt und jedes maximale Ideal von B ist in einem eindeutig bestimmten $J \in \mathfrak{J}$ enthalten. Der Wertebereich von $f_J(a)$ für alle maximalen B -Ideale J heißt das B -Spektrum $\sigma'_B(a)$ von a . Durchläuft J die $J \in \mathfrak{J}$, so bildet der Wertebereich das B -Spektröid $\tau'_B(a)$. Ist B stark gesättigt, so fallen $\sigma'_B(a)$ und $\tau'_B(a)$ stets zusammen. Die rationale Funktion $r(a)$ eines Elementes a existiert dann und nur dann in A , wenn $r(\tau'_B(a)) \subset K$ gilt. Es gelten die Beziehungen $\tau_B(a + a') \subset \tau_B(a) + \tau_B(a')$ und $\tau_B(a a') \subset \tau_B(a) \tau_B(a')$, wobei der fehlende Strich bei τ bedeutet, daß der Wert ∞ aus dem B -Spektröid weggelassen ist. Das B -Radikal R von A ist der Durchschnitt aller $J \in \mathfrak{J}$. Ist B stark gesättigt, so ist R die Menge aller $b \in B$, für die $(e - \alpha b)$ für alle $\alpha \in K$ ein Inverses in B besitzt. A heißt B -halbeinfach, wenn $R = \{0\}$, vollständig B -halbeinfach, wenn zu $a \neq a'$ stets ein $J \in \mathfrak{J}$ gehört mit $f_J(a) \neq f_J(a')$. A heißt von endlichem Typus, wenn $f_J(a)$ für höchstens endlich viele $J \in \mathfrak{J}$ den Wert ∞ annimmt. Ist A von endlichem Typus, so folgt aus der B -Halbeinfachheit die vollständige B -Halbeinfachheit. — Es sei X eine Menge und \mathfrak{Q} eine Klasse von Teilmengen Q , die bezüglich endlicher Vereinigung abgeschlossen ist und X selbst nicht enthält. Es sei S die Menge der Funktionen auf X , mit Werten in K' , die außerhalb einer Menge Q endlich sind, T die Klasse der Funktionen, die außerhalb einer Menge Q verschwinden. Mit (S, T) werde die Menge der Äquivalenzklassen der Funktionen aus S modulo T bezeichnet. Sie ist eine Algebra. Es gilt, daß jede B -halbeinfache Algebra A von endlichem Typus einer Algebra (S, T) isomorph ist, S die Menge \mathfrak{J} , T die Klasse der Mengen, auf denen ein $f_J(a)$ unendlich wird. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß K der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen ist, gilt: B_1 sei die Menge der $a \in A$ mit beschränktem $\tau'_B(a)$. Ist $B \subset B_1$, so sind $\sigma_B(a)$ und $\tau_B(a)$ für jedes a abgeschlossen. Ist a in keinem $J \in \mathfrak{J}$ enthalten, so hat a ein Inverses in B_1 . Ist A selbstadjungiert bezüglich B , d. h. existiert zu a ein $a^* \in A$ mit $f_J(a^*) = \overline{f_J(a)}$ für alle $J \in \mathfrak{J}$, und ist A B -halbeinfach, so ist A vollständig B -halbeinfach und besitzt eine Darstellung (S, T) . Ist $B = B_1$, so läßt sich überdies die Menge \mathfrak{J} kompakt topologisieren und die $f_J(a)$ werden in C' stetige Funktionen. Anwendungen auf kommutative Algebren aus nichtbeschränkten normalen Operatoren eines Hilbertraumes. *G. Köthe.*

Kohls, C. W.: Ideals in rings of continuous functions. *Fundamenta Math.* **45**, 28—50 (1957).

Für einen lokal kompakten Hausdorff-Raum X werden im Ring $C^*(X)$ aller beschränkten, stetigen, reellen Funktionen $f|X$ das Ideal $C_\infty(X)$ aller im Unendlichen verschwindenden Funktionen und das Ideal $C_s(X)$ aller Funktionen mit kompaktem Träger, sowie die Ideale I mit $C_s(X) \subseteq I \subseteq C_\infty(X)$ untersucht. Gewisse solche Ideale I , insbesondere $C_\infty(X)$ und $C_s(X)$ selbst, werden algebraisch charakterisiert. Ein Punkt $p \in \beta X$ heißt ein βF -Punkt, wenn gilt: verschwindet für eine Funktion $f \in C(X)$ die stetige Erweiterung \hat{f} auf βX ($\pm \infty$ als Funktionswerte zugelassen) im Punkte p , so existiert stets eine Umgebung U von p in βX mit $f \geq 0$ oder $f \leq 0$ überall in $U \cap X$. Diese βF -Punkte stehen in engem Zusammenhang mit gewissen Idealen in $C(X)$, welche durch p definiert werden (z. B. mit dem Ideal N^p aller $f \in C(X)$ für welche $Z(f) = \{x \in X, f(x) = 0\}$ die Spur in X einer Umgebung von p in βX enthält oder mit dem Ideal M^p aller $f \in C(X)$, für welche p in der abgeschlossenen Hülle in βX von $Z(f)$ liegt). Beispielsweise ist

$p \in \beta X$ genau dann ein βF -Punkt, wenn N^p prim ist. Schließlich folgen Untersuchungen zum Problem: Wann ist ein Ideal in einem Ideal ein Ideal im Ring? Beispielsweise gilt: Die Primideale von $C(X)$, welche N^p enthalten, sind identisch mit den Primidealen von M^p , welche N^p enthalten. *G. Nöbeling.*

Nachbin, Leopoldo: A generalization of Whitney's theorem on ideals of differentiable functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 43, 935—937 (1957).

L'A. énonce sans démonstration un théorème qui généralise à la fois le théorème de Hahn-Banach et un théorème de Whitney sur les idéaux dans l'algèbre des fonctions réelles n fois différentiables sur une variété n fois différentiable (voir ce Zbl. 37, 355). On considère un espace localement convexe réel E et une algèbre commutative d'opérateurs A dans E . Un sous-espace coélémentaire de E est un sous-espace fermé F , invariant par A , distinct de E et qui n'est pas intersection des sous-espaces fermés invariants par A , qui contiennent F et en sont distincts. L'A. énonce des conditions sur E et A , trop compliquées pour être énoncées ici, moyennant lesquelles la cosynthèse spectrale (relative à A) a lieu dans E , ce qui signifie que tout sous-espace fermé de E , invariant par A et distinct de E , est intersection des sous-espaces coélémentaires qui le contiennent. Ces conditions entraînent d'autres propriétés des sous-espaces coélémentaires, notamment le fait que leur codimension est bornée et que chacun d'eux est contenu dans un seul sous-espace maximal parmi les sous-espaces fermés et invariants par A ; en outre ces sous-espaces maximaux sont de codimension 1. *J. Dieudonné.*

Koosis, Paul: An irreducible unitary representation of a compact group is finite dimensional. Proc. Amer. math. Soc. 8, 712—715 (1957).

Sei $V(t)$, $t \in G$, eine irreduzible schwach stetige unitäre Darstellung der kompakten Gruppe G im Hilbertraum H und $x \neq 0$ ein festes Element aus H . Dann ist der durch $Ty = \int_G (y, V(t)x) V(t) dt$ definierte Operator $T \neq 0$, beschränkt, selbstadjungiert und mit $V(t)$ vertauschbar. Verf. zeigt, daß T^2 vollstetig ist und leitet hieraus das im Titel genannte Resultat in einfacher Weise her. *H. Leptin.*

Yamamoto, Nobuko: On E. Hille's theorem. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 7, 13—17 (1957).

Verf. beweist vier Sätze über Faktorfunktionen lokal kompakter abelscher Gruppen G , z. B. Satz 1: Ist q ein stetiger Endomorphismus der L_1 -Algebra von G , so existiert dann und nur dann eine stetige Funktion $\hat{q}(\hat{x})$ auf der Charaktergruppe \hat{G} von G mit $(\hat{q}\hat{f})(\hat{x}) = \hat{q}(x)\hat{f}(\hat{x})$ ($f \rightarrow \hat{f}$ Fouriertransformation auf G), wenn q mit allen Translationen $f(x) \rightarrow f(x-a)$ vertauschbar ist. Satz 4: Ist $\{q(t); 0 < t\}$ eine einparametrische Halbgruppe (d. h. $q(t_1 + t_2) = q(t_1)q(t_2)$) stetiger L_1 -Endomorphismen $q(t)$ mit den Faktorfunktionen $\hat{q}(\hat{x}, t)$, so ist $\hat{q}(\hat{x}, t_1 + t_2) = \hat{q}(\hat{x}, t_1) \cdot \hat{q}(\hat{x}, t_2)$. Ist $q(t)$ schwach meßbar, so ist $\hat{q}(\hat{x}, t)$ für jedes feste \hat{x} in t meßbar. *H. Leptin.*

Cuculeseu, Ion: Généralisation aux groupes quelconques d'un théorème de E. Hille concernant les fonctions facteurs. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 15—19 (1958).

Es sei G eine abelsche lokal-kompakte Gruppe und \hat{G} die duale Gruppe (der Charaktere von G). Es bezeichne $\mathcal{Q}^1(\hat{G})$ den Vektorraum, der bezüglich des Haarschen Maßes von \hat{G} integrierbaren, komplex-wertigen Funktionen auf \hat{G} ; die Fourier-Transformierte einer jeden Funktion $\hat{f} \in \mathcal{Q}^1(\hat{G})$ werde mit $T\hat{f}$ bezeichnet. Eine auf \hat{G} definierte, komplexwertige Funktion ψ wird Faktorfunktion genannt, wenn sie in bezug auf das Haarsche Maß von G meßbar ist und wenn zu jeder Funktion $\hat{f} \in \mathcal{Q}^1(\hat{G})$ eine Funktion $\hat{g} \in \mathcal{Q}^1(\hat{G})$ existiert derart, daß $T\hat{g} = \psi T\hat{f}$ lokal-fast-überall auf G (bezüglich des Haarschen Maßes) gilt. Bewiesen wird folgender Satz: Eine auf G

definierte, komplex-wertige Funktion ψ ist dann und nur dann eine Faktorfunktion, wenn sie lokal-fast-überall gleich der Fourier-Transformierten $T\hat{\mu}$ eines beschränkten Maßes $\hat{\mu}$ auf \hat{G} ist. Für $G = \text{Zahlengerade}$ wurde dieser Satz von E. Hille (Functional analysis and semigroups, theorem 18.2.2, s. dies. Zbl. 33, 65) bewiesen. Methodisch knüpft die Note an H. Cartan und R. Godement (s. dies. Zbl. 33, 188) an.

H. Bauer.

Harish-Chandra: Fourier transforms on a semisimple Lie algebra II. Amer. J. Math. 79, 653—686 (1957).

Les questions laissées en suspens dans l'article précédent (I., ce Zbl. 77, 252) sont ici résolues. Ceci nécessite l'étude des éléments semi-réguliers de \mathfrak{g} ; $X \in \mathfrak{g}$ est dit semi-régulier si $\text{ad} X$ est semi-simple et si le centralisateur de X dans \mathfrak{g} est de dimension $l + 2$ (où $l = \text{rang de } \mathfrak{g}$). Un élément semi-régulier H_0 de \mathfrak{g}_0 appartient à l'adhérence de trois composantes connexes au plus de \mathfrak{g}'_0 (ensemble des éléments réguliers de \mathfrak{g}_0). Soit \mathfrak{l}_0 l'algèbre de Lie des matrices réelles à 2 lignes et 2 colonnes de trace 0; alors 0 est le seul élément semi-régulier de \mathfrak{l}_0 , et certains calculs sur \mathfrak{g}_0 dans le voisinage de H_0 se ramènent à des calculs sur \mathfrak{l}_0 au voisinage de 0. En outre, la réunion de \mathfrak{g}'_0 et de l'ensemble des éléments semi-réguliers de \mathfrak{g}_0 est connexe.

J. Dixmier.

Yamanaka, Takesi: Une extension de la théorie des distributions de M. J. Korevaar. II. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 6, 79—88 (1957).

Faisant suite à son étude antérieure (I, v. ce Zbl. 67, 348) l'A. étudie dans le présent article la Transformation de Fourier des Distributions tempérées. Pour ce faire, il donne au préalable la définition de l'espace $(C\mathfrak{L})$ des fonctions continues lentement croissantes dans R^n , $n \geq 1$: „ $F(x) \in (C\mathfrak{L})$ et $|F(x)| \leq \kappa(1 + |x|^2)^{h/2}$, $\hat{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in R^n$; κ et h étant deux constantes convenables > 0 “. L'A. définit ensuite: a) l'espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ des distributions tempérées; en posant: „ $\varphi \in (\mathfrak{D}\mathfrak{F})$, s'il existe $F(x) \in (C\mathfrak{L})$ et un système d'entiers tels que $\varphi = D^p[F]$ “; b) la transformation de Fourier sur (C, \mathfrak{L}) ; c) la transformation de Fourier sur $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$: Si $\varphi \in (\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ et $\varphi = D^p[F] = (\partial/\partial x_1)^{p_1} D^{p'}[F]$, $F(x) \in (C\mathfrak{L})$, $p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $p' = \{p_2, p_3, \dots, p_n\}$, on appelle transformation de Fourier \mathfrak{F}_1 (resp. \mathfrak{F}_1^*) de φ par rapport à x_1 , l'expression $\mathfrak{F}_1\varphi = (2\pi i x_1)^{p_1} D^{p'}\mathfrak{F}_1 F$, (resp. $\mathfrak{F}_1^*\varphi = (-2\pi i x_1)^{p_1} D^{p'}\mathfrak{F}_1^* F$), d'où pour la transformation de Fourier \mathfrak{F} (resp. \mathfrak{F}^*) par rapport à $x \in R^n$: $\mathfrak{F}\varphi = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_n\varphi$ (resp. $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}_1^*\mathfrak{F}_2^* \dots \mathfrak{F}_n^*\varphi$) pour toute $\varphi \in (\mathfrak{D}\mathfrak{F})$. Moyennant ces définitions, l'auteur rétablit un certain nombre de formules fondamentales, connues, pour \mathfrak{F} et \mathfrak{F}^* . Pour finir il expose quelques théorèmes concernant les pseudo-polynômes introduits dans son premier article.

S. Vasilache.

Roumieu, Charles: Une extension de la notion de distribution. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 520—521 (1958).

L'A. remplace l'espace \mathcal{D} de L. Schwartz par l'espace des fonctions indéfiniment dérivables, de support compact, dont les dérivées satisfont aux inégalités $|f^{(p)}(t)| \leq A k^p M_v$, où A et k dépendent de f et $\{M_v\}$ est une suite fixe, satisfaisant aux conditions $M_v^2 \leq M_{v-1} M_{v+1}$, $M_0 < +\infty$, $0 \leq M_v \leq +\infty$, $\sum_{v=0}^{\infty} M_v^{-1/v} < +\infty$. Il définit aussi l'analogue de l'espace \mathcal{L} et donne des définitions et relations analogues à celles de L. Schwartz.

G. Marinescu.

Méthée, Pierre-Denis: L'équation des ondes avec second membre invariant. Commentarii math. Helvet. 32, 153—164 (1957).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 55, 341) hat Verf. alle Schwartzschen Distributionen bestimmt, die invariant gegen die Lorentzsche Rotationsgruppe sind (kurz: Invarianten) und der Gleichung $(\square + \kappa)T = 0$ oder δ_0 genügen, wo κ eine komplexe Konstante, $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ der d'Alembertsche Operator und δ_0 die

Diracsche Distribution bezüglich des Rotationszentrums O im R^n ($n \geq 3$) ist. In der vorliegenden Note wird eine invariante Lösung der Gleichung $(\square + \kappa) T = Z$ bestimmt, wo Z eine beliebige Invariante ist. Die Resultate werden verallgemeinert auf Gleichungen der Form $(P(\square + \kappa)) T = Z$ ($P = \text{Polynom}$) und auf den Fall, daß \square den ultrahyperbolischen Operator $\sum_{i=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=p+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ ($p > 1, n - p > 1$) bedeutet.

G. Doetsch.

Yosida, Kôzaku: Semi-group theory and the integration problem of diffusion equations. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 1, 405—420 (1957).

Dieser Bericht gibt eine Zusammenfassung der Existenzsätze der Theorie einparametrischer Halbgruppen [die jetzt in dem Buch von E. Hille und R. S. Phillips, Functional analysis and semi-groups (s. dies. Zbl. 78, 100) enthalten sind] und deren Anwendung auf Existenzsätze bei gewissen partiellen Differentialgleichungen, den Vorwärts- (= Fokker-Plancksche Gleichung) und Rückwärts-Diffusionsdifferentialgleichungen. Dabei werden insbesondere Ergebnisse von K. Yosida (s. dies. Zbl. 45, 80; 52, 327), E. Hille (s. dies. Zbl. 55, 123), W. Feller (s. dies. Zbl. 47, 93) und Phillips erfaßt. Dieser Bericht steht in engem sachlichen Zusammenhang mit dem von R. S. Phillips und ist auch durch seine ca. 50 Literaturangaben nützlich.

D. Morgenstern.

Gochberg, I. C.: Über Index, Nullelemente und Kernelemente eines nicht beschränkten Operators. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 1 (73), 177—179 (1957) [Russisch].

Verf. nennt einige abschließende Ergebnisse über Operatoren. Sei A ein linearer abgeschlossener Operator in einem B -Raum E mit dichtem Definitionsbereich D und abgeschlossener Wertmenge R . Die Dimension der Menge $\{x | A(x) = 0\}$ sei $\alpha(A)$, ferner $\beta(A)$ der Defekt von R sowie $\kappa(A) = \alpha(A) - \beta(A)$ der Index von A . Unter einem Nullelement von A versteht Verf. ein x mit $A^n x = 0$ für irgendein n ; unter dem Kern den Durchschnitt der Wertmengen der A^n . a) Index. Sind $\alpha(A)$ und $\beta(A)$ nicht beide unendlich, so ändert sich $\kappa(A)$ nicht, wenn man zu A einen „kleinen“ Operator B hinzufügt. Die Aussage kann nicht auf den Fall $\alpha = \beta = \infty$ ausgedehnt werden. b) Nullelemente. Sei $\alpha(A)$ endlich. Die Nullelemente kann man anordnen zu $m(A)$ unendlichen Zeilen $\{x_{1j}, x_{2j}, \dots\}$ und $\alpha(A) - m(A)$ endlichen Zeilen $\{x_{1,m+j}, \dots, x_{k_j,m+j}\}$. Dabei ist $A(x_{1i}) = 0$ und $A(x_{p+1,i}) = A(x_{p,i})$. Es gibt ein ϱ , so daß $\alpha(A - \lambda I) = m(A)$ und $m(A - \lambda I) = m(A)$ für $0 < |\lambda| < \varrho$ (und meist noch in einem größeren Bereich) gilt. Die Lösungen von $(A - \lambda I)x = 0$ kann man durch Potenzreihen $\sum_k \lambda^k x_{kj}$ (wo $j = 1, 2, \dots, m(A)$) gewinnen. Der Operator A hat genau dann eine endliche Zahl von Nullelementen, wenn jeder Teil von A nicht-positiven Index besitzt. c) Kern. Für $0 < |\lambda| < \varrho$ (und meist noch in einem größeren Bereich) sind die Kerne der Operatoren $A - \lambda I$ gleich. In Punkten λ mit $\alpha(A - \lambda I) \neq m(A)$ wird der Kern kleiner (wegen der unter b) genannten endlichen Zeilen).

K. Zeller.

Vulich, B. Z.: Anwendung der Theorie der halbgeordneten Räume auf die Untersuchung selbstadjungierter Operatoren im Hilbertschen Raume. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 1 (73), 169—172 (1957) [Russisch].

The author points out the analogies between the theory of semi-ordered spaces (K -spaces) and certain aspects of the theory of selfadjoint operators. He notes that using general results about K -spaces very simple proofs can be given to some basic facts concerning operators. Proofs based on K -space arguments of von Neumann's theorems about commutative sets of selfadjoint operators and commutative rings are sketched, and a perturbation theorem of Rellich is derived in the same spirit.

A. Korányi.

Lidskij (Lidskii), V. B.: On the completeness of a system of eigen elements and adjoint elements of a compact operator. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 234—236 (1957) [Russisch].

Es seien A und B (positiv oder negativ) definite vollstetige Operatoren im Hilbertschen Raum H , und es sei $\text{Sp } B < \infty$. Dann bilden die zu den von Null verschiedenen Punkten des Spektrums von $T = A + iB$ gehörenden Eigenelemente und adjungierten Elemente ein im Wertebereich von T vollständiges System. Mit Hinzunahme der zu Null gehörigen Eigenelemente von T wird dieses System vollständig in H . Im Beweise benützt Verf. Ergebnisse von Livšic über nicht-selbstadjungierte Operatoren und den Satz von Phragmén-Lindelöf. *A. Korányi.*

Glazman, I. M.: An analogue of the extension theory of Hermitian operators and a non-symmetric one dimensional boundary problem on a half-axis. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 214—216 (1957) [Russisch].

Es sei H ein Hilbertscher Raum, J eine Konjugation in H . Der Operator A in H heißt J -symmetrisch, wenn $(Af, Jg) = (f, JAg)$ für jedes $f, g \in D_A$ besteht. Ist D_A dicht in H , so folgt aus dieser Bedingung $JAJ \subset A^*$. Im Falle $JAJ = A^*$ wird A J -selbstadjungiert genannt. Der Operator A heißt dissipativ, wenn $\text{Im}(Af, f) \geq 0$ für jedes $f \in D_A$ besteht. Mit Hilfe der Cayleytransformation definiert Verf. den Defektindex von A , und beweist, daß jeder dicht definierte J -symmetrische dissipative Operator eine J -selbstadjungierte Erweiterung besitzt.

Der Differentialausdruck $l[y] = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[p_{n-k}(x) \frac{d^k y}{dx^k} \right]$ mit den Randbedingungen $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(2n-1)}(0) = 0$ erzeugt einen J -symmetrischen Operator L in $L_2(0, \infty)$; dabei sind $p_k(x)$ komplexwertige Funktionen, und J bedeutet die gewöhnliche Konjugation. Besteht $\text{Im } p_k(x) \geq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$; $0 \leq x < \infty$), dann ist L dissipativ. Aus den obigen allgemeinen Überlegungen folgt eine Theorie der J -selbstadjungierten Erweiterungen des dissipativen Differentialoperators L , analog wie im Hermiteschen Falle. Die Resolvente R_λ einer beliebigen J -selbstadjungierten Erweiterung von L ist für $\text{Im } \lambda < 0$ ein Integraloperator mit reellsymmetrischem Kern $\Gamma(x, s; \lambda) = \Gamma(s, x; \lambda)$, der als Funktion von s für jedes x quadratisch integrierbar ist. Ist der Defektindex von L gleich $2n$ („Grenzkreisfall“), so ist $\Gamma(x, s; \lambda)$ auch als Funktion zweier Variablen quadratisch integrierbar. *A. Korányi.*

Krejn (Krein), S. G.: On correctness classes for certain boundary problems. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 1162—1165 (1957) [Russisch].

On considère l'équation $dx/dt + A(t)x = 0$ avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $A(t)$ étant un opérateur non borné dans un espace hilbertien H . Ce problème est appelé correcte dans une classe \mathfrak{M} si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t)$ tel que $\|x(0)\| \leq \delta$ implique $\|x(t)\| \leq \varepsilon$, pour tout $x \in \mathfrak{M}$. La correctitude résulte de l'inégalité $\|x(t)\| \leq \|x(0)\|^{1-\alpha(t)} \|x(T)\|^{\alpha(t)}$, où $\alpha(t) = (e^{kt} - 1)/(e^{kT} - 1)$, inégalité impliquée par $\left(\frac{dA}{dt}x, x\right) \leq k(Ax, x)$ dans le cas des opérateurs autoadjoints et par $\text{Re}\left(\frac{dA}{dt}x, x\right) \leq k \text{Re}(Ax, x)$ dans le cas des opérateurs normaux.

G. Marinescu.

Ždanov (Zhdanov), G. A.: On the convergence of a modification of Galerkin's method. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 223—225 (1957) [Russisch].

Die Galerkinsche Methode zur Lösung von Gleichungen benützt endlichdimensionale Projektionen (siehe etwa Pol'skij, dies. Zbl. 47, 113; 64, 120; 72, 136). Verf. benützt eine Variante, die weniger Anforderungen an die betrachteten Operatoren stellt. In der Gleichung (17) $Lu = Au + B(\lambda)u = f$ seien A und $B(\lambda)$ lineare Operatoren in einem Hilbertraum H , außerdem sei $\|B(\lambda)\|$ analytisch in einem gewissen Bereich. Ferner wird gefordert, daß A^{-1} und $B(\lambda)A^{-1}$ als vollstetige

Operatoren existieren. Die linear unabhängigen φ_k mögen dem (in H dichten) Definitionsbereich von A angehören; das System $\psi_k = A \varphi_k$ sei vollständig. Bildet man die Näherungen $u_N = \sum_{k=1}^N \eta_k^{(N)} \varphi_k$ unter der Bedingung $(L u_N - f, \varphi_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$) (die durch Wahl der η zu erfüllen ist), so konvergieren die u_N gegen eine Lösung u von (17); und die Eigenwerte von (17) sind Limites der „Näherungseigenwerte“ (Satz 4). In Satz 1—3 wird die Methode eingesetzt zur Lösung von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen (hier kann man die φ_k immer als Polynome wählen) und partiellen Differentialgleichungen.

K. Zeller.

Iochevidov, I. S. und M. G. Krejn: Bemerkung zu der Arbeit „Spektraltheorie der Operatoren in Räumen mit indefiniter Metrik“ [Trudy Moskovsk. mat. Obsč. 6, 486 (1957) [Russisch].

Betrifft die in diesem Zbl. 72, 134 besprochene Arbeit.

Trèves, François: Domination et problèmes aux limites de type mixte. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 2454—2457 (1957).

Der vom Verf. eingeführte Begriff der Domination (s. dies. Zbl. 78, 288) wird zur Behandlung der im Titel angegebenen Probleme herangezogen. Verf. entwickelt systematisch die Grundlagen hierfür und beweist zwei Sätze über ihre Anwendung.

H.-J. Kowalsky.

Myškis (Myshkis), A. D. and A. Ja. (A. J.) Lepin: On the definition of generalized functions. Doklady Akad. Nauk SSSR 116, 177—180 (1957) [Russisch].

C'est le résumé de l'article au même titre, publié dans Mat. Sbornik, n. Ser. 43 (85), 323—348 (1958).

G. Marinescu.

MacNerney, J. S.: Concerning quasi-harmonic operators. J. Elisha Mitchell sci. Soc. 73, 257—261 (1957).

The author [this Zbl. 64, 362; J. Elisha Mitchell sci. Soc. 71, 185—200 (1955)] previously extended the theory of harmonic matrices including systems of Stieltjes mean-integral equations in which certain discontinuities may occur. The present paper is concerned with the reduction of such systems to a "second order" form, and with a special case of this form which exhibits relations analogous to the Euler formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

E. Frank.

Citlanadze (Tsitlanadze), É. S.: Investigation of a functional analogue of a Lichtenstein nonlinear integral equation. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 650—653 (1958) [Russisch].

En partant d'un opérateur de Lichtenstein, on considère la fonctionnelle

$$F(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \varphi(x_{\alpha_0}) \cdots \varphi(x_{\alpha_n}),$$

où $x = (x_{\alpha_i})$ est un élément de la sphère unitaire fermée S_1 de l_2 , $a_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$ sont des coefficients symétriques par rapport aux indices, φ est une fonction deux fois continuellement dérivable sur $[-1, +1]$ et n un nombre naturel; on suppose encore

$$\sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=\alpha}^{\infty} a_{\alpha_0 \dots \alpha_n}^2 < +\infty; \quad \sum_{\alpha_k=1}^{\infty} \varphi^2(x_{\alpha_k}) < +\infty; \quad \sup_{x \in S_1} \sum_{\alpha_k=1}^{\infty} \varphi^2(x_{\alpha_k}) = M^2.$$

On démontre que: a) la série $F(x)$ est uniformément continue dans S_1 , b) la fonctionnelle $F(x)$ est faiblement continue dans S_1 , c) la différentielle forte de $F(x)$ engendre un opérateur à composantes

$$L_F x: \left(\varphi'(x_{\alpha_0}) \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \varphi(x_{\alpha_1}) \cdots \varphi(x_{\alpha_n}) \right), \quad (\alpha_0 = 1, 2, \dots)$$

qui représente l'élément $x \in S_1$ en l_2 , d) l'opérateur $L_F(x)$ satisfait aux conditions de Lipschitz, e) $L_F(x)$ est faiblement continue dans S_1 . Si l'on tient compte de la régularité de l_2 , il suit que $L_F x$ est complètement continue. Si l'on suppose encore

$\alpha_0 \dots \alpha_n > 0$, $\varphi > 0$, $\varphi(0) = 0$ et que φ est une fonction paire, il résulte d'un mémoire antérieur de l'A. (v. ce Zbl. 52, 348) que l'équation fonctionnelle $L_F x = \lambda x$ admet un système infini d'éléments propres normés, géométriquement différents.

A. Haimovici.

Vajnberg, M. M.: Einige Fragen der Funktionalanalysis und die Variationsmethoden zur Untersuchung nicht-linearer Gleichungen. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 1(73), 162—165 (1957) [Russisch].

Un court exposé des méthodes employées par l'A. pour démontrer l'existence des points extrémaux chez certaines fonctionnelles. En particulier, l'A. énonce deux théorèmes sur l'existence des points extrémaux relatifs à des hyperboloïdes dans un espace hilbertien.

G. Marinescu.

Krasnosel'skij (Krasnoselsky), M. A. and Ja. B. (J. B.) Rutickij (Rutitsky): Some non-linear operators in Orlicz spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 363—366 (1957) [Russisch].

Les AA. énoncent plusieurs théorèmes concernant la différentiabilité de l'opérateur $f u(x) = f[x, u(x)]$, de la norme habituelle, d'une norme introduite par W. A. J. Luxembourg et la continuité complète de l'opérateur $K \varphi(x) = \int K(x, y, \varphi(y)) dy$. Ces théorèmes étendent les résultats donnés par les AA. (voir ce Zbl. 48, 94) et donnent la possibilité d'appliquer les méthodes de l'analyse non-linéaire à des classes plus vastes d'opérateurs.

G. Marinescu.

Bachtin (Bakhtin), I. A.: On a class of equations with positive operators. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 13—16 (1957) [Russisch].

L'A. élargit la classe des opérateurs auxquels on peut appliquer les méthodes de M. G. Krein, M. A. Rutman et M. A. Krasnoselski, en définissant les propriétés de positivité et de monotonie, resp., par l'intermédiaire de deux cones $K \subset K_1$.

G. Marinescu.

Mirakov, V. E.: The majorant principle and the method of tangent parabolas for non-linear functional equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 977—979 (1957) [Russisch].

Soient X et Y deux espaces ayant des normes généralisées (Kantorovitch) dans les espaces Z et W , respectivement. L'A. considère deux équations $P(x) = 0$ et $Q(z) = 0$, où P et Q sont des opérations de X à Y , resp. de Z à W et donne des conditions dans lesquelles l'applicabilité de la méthode des paraboles tangentes à la deuxième équation entraîne son applicabilité à la première équation.

G. Marinescu.

Vertgejm, B. A.: Über einige Methoden zur angenäherten Lösung nicht-linearer Funktionalgleichungen in Banachschen Räumen. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 1(73), 166—169 (1957) [Russisch].

L'A. donne des conditions dans lesquelles la formule de recurrence $x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n)$ résoud l'équation $P(x) = 0$, si l'on prend pour Γ_n l'inverse d'un opérateur approché à $P'(x_n)$. Il en indique une application au problème de la représentation conforme et à un problème d'hydrodynamique.

G. Marinescu.

Kaazik, Ju. Ja. (Yu. J.): On a class of iteration processes for the solution of operational equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 579—582 (1957) [Russisch].

Sei $P(x) = y$ ein zweimal im Frechetschen Sinne differenzierbarer Operator, welcher ein Gebiet des Banachschen Raumes X auf ein Gebiet des normierten Raumes Y abbildet. Für die Gleichung $P(x) = 0$ wird eine Iteration definiert durch (*) $x_{n+1} = x_n - (E + \alpha R_n)^{-1} (E + (\alpha + 1) R_n) \Gamma_n P(x_n)$, wobei E den Einheitsoperator bezeichnet und α eine reelle Zahl bedeutet; ferner ist $\Gamma_n = (P'(x_n))^{-1}$ und $R_n = \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)$ zu setzen. Für $\alpha = 0, -1, -2$ ist diese Methode untersucht worden bzw. von Nečepurenko (dies. Zbl. 55, 110), Mertwezowa (dies. Zbl. 50, 119) und Wychandu (Dissertation, Tartuss. Staatsuniversität 1955). In der vorliegenden Arbeit werden unter engeren Voraussetzungen, u. a. der, daß der

Operator P analytisch, bzw. dreimal differenzierbar ist, zwei Sätze betreffend Fehlerabschätzungen für das Verfahren (*) hergeleitet. Nur für den ersten Satz wird der Beweis mitgeteilt. H. Schwerdtfeger.

Ghermănescu, M.: Sur l'équation fonctionnelle de Cauchy. Bull. math. Soc. Sci. math. phys. RPR, n. Sér. 1 (49), 33—46 (1957).

Es wird die Cauchy'sche Funktionalgleichung (*) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ einerseits von vielen Gesichtspunkten aus untersucht, andererseits verschiedentlich verallgemeinert, zahlreichen früheren Verff. folgend, aber auch weitergehend. Eine solche Verallgemeinerung ist z. B. $f(ax+by) - cf(x) - df(y) = F(x, y)$. — Es sei bemerkt, daß entgegen der Behauptung S. 36 oben aus $f(t) = \frac{t}{h} g\left(\frac{t}{h}, h\right) + g_1\left(\frac{t}{h}, h\right)$ das Bestehen von $g(t/h, h) = ah$, $g_1(t/h, h) = b$ nicht unbedingt folgt [Gegenbeispiel: $g\left(\frac{t}{h}, h\right) = \frac{t}{h} h^2 + 1 = th + 1$, $g_1\left(\frac{t}{h}, h\right) = -\frac{t}{h}$]. Die Konstruktion des Verf. für unstetige Lösungen von (*) ist nicht klar, da er z. B. behauptet, daß so auch auf genau abzählbar unendlich vielen Stellen unstetige Lösungen konstruiert werden können, während G. Darboux [Bull. Sci. math., I. Sér. 9, 281—288 (1875)] bewiesen hat, daß jede in einem Punkte stetige Lösung von (*) überall stetig ist. — Ein ausführliches Literaturverzeichnis schließt die Arbeit. J. Aczél.

Kempner, J. H. B.: A general functional equation. Trans. Amer. math. Soc. 86, 28—56 (1957).

Eine im n -dimensionalen euklidischen Raume E_n definierte Funktion $f(x)$ ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) wird additiv genannt, falls sie der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ genügt. Verf. gibt einen neuen Beweis, sogar eine Verallgemeinerung, des bekannten Ostrowskischen Satzes [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 38, 54—62 (1929)], wonach jede, auf einer Menge von (im Lebesgueschen Sinne) positivem Maß beschränkte additive Funktion von der Gestalt $f(x) = ax$ ist ($a \in E_n$). Genauer: $B \subset E_n$ werde vom positiven Typ genannt, falls eine positive ganze Zahl p existiert, so daß die direkte Summe $B^{(p)} = B + B + \dots + B$ eine nichtleere offene Teilmenge enthält. Falls nun $f(x)$ eine in E_n definierte reelle additive Funktion, beschränkt auf der Menge B , vom positiven Typ ist, so hat sie die Gestalt ax . — Bezeichnen wir mit Ω die Menge aller in E_n definierten Polynome; b_0, b_1, \dots, b_k seien beliebige reelle verschiedene Zahlen und $f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x)$ Funktionen, definiert in E_n . Im Mittelpunkt der Arbeit steht folgendes Resultat: f_0 sei eine auf einer Menge vom positivem Maße beschränkte Funktion, es sei weiterhin $\sum_{i=0}^k f_i(x + b_i y) \in \Omega$, für alle $y \in C$ (C ist ein Bereich von E_n mit positivem Maße). Es wird behauptet, daß auch $f_0 \in \Omega$. Dieses Ergebnis wird noch verallgemeinert durch Einführung von Eigenschaften lokaler Art, und zwar solchen, für welche folgende Behauptungen gelten: a) genügt $f(x)$ einer lokalen Eigenschaft P im Punkte x_0 , so besitzt auch $f(x+h)$ die Eigenschaft P in $x_0 - h$, für alle $h \in E_n$. b) falls $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die Eigenschaft P besitzt im Punkte x_0 , so hat auch $f_1 - f_2$ dieselbe Eigenschaft in x_0 . A sei eine offene Menge in E_n , $\Omega_P(A)$ bezeichne diejenige Klasse von Funktionen, definiert in den Punkten von A , welche in jedem Punkte die Eigenschaft P besitzen. Falls $f \in \Omega_P(A)$, so folgt (*) $A_h f = f(x+h) - f(x) \in \Omega_P(A_h)$, für alle $h \in E_n$ ($A_h = A \cap (A-h)$). Eine lokale Eigenschaft P genügt einer sog. „schwachen Differenz-Bedingung“, falls aus (*) für eine beliebige, in A definierte, und auf einer Untermenge vom positiven Maße beschränkte Funktion f die Relation $f \in \Omega_P(A)$ und umgekehrt, aus $f \in \Omega_P(A)$ das Bestehen von (*) folgt. $A \subset E_n$ sei eine offene, zusammenhängende Menge, $C \subset E_n$ eine Menge von positivem Maß. Mit P bezeichnen wir eine lokale Eigenschaft, welche der „schwachen Differenz-Bedingung“ genügt, $b_0 = 0$, b_1, b_2, \dots, b_k seien verschiedene reelle Zahlen und $f_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) beliebige in $A + b_i C$ definierte Funktionen. Die Verall-

gemeinerung voriger Behauptung lautet nun folgendermaßen: aus $\sum_{i=0}^k f_i(x + b_i y) \in \Omega_P(A)$ folgt $f_0 \in \Omega_P(A)$, wenn f_0 auf einer Untermenge von A vom positivem Maße beschränkt ist. — In einer anderen Untersuchung bezeichne Ω eine Klasse von Funktionen, definiert in E_1 und so beschaffen, daß mit f_1 und f_2 auch $f_1 - f_2 \in \Omega$ und $f_1(x + h) \in \Omega$ stattfindet für alle $h \in E_1$. In Ω sei eine Äquivalenz (\sim) definiert, so daß aus $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ die Relationen $f_1 - f_2 \sim g_1 - g_2$ und $f_1(x + h) \sim g_1(x + h)$ folgen (h beliebig aus E_1), weiterhin, für alle konstanten Funktionen f aus $f \sim \Omega$ die Relation $f \equiv 0$ folgt. Wir setzen $f_1 \approx f_2$, falls f_1 und f_2 höchstens auf einer Menge von Maße 0 verschieden sind. Eine Menge S mit folgenden Eigenschaften: 1. wenn $f \in \Omega$ und $\Delta_h f \sim 0$ (für alle h), so ist $f \sim K$ (konstant). 2. Vorausgesetzt, daß es für alle $h \in S$ eine Funktion $g_h \in \Omega$ gibt, so daß $\Delta_h g_{h'} = \Delta_{h'} g_h$ ($h, h' \in S$), dann existiert ein $g \in \Omega$ und eine Konstante a_h , so daß $\Delta_h g \sim g_h - a_h$ ($h \in S$ beliebig) — nennen wir eine charakteristische Menge. Wir bezeichnen mit C^+ die additive Gruppe von reellen Zahlen, welche aus $C \in E_1$ erzeugt wird. Es wird der Fall betrachtet, daß C^+ eine charakteristische Menge ist, $f(x)$ sei eine beliebige Funktion (definiert in E_1), so beschaffen, daß $\Delta_h f \in \Omega$ für alle $h \in C$. Nun wird behauptet: (i) Es existiert eine Funktion $g \in \Omega$ und eine additive Funktion H (definiert in E_2), so daß $\Delta_h(h - g - H) \sim 0$ für alle $h \in C^+$; (ii) Vorausgesetzt, daß in Ω aus $f_1 \sim f_2$ die Relation $f_1 = f_2$ folgt, und daß zu Ω zumindestens eine charakteristische Menge gehört, so besitzt die Funktionenklasse Ω die Differenz-Eigenschaft. (iii) Wenn die Voraussetzungen: a) alle Funktionen der Klasse Ω sind meßbar; b) aus $f_1 \sim f_2$ folgt $f_1 \approx f_2$ in Ω ; c) C^+ ist in E_1 dicht, stattfinden und $f(x)$ auf einer Menge vom positivem Maß beschränkt ist, dann ist $f(x) \approx \beta x + g + g^*$ gültig (β eine Konstante, $g \in \Omega$, g^* beschränkt, und $\Delta_h g^* \approx 0$ für $h \in C^+$). Wenn auch noch $f(x)$ meßbar ist, so gilt $f(x) \approx \beta x + g$.

S. Fenyő.

Praktische Analysis:

● **Buckingham, R. A.: Numerical methods.** London: Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd. 1957. XII, 597 p. 70 s. net.

Verf. charakterisiert das Buch als ein Handbuch solcher Verfahren, deren Durchführung ohne Zuhilfenahme programmgesteuerter Anlagen möglich ist. Diese Auswahl wurde in der Erkenntnis vorgenommen, daß die zunehmende Anzahl von Großrechenanlagen die Bedeutung solcher Methoden keineswegs schmälert, die nur die üblichen Hilfsmittel voraussetzen. Zudem werden viele der behandelten Verfahren in praktisch unveränderter Form auch auf programmgesteuerten Anlagen verwendet. Wenn auch eine gewisse Vollständigkeit angestrebt wird, so fehlen doch einige Standardverfahren wie etwa das von Runge-Kutta, die man aber bereits in vielen Büchern über diesen Gegenstand finden kann. Die beiden ersten Kapitel enthalten einführende Bemerkungen über Fehler beim numerischen Rechnen, den Gebrauch von Tafeln, Differenzen und Polynomdarstellung. In den Kap. 3—5 werden die Interpolationsformeln von Lagrange und Newton und die Formeln zur numerischen Differentiation und Integration bereitgestellt. Kap. 6 enthält einen Abriß der Operatorenrechnung mit Anwendung auf die vorangegangenen Betrachtungen. Die Kap. 7 und 8 sind der numerischen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet (Reihenentwicklung, rekursive Lösung, asymptotische Entwicklung, Störungsrechnung). Nullstellenbestimmung und die Methode der kleinsten Quadrate folgen in Kap. 9 und 10. In Kap. 11 werden die direkten Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme behandelt, in Kap. 12 Matrizen- und Determinantengleichungen (Eigenwertprobleme). Indirekte Verfahren zur Lösung solcher Systeme wie Iteration und Relaxation sind in Kap. 13 zusammengefaßt. In Kap. 14 werden solche Methoden zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen und Integralgleichungen angegeben, die die Auflösung von

Gleichungssystemen erfordern. Ein eigenes Kap. (15) ist der Interpolation, numerischen Differentiation und Integration von Funktionen zweier Variabler gewidmet. Im 16. und letzten Kapitel wird noch die numerische Lösung linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung in zwei Variablen kurz behandelt. Vier Anhänge enthalten eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln der vorangegangenen Kapitel. Viele Beispiele sind im Text des Buches eingestreut, und am Ende eines jeden Kapitels findet man reichlich Übungsaufgaben. *G. Hämmerlin.*

● **Kunz, Kaiser S.:** *Numerical analysis*. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Co., Inc. 1957. XV, 381 p. \$ 8.—.

Das Ziel dieses Buches ist, die Differenzenmethode so darzustellen, daß sie zur numerischen Lösung verschiedenster Probleme der angewandten Mathematik unmittelbar Verwendung finden kann. Dies ist in ausgezeichneter Weise gelungen, so daß dieses Lehrbuch eine wertvolle Bereicherung der Literatur über praktische Analysis darstellt. Eine Vollständigkeit konnte nicht angestrebt werden, — so fehlen z. B. Ausgleichsrechnung und harmonische Analyse, — jedoch findet sich hier vieles, was bisher nur in oft schwer zugänglichen Zeitschriften publiziert war. Methodisch neu dürften die Interpolationsformeln bei mehreren Veränderlichen und die Näherungsformeln für mehrfache Integrale dargestellt sein, die angegebenen Schemata sind auf die Verwendung von Rechenmaschinen direkt zugeschnitten. Nach der Behandlung der numerischen Lösung algebraischer Gleichungen folgen die Methoden der Interpolation und die Summation von Reihen, dann die numerische Differentiation und Integration. Das Hauptstück bildet die Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, sowie von Integralgleichungen. Der Fehlerabschätzung bei der numerischen Berechnung wird, soweit nicht schon im Text, im Anhang besonderes Augenmerk geschenkt. Durchgerechnete Beispiele und gut gewählte Aufgaben sind eine wertvolle Ergänzung, so daß dieses Buch das Verständnis für die numerischen Methoden sicher weitgehend fördern wird.

F. Selig.

Derwidué, L.: *Une méthode par séparation de calcul des racines complexes des équations algébriques*. *Mathesis* 66, 354—359 (1957).

Le schéma de Routh permet de déterminer le nombre des racines de $f(z) = 0$ à partie réelle positive. En posant $z = z' + h$ on peut déterminer le nombre des racines à partie réelle supérieure ou égale à h . En faisant varier h on arrive à isoler les racines ayant des parties réelles différentes puis à les calculer approximativement. On améliore ensuite par la méthode de Newton. L'auteur donne deux exemples relatifs à des équations dont les racines sont connues à l'avance. *J. Kuntzmann.*

● **Greenwald, Dakota Ulrich:** *Linear programming. An explanation of the simplex algorithm*. New York: The Ronald Press Co. 1957. \$ 4,75.

Krastiń, A. F.: *Einige Bemerkungen über das Rechnen mit Krakowianen und seine Anwendung beim Verfahren der kleinsten Quadrate*. *Izvestija Akad. Nauk Latvijk. SSR* 2 (127), 107—110 (1958) [Russisch].

Foote, Richard J.: *A modified Doolittle approach for multiple and partial correlation and regression*. *J. Amer. statist. Assoc.* 53, 133—143 (1958).

A method for obtaining multiple and partial correlation and regression coefficients on desk calculators is presented that is efficient and highly flexible. Insofar as possible, the computations parallel those used when fitting interrelated systems of equations by the limited information approach. Efficient methods for (1) coding the data, (2) interchanging, adding or eliminating variables, and (3) obtaining standard errors of the function or of forecasts are included.

Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Ehrmann, Hans: *Ein abstrakter Satz zur Konvergenzzeugung und Konvergenzverbesserung für Iterationsverfahren bei nichtlinearen Gleichungen*. *Z. angew. Math. Mech.* 37, 252—254 (1957).

Es wird ein „abstrakter“ Satz betr. die Konvergenz des Iterationsverfahrens zur Lösung einer Operatorgleichung in einem linearen metrischen Raum mit Distanz

in einem halbgeordneten linearen Raum aufgestellt, aus dem sich bekannte Ergebnisse von J. Schröder [Math. Z. **66**, 111—116 (1956); Z. angew. Math. Mech. **36**, 168—181 (1956)] und J. Weissinger (dies. Zbl. **46**, 341) gewinnen lassen. Hinsichtlich des Beweises wird auf eine spätere Veröffentlichung verwiesen.

H. Schwerdtfeger.

Wilf, Herbert S.: An open formula for the numerical integration of first order differential equations. Math. Tables Aids Comput. **11**, 201—203 (1957).

La formule proposée pour l'intégration de l'équation $y' = f(x, y)$ consiste à écrire, avec une erreur en h^4 , y_2 au moyen de $y_0, y_1, f(x_0, y_0), f(x_1, y_1)$ puis y_1 au moyen de $y_0, y_1, f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)$. La formule est donc implicite en y_1 . Ce défaut disparaît naturellement si l'équation est linéaire. Appliquée à l'équation $y' = 1 + y, y(0) = 2$ la méthode donne des résultats extrêmement voisins de ceux trouvés par la méthode de Runge-Kutta.

J. Kuntzmann.

● **Richtmyer, Robert D.:** Difference methods for initial value problems. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Nr. 4.) New York: Interscience Publishers, Inc. 1957. XII, 240 p., 29 illustr. \$ 6,50.

82 Seiten „Allgemeine Betrachtungen“ (Anfangswertaufgaben, Differenzengleichungen mit Fehler-, Konvergenz- und Stabilitätsfragen, Lineare Operatoren im Banachraum, Äquivalenz- und Konsistenz-Theoreme) und 140 Seiten „Anwendungen“ (Diffusions-, Transport-, Wellen-, Schwingungs- und hydrodynamische Gleichungen) vermitteln durch die Diskussion neuer, vornehmlich amerikanischer Entwicklungen (John v. Neumann, Peter Lax, Robert D. Richtmyer u. a. m. an der Universität New-York, z. Teil unter dem Protektorat von Richard Courant, und in Los Alamos auf Anregung der „Atomic Energy Commission“) den Eindruck, welche „... revolution of some sort became due in the field of numerical methods with the advent of modern computing machines“. Verf. fordert mit einem Seitenblick auf die moderne Physik und Technik vom Mathematiker „... to be a little more flexible about accepting the empirical approach and we must persuade the practical man to attach more importance to a real basic understanding of the methods he uses“, denn für eine Reihe wichtiger Anwendungen gilt „... the existing mathematical theory is generally inadequate (because of non-linearities and variability of the coefficients) and we have recourse to a combination of intuition and experimental evidence“. — Verf. verwendet vielfach funktionalanalytische Begriffsbildungen, wobei Hilberträume gegenüber Banachräumen stark zurücktreten. Wir nennen die wichtigsten behandelten Fragen: 1. Verhalten der Gitterpunktsfehlerbeträge a) bei unbeschränkter Vergrößerung der Argumente für feste Maschenweiten; d. h. Stabilitätsuntersuchungen, b) bei unbeschränkter Verkleinerung der Maschenweiten für feste Koordinaten; d. h. Konvergenzuntersuchungen. 2. Konvergenzgüte, Verfahrens- und Abrundungsfehler. 3. Konstruktion von Differenzengleichungen mit stabilen und schnell konvergierenden Lösungen. 4. Methoden zur Lösung der Differenzengleichungen. Für lineare Probleme basiert die Diskussion dieser Fragen auf einem allgemeinen Theorem von Peter Lax, durch das in gewissem Sinne die Äquivalenz von Stabilität und Konvergenz gesichert werden kann. Lax definiert zunächst „sachgemäße“ (properly posed) Anfangswertaufgaben. Für die zugehörigen Differenzengleichungen formuliert er eine Verträglichkeitsbedingung (consistency condition), die im wesentlichen sichert, daß die Differenzengleichung die gegebene Anfangswertaufgabe besser als eine andere approximiert. Er definiert Stabilität der Näherungen durch die Forderung, daß gewisse Operatoren gleichmäßig beschränkt sein sollen. Das Theorem besagt dann: Für sachgemäße Aufgaben, deren Differenzengleichungen der Verträglichkeitsbedingung genügen, ist Stabilität notwendig und hinreichend für Konvergenz der Näherungen gegen die wahren Lösungen, und zwar

für beliebige Anfangswerte. Die Theorie wird entwickelt für Probleme

$$du(t)/dt = A u(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad u(0) = u_0.$$

Darin ist $u(t)$ eine einparametrische Familie von Elementen eines Banachraumes \mathfrak{B} und $u_0 \in \mathfrak{B}$; t reell und A ein linearer Operator (der bei Lax auch noch von t abhängen darf). Gleichungen höherer Ordnung sind bekanntlich darauf umschreibbar, und auch gewisse Integrodifferentialgleichungen werden erfaßt. Für reine lineare Anfangswertaufgaben im Falle konstanter Koeffizienten wird eine auf v. Neumann zurückgehende notwendige (zuweilen auch hinreichende) Bedingung für Stabilität diskutiert. Auch für variable Koeffizienten bzw. nichtlineare Gleichungen liegen Ansätze vor. Darüber hinaus ist man auf Experimente und heuristische Betrachtungen angewiesen. Befriedigende strenge Fehlerabschätzungen sind nur in seltenen Fällen möglich.

G. Bertram.

Albrecht, J. und W. Uhlmann: Differenzenverfahren für die 1. Randwertaufgabe mit krummlinigen Rändern bei $\Delta u(x, y) = r(x, y, u)$. Z. angew. Math. Mech. **37**, 212—224 (1957).

Für $\Delta u = r(x, y, u)$ werden systematisch durch Taylorabgleich gewöhnliche Differenzengleichungen und Mehrstellengleichungen für quadratische, Dreiecks- und Sechsecks-Netze aufgestellt. Insbesondere wird die Erfassung krummliniger Ränder in randnahen Gitterpunkten durch unregelmäßige Sterne diskutiert. Für regelmäßige „Entartungen“ ergeben sich bekannte Formeln.

G. Bertram.

Kotal, Miroslav: Relaxationsmethode. Österreich. Ingenieur-Arch. **11**, 93—102 (1957).

Elementare Erläuterung von Differenzen- bzw. Relaxationsmethoden in der Anwendung auf ebene Randwertaufgaben der Poissonschen Differentialgleichung. Beispiel: Stirnfeld eines Dreiphasengenerators. Lösungssingularitäten werden bei der Laplaceschen Differentialgleichung in den Ursprung transformiert und nach Einführung von Polarkoordinaten durch Ansätze der Form $u = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu r^\nu \cos \nu \varphi$ erfaßt.

G. Bertram.

Sheldon, J. W., B. Zondek and M. Friedman: On the time-step to be used for the computation of orbits by numerical integration. Math. Tables Aids Comput. **11**, 181—189 (1957).

Cette étude est consacrée à l'évaluation des erreurs dans l'intégration approchée des équations différentielles de l'orbite d'un corps céleste par les formules de Cowell. Les calculs sont poussés jusqu'au bout dans le cas d'une orbite circulaire. Pour des formules dont l'ordre est compris entre 6 et 14 une petite table donne le nombre minimum de pas par période assurant la stabilité et l'erreur de chute correspondante. Les AA. montrent ensuite comment déterminer la longueur du pas compte tenu du problème à résoudre et du matériel de calcul dont on dispose (l'erreur d'arrondi est également prise en considération).

J. Kuntzmann.

Juncosa, M. L. and David Young: On the Crank-Nicolson procedure for solving parabolic partial differential equations. Proc. Cambridge philos. Soc. **53**, 448—462 (1957).

Das Problem $u_{xx} = u_i$; $u(0^+, t) = u(1^-, t) = 0$ ($t \geq 0$), $u(x, 0^+) = f(x)$ ($0 < x < 1$) kann nach dem Vorschlag von Crank-Nicolson (1947) näherungsweise mit der für beliebige $M^2 \cdot \Delta t > 0$ stabilen ($M = (\Delta x)^{-1} = \text{pos. ganzzahlig}$) Differenzengleichung

$$U_M(x, t + \Delta t) - U_M(x, t) = \frac{1}{2} M^2 \Delta t [U_M(x + \Delta x, t + \Delta t) + U_M(x - \Delta x, t + \Delta t) + U_M(x + \Delta x, t) + U_M(x - \Delta x, t) - 2 U_M(x, t + \Delta t) - 2 U_M(x, t)]$$

gelöst werden. Die Verff. beweisen die Konvergenz: Ist $f(x)$ für $0 \leq x \leq 1$ beschränkt und stetig mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen x_i mit endlichen Sprüngen c_i , $\sum |c_i| = \text{konvergent}$, $f(x) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-))$ mit vorhandenen Grenzwerten

werten, so ist in den Gitterpunkten bei beliebigem $t_0 > 0$ für $t \geq t_0$ und $0 \leq x \leq 1$ gleichmäßig $\lim_{M \rightarrow \infty} U_M = u$, sofern für alle hinreichend großen M gilt $\Delta t < M^{-1} \sqrt[3]{t_0 / 3 \log M}$.

Unter verschiedenartigen Zusatzvoraussetzungen über $f(x)$ läßt sich die Konvergenzordnung untersuchen. In den Gitterpunkten mit $t \geq t_0$ erhalten die Verff. für $M \rightarrow \infty$ Formeln vom Typ $\overline{|U_M - u|} = O(g(M))$; wobei für g je nach Voraussetzungen im Unendlichen verschwindende Funktionen wie etwa $M^{-\alpha}$ ($1 \leq \alpha \leq 2$) oder $\omega(M^{-1})$ (ω = Stetigkeitsmodul von $f(x)$) bzw. $M^{-1} \omega_1(M^{-1})$ (ω_1 = Stetigkeitsmodul von $f'(x)$) auftreten. Die Ergebnisse werden dann auf den Fall bilinearer Interpolation von U_M zwischen den Gitterpunkten ausgedehnt. *G. Bertram.*

Albrecht, Julius: Zum Differenzenverfahren bei parabolischen Differentialgleichungen. *Z. angew. Math. Mech.* **37**, 202—212 (1957).

Der Verf. diskutiert für nichtlineare Gleichungen vom Typ $\Delta u - K u_t = r(P, t, u)$ (Formeln von Milne für $r \equiv 0$ verallgemeinernd; $P = x$ bzw. (x, y)) und $u_{xxxx} + K^2 u_{tt} = r(x, t, u)$ gewöhnliche Differenzengleichungen und Mehrstellengleichungen (letztere sind numerisch i. a. zu bevorzugen!) unter den Gesichtspunkten der Genauigkeit und der Stabilität in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite und Auswahl der zu verwendenden Gitterpunkte in quadratischen, Dreiecks- und Sechsecks-Netzen. Das Runge-Kutta-Prinzip erspart die iterative Gleichungsauflösung. Für krummlinige Bereiche werden „irreguläre finite Ausdrücke“ bereitgestellt. Das Schrödersche Lösungsverfahren ist anwendbar. *G. Bertram.*

Evans, G. W., R. Brousseau and R. Keirstead: Errata for „Stability considerations for various difference equations derived for the linear heat conduction equation“. *J. Math. Physics* **36**, 294—295 (1957).

Corretti alcuni evidenti errori di stampa relativi ad un loro precedente lavoro (cfr. questo *Zbl.* **70**, 128), gli AA. espongono una nuova discussione dell'errore di arrotondamento nello schema alle differenze considerato. *G. Sestini.*

Sobol', I. M.: Über eine Iterationsmethode zur Berechnung von Eigenwerten. *Uspechi mat. Nauk* **12**, Nr. 3(75), 377—380 (1957) [Russisch].

In der vorliegenden Note wird durch ein Gegenbeispiel von B. L. Roždestvenskij gezeigt, daß die in der Arbeit von V. J. Berry und C. R. de Prima (s. dies. *Zbl.* **46**, 136) aufgestellte Iterationsmethode zur Berechnung der Eigenwerte λ_n von $(p u')' - q u + \lambda w u = 0$ für gewisse Randbedingungen nicht monoton konvergiert, im Gegensatz zu einer Behauptung in dieser Arbeit. Weiterhin wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Methode aufgestellt, welche für hinreichend große n stets erfüllt ist. *H. Schwerdtfeger.*

Schweizer, Berthold: On approximate eigenvalues obtained by the method of least squares. *J. Math. Physics* **36**, 284—288 (1957).

Verf. beschreibt die Erscheinung, daß bei angenäherter Berechnung reeller Eigenwerte λ nach der Methode der kleinsten Quadrate die Näherungswerte Λ normalerweise komplex ausfallen. Bei der Eigenwertaufgabe $M y + \lambda N y = 0$ in einem Intervall $a \leq x \leq b$ mit linearen Differentialoperatoren M, N und linearen Randbedingungen werde ein Ansatz $v = \sum_{j=1}^n a_j f_j$ gewählt, wobei die f_j die Randbedingungen erfüllen. Es sei $\varepsilon(x, \lambda, a_j) = M v + \lambda N v$ der Defekt, und die Parameter a_j genügen dann gemäß der Forderung $\int_a^b \varepsilon^2 dx = \text{Min}$ einem linearen homogenen Gleichungssystem mit der Determinante $D(\lambda)$. Ist nun $D(\Lambda) = 0$ für ein reelles Λ , so ist Λ Eigenwert mit v als Eigenfunktion und Λ ist Doppelwurzel der Gleichung $D(\lambda) = 0$. Wenn also durch einen Ansatz mit endlich vielen f_j keine Eigenfunktion darstellbar ist, fallen die Wurzeln Λ von $D(\lambda) = 0$ sicher komplex

aus. Die gleiche Erscheinung tritt auch bei linearen homogenen Integralgleichungen 2. Art mit reellen Eigenwerten auf. L. Collatz.

Mikeladze, Š. E.: Numerische Differentiation im Komplexen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 18, 385—392 (1957) [Russisch].

Für eine im die Punkte a, a_1, \dots, a_m , ($a_\nu = a + t_\nu H$) enthaltenden Gebiet reguläre Funktion $f(z)$ wird mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel und der vom Verf. früher [Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 18, 3—10 (1957)] angegebenen Umformungen die Darstellung

$$H^k f^{(k)}(a) = \sum_{\nu=1}^m l_\nu^{(k)}(0) f(a + t_\nu H) + R,$$

$$R = H^m \sum_{\nu=0}^k \nu! \binom{k}{\nu} H^\nu f\left(a, \underbrace{a, \dots, a}_{\nu+1}, a_1, \dots, a_m\right) \left[\frac{d^{k-\nu}}{dt^{k-\nu}} \prod_{p=1}^m (t - t_p) \right]_{t=0},$$

gewonnen; hierbei bedeutet $f\left(a, \underbrace{a, \dots, a}_{\nu+1}, a_1, a_2, \dots, a_m\right)$ die dividierte Differenz

(Steigung) $(m + \nu)$ -ter Ordnung mit sich $(\nu + 1)$ -mal wiederholendem Argument a

und $l_\nu(t) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq \nu}}^m \frac{t - t_p}{t_\nu - t_p}$. Die Steigungen können durch Integrale ausgedrückt

und dem Modul nach abgeschätzt werden. Besondere Wahl für t_1, t_2, \dots, t_m ergibt verschiedene Formelgruppen. Z. B. wird, wenn die t_ν die Wurzeln der Kreisteilungsgleichung $t^m - 1 = 0$ sind, die genaue Formel

$$\frac{H^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m t_\nu^{m-k} f(a + t_\nu H) - H^{m+k} f\left(a, \underbrace{a, \dots, a}_{k+1}, a + t_1 H, \dots, a + t_m H\right)$$

gewonnen. Die Wahl $z_{\pm \nu} = a + H t_{\pm \nu}$, $t_0 = 0$ und $t_\nu = -t_{-\nu}$ ($\nu = 0, 1, \dots, r$) als Interpolationsstellen führt zu der Interpolationsformel:

$$f(a + t H) = (-1)^r \left(\prod_{\nu=1}^r (t^2 - t_\nu^2) \right) \left(\prod_{\nu=1}^r t_\nu^2 \right)^{-1} f(a) \\ + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r \left(t \prod_{\nu=1}^r (t^2 - t_\nu^2) \right) \left(t_\nu^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (t_\nu^2 - t_k^2) \right)^{-1} \left[\frac{f(a + t_\nu H)}{t - t_\nu} + \frac{f(a - t_\nu H)}{t + t_\nu} \right] + R_r,$$

$$R_r = f(a + t H, a, a \pm t_1 H, \dots, a \pm t_r H) H^{2r+1} t \prod_{\nu=1}^r (t^2 - t_\nu^2).$$

Die Formeln für die zu berechnenden Ableitungen werden durch aufeinanderfolgende Differentiation dieses Ausdrucks nach t und darauf durch Nullsetzen von t erhalten. Für ein reelles $H = h$ und für auf der reellen Achse liegende $a, a \pm t_\nu h$ ($\nu = 1, \dots, r$) ergeben sich als Sonderfall Formeln für numerische Differentiation, die Verf. in seinem Lehrbuch [Numerische Methoden der Analysis (dies. Zbl. 52, 349), § 127] bereits angegeben hat. Mit Hilfe dieser Ergebnisse wird die Interpolationsformel

$$f(a + t H) = f(a) + \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m \frac{t_\nu t^{m-t}}{t - t_\nu} f(a + t_\nu H) \\ - H^{m+1} \sum_{\nu=1}^{m-1} H^{\nu-1} t^\nu f\left(a, \underbrace{a, \dots, a}_{\nu+1}, a + t_1 H, \dots, a + t_m H\right) + R_m,$$

$$R_m = \frac{H^m t^m}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^m (z-a-tH)} dz,$$

entwickelt, wobei C einen Kreis mit dem Mittelpunkt a bedeutet, in welchem $f(z)$ regulär ist. Vereinfachungen ergeben sich für $a = 0$ und $H = 1$, und darauf für

$t = 1$. In ähnlicher Weise wird die Quadraturformel

$$\int_a^{a+H} f(z) dz = H \left\{ f(a) + \sum_{\nu=1}^m A_{\nu} f(a + t_{\nu} H) \right\} \\ - H^{m+1} \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{H^{\nu}}{\nu+1} f\left(\underbrace{a, a, \dots, a}_{\nu+1}, a + t_1 H, \dots, a + t_m H\right) + R$$

abgeleitet, in welcher

$$A_{\nu} = \frac{1}{m} \int_0^1 \frac{t_{\nu}^m - t}{t - t_{\nu}} dt = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{t_{\nu}^{m-k}}{k+1} \text{ und } R = \frac{H^{m+1}}{2\pi i} \int_0^1 t^m \left[\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^m (z-a-tH)} dz \right] dt$$

bedeuten. Durch Fortlassen des Restgliedes und der die dividierten Differenzen enthaltenden Summe, sowie durch die spezielle Wahl $a = 0$, $H = 1$, $m = 4$, also $t = +1, -1, +i, -i$, ergibt sich für Polynome nicht höheren als dritten Grades als Anwendungsbeispiel die genaue Formel.

$$\int_0^1 f(t) dt = f(0) + \frac{1}{48} \{ -5 f(-1) + 13 f(1) + (3i - 4) f(-i) - (3i + 4) f(i) \}.$$

G. Feldmann.

Peirce, William H.: Numerical integration over the planar annulus. J. Soc. industr. appl. Math. 5, 66—73 (1957).

Zur Auswertung von Doppelintegralen über Gebieten, die sich zu dem betreffenden Zweck in einen Kreisring transformieren lassen, werden Produktsummen benutzt. Nach gehörigen allgemeinen Betrachtungen werden die im Gaußschen Sinne bestmöglichen Formeln angegeben, wobei diejenigen mit 16 bzw. 64 Stützpunkten näher betrachtet und durch Beispiele geprüft werden.

E. J. Nyström.

Kiš, O.: Eine Bemerkung über die mechanische Quadratur. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 8, 473—476 (1957) [Russisch].

Verf. beweist ausgehend von P. Turans Quadraturformel (dies. Zbl. 45, 336)

$$\int_{-1}^1 \frac{g(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=0}^{2r} \lambda_{\nu}^{(k)} g\left(\cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi\right),$$

welche für rationale Polynome $g(x)$ von niedrigerem Grade als $2(r+1)n-1$ mit $r \geq 0$ gilt, die für $r = 0$ in eine von Hermite angegebene Quadraturformel übergeht und von $g(x)$ unabhängige Koeffizienten $\lambda_{\nu}^{(k)}$ hat, daß für ein gerades trigonometrisches Polynom $f(t)$ von nicht höherer Ordnung als $2(r+1)n-1$ hieraus

$$\int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{\pi}{n \cdot r!^2} \sum_{\varrho=0}^r \frac{s_{\varrho}}{4^{\varrho} n^{2\varrho}} \sum_{\nu=1}^n f^{(2\varrho)}\left(\frac{2\nu-1}{2n} \pi\right)$$

folgt, wenn $s_{r-\nu}$ ($\nu = 0, 1, \dots, r$) die elementarsymmetrischen Funktionen für die Zahlen $1, 4, 9, \dots, r^2$ bedeuten. Den Satz kleidet er anschließend in die Form:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{(r+1)n-1} a_k \cos kt, \text{ mit}$$

$$a_k = \frac{2}{n \cdot r!^2} \sum_{\varrho=0}^r \frac{s_{\varrho}}{4^{\varrho} n^{2\varrho}} \sum_{\nu=1}^n [f(t) \cos kt]_{t=\pi(2\nu-1)/2n}^{(2\varrho)} \quad (k = 1, 2, \dots, (r+1)n-1).$$

Eine analoge Formel gilt auch für allgemeine trigonometrische Polynome von nicht höherem Grade als $(r+1)n-1$:

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{2\pi}{n \cdot r!^2} \sum_{\varrho=0}^r \frac{s_{\varrho}}{n^{2\varrho}} \sum_{\nu=0}^{n-1} f^{(2\varrho)}\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right).$$

Auch hier können für die Koeffizienten den oben angeführten analoge explizite Ausdrücke angegeben werden.

G. Feldmann.

Salzer, Herbert E.: Equally-weighted quadrature formulas for inversion integrals. *Math. Tables Aids Comput.* **11**, 197—200 (1957).

Zur numerischen Berechnung des komplexen Umkehrintegrals der Laplace-Transformation werden in der Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pz}}{p} F(p) dp = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F(p_j)$$

die Zahlen p_j so bestimmt, daß die Formel für jedes Polynom $F(p)$ in $1/p$ vom Grad n richtig wird. Es werden für $n = 1$ bis 10 die Werte p_j , $z_j = 1/p_j$ und die Koeffizienten der Polynome, die die z_j zu Nullstellen haben, angegeben. *G. Doetsch.*

● Kuščenko, V. S.: **Der logarithmische Rechenstab.** [Logarifmičeskaja linejka.] 4. überarb. Aufl. Leningrad: Staatlicher Unionsverlag für Schiffbauindustrie 1958. 62 S. R. 1,60 [Russisch].

Vorliegende 4. verbesserte Auflage enthält eine klare, einführende Beschreibung des Rechenstabes und seiner Skalen, sowie zahlreiche Übungsbeispiele; abschließend wird die Verwendung des Rechenstabes für die Lösung beliebiger algebraischer oder transzendenter Gleichungen (Iterationsmethode) und für die Lösung linearer Gleichungssysteme besprochen. *G. Feldmann.*

● Chrenov, L. S.: **Kleine Rechenmaschinen. Kurzer Leitfaden.** [Malye vyčislitel'nye mašiny. Kratkoe spravočnoe rukovodstvo.] Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1957. 154 S. R. 3,60 [Russisch].

Eine für den Rechner gedachte Beschreibung einer ganzen Reihe von (nicht druckenden) Vierspezies-Tischrechenmaschinen. Das Büchlein gibt einen guten Überblick über sowjetische Maschinen dieser Art, besonders Volltastaturmaschinen. Im Anhang eine Reziprokentafel bis 4000. *G. Beyer.*

● Pavlikov, A. A.: **Die schnellaufende elektronische Rechenmaschine der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Der Magnetspeicher.** [Bystrodejstvjuščaja elektronnaja sčetnaja mašina Akademii Nauk SSSR. Magnitnoe zapominajuščee ustrojstvo.] Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1957. 80 S. R. 4,20 [Russisch].

Technische Beschreibung des 1951 bis 1954 entwickelten Magnetspeichers der BESM. Er besteht aus einer Trommel, vier Magnetbandgeräten und der Lochstreifenrein- und -ausgabe. *G. Beyer.*

Niemz, Werner: **Anwendung elektronischer Digitalrechner zur Lösung flugmechanischer Probleme.** *Z. Flugwiss.* **6**, 47—52 (1958).

Die in dieser Arbeit behandelten flugmechanischen Probleme führen auf lineare Differentialgleichungssysteme von total 5. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Als erstes Teilproblem ist die Stabilität des Systems zu untersuchen. Zu diesem Zweck wird das charakteristische Polynom des Systems (offenbar durch Entwicklung der λ -Determinante) gebildet und es werden dessen Nullstellen bestimmt. — Als zweite Teilaufgabe sind die Differentialgleichungen des Systems mit gewissen Störgliedern zu integrieren, was mit Differenzenmethoden geschieht. — Es wird dargelegt, wie die Lösung dieser beiden Teilprobleme mit einem Rechenautomaten zweckmäßig organisiert wird. *H. Rutishauser.*

Ulanov, G. M.: **On a generalization of the deflection accumulation theory and its use for determining autooscillations in generators.** *Doklady Akad. Nauk SSSR* **113**, 54—57 (1957) [Russisch].

Die Regelgröße eines stabilen Kreises genüge (im Bildbereich der Laplace-Transformation) einer Beziehung der Form $\Phi(s) L\{x(t)\} = g(s) L\{f(t)\}$. $\Phi(s)$ und $g(s)$ sind Polynome. Ferner sei $X(t)$ eine lineare Verbindung aus der Regelgröße $x(t)$, ihren Ableitungen und Integralen mit festen Koeffizienten. Verf. bestimmt das Maximum von $X(t)$ unter der Nebenbedingung, daß die Störfunktion $f(t)$ dem Betrage nach beschränkt ist: $|f(t)| \leq l$, und gibt eine technische Anwendung.

W. Hahn.

Bellman, Richard: On the application of the theory of dynamic programming to the study of control processes. Proc. Sympos. nonlinear Circuit Analysis Vol. 6, 199—213 (1957).

Der n -dimensionale Vektor $x(t)$ beschreibe den Zustand eines physikalischen Systems, dessen zeitliches Verhalten durch ein von außen steuerbares Kontrollsystem mit dem Verlauf $f(t)$ (k -dimensionaler Vektor) beeinflussbar sei. Für $t \geq 0$ genüge $x(t)$ einer (i. a. nichtlinearen) Funktionalgleichung $L(x, f) = 0$ bei gewissen Anfangsbedingungen. $f(t)$ soll so bestimmt werden, daß $x(t)$ einem idealen Verlauf $y(t)$ möglichst nahe kommt, d. h. eine von $f(t)$ abhängige Norm $I(f) = \|x - y\|$ soll minimisiert werden. Zunächst werden typische Fälle diskutiert. Verf. zeigt dann, wie das spezielle Kontrollprozeß-Variationsproblem

$$I(y) = \int_0^T F(x(t), y(t)) dt = \text{Max.} \quad \text{bei} \quad \dot{x} = G(x, y), \quad x(0) = c$$

durch Finitisierung approximativ ersetzt werden kann durch ein „multistage decision problem“ des „dynamic programming“ von folgendem Typus: Ausgehend von einem Vektor $p = p_0$ wird vermöge der durch Parametervektoren q_v ($v = 1, \dots, N$) festlegbaren Transformationen $p_v = T(p_{v-1}, q_v)$ eine Folge von Vektoren p_v bestimmt. Jeder Transformation ist ein skalarer „output“-Wert $r_v = r(p_{v-1}, q_v)$ zugeordnet. Die q_v sind so zu bestimmen, daß der „return“ $R_N = \sum_{v=1}^N r_v$ maximal wird. Die Durchrechnung auf einer elektronischen Rechanlage ist auf diesem Wege möglich. Beispiele mit „Van der Polschen“ Gleichungen, das „Bang-Bang“-Kontrollproblem und ein stochastischer Kontroll-Prozeß beschließen die Arbeit.

G. Bertram.

Rozenvasser (Rosenwasser), E. N.: The stability of non-linear controlled systems. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 582—585 (1958) [Russisch].

Verf. bezieht sich auf das Buch von A. I. Luře „Einige nichtlineare Probleme aus der Theorie der selbsttätigen Regelung“, Moskau-Leningrad 1951 (Übersetz. Berlin 1957), und studiert Regelungssysteme, die durch folgende Gleichungen beschrieben werden:

$$\eta'_k = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha + h_k f(\sigma), \quad k = 1, \dots, n; \quad \sigma = \sum_{\alpha=1}^n j_\alpha \eta_\alpha.$$

Er setzt sich das Ziel, in den Spezialfällen $n = 5, 6$ ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität „im Großen“ der trivialen Lösung $\eta_1 = \dots = \eta_n = 0$ zu formulieren. Hierzu benutzt er eine Methode von Luře, die darin besteht, daß man eine besondere Ljapunovsche Funktion nimmt und die darin auftretenden n unbestimmten Koeffizienten geeignet wählt. Sie genügen einem gewissen quadratischen Gleichungssystem, für das Luře ein Lösungsverfahren angibt. Verf. wendet dieses auf seine Spezialfälle an und findet als Kriterium eine Anzahl von Bedingungen für vier Hilfsgrößen, die sich aus den Koeffizienten der linearisierten Grundgleichungen berechnen lassen.

R. Reißig.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Cafiero, Federico: Sul principio esteso delle probabilità totali. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 5, 85—102 (1957).

Verf. betrachtet eine erzeugende Familie G eines gerichteten und relativ complementären Systems R von Teilmengen einer Menge G , sowie die Ausdehnung einer Funktion $\varphi_G(\cdot)$ auf R , die endlich oder abzählbar additiv auf G ist. Mit Hilfe dieser Begriffe werden einige Bedingungen für R gegeben, damit zu einer endlich

additiven Funktion φ auf R ein $R' \subset R$ existiert, so daß φ auf R' abzählbar additiv ist. O. Onicescu.

Walsh, John E.: An experimental method for obtaining random digits and permutations. *Sankhyā* 17, 355—360 (1957).

Ein Wurf mit $2n$ Münzen erzeugt eine gerade oder ungerade Anzahl von „Zahl“ bzw. „Wappen“, die wechselnd, nach dem Ausfall eines Vorwurfs als 0 bzw. 1 oder umgekehrt festgelegt werden. Hieraus werden auf dem Wege über die Dualdarstellung Zufallszahlen und zufällige Permutationen gebildet. Es handelt sich nur um eine technische Beschreibung des Verfahrens. F. Wever.

Rényi, A.: A remark on the theorem of Simmons. *Acta Sci. math.* 18, 21—22 (1957).

Verf. erklärt in diesem Aufsätze, auf welche Weise die von Haáz gegebene Verallgemeinerung der Simmonsschen Ungleichungen, denen zufolge

$$F_{n,p}(h/n) > 0 \quad \text{für} \quad p = h/n < \frac{1}{2}$$

gilt, wobei

$$F_{n,h}(p) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} - \sum_{r=h}^n \binom{n}{r} p^2 (1-p)^{n-r}$$

gesetzt wurde, eine direkte Folge der Simmonsschen Ungleichungen selbst ist. Dies wird bewerkstelligt mit Hilfe der Formel

$$\sum_{r=0}^s \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = (n-s) \binom{n}{s} \int_p^1 t^s (1-t)^{n-s-1} dt.$$

O. Onicescu.

Isii, Keiiti: Some investigations of the relation between distribution functions and their moments. *Ann. Inst. statist. Math.* 9, 1—11 (1957).

Mit Benutzung der Sätze über trigonometrische Approximation von D. Jackson (vgl. z. B. Achieser, Vorlesungen über Approximationstheorie, dies. Zbl. 52, 290) wird gezeigt, daß für zwei stetige Dichten $f(x)$, $g(x) \geq 0$ in $(0, 1)$, die gleiche Momente der Ordnung $1, 2, \dots, 2n-1$ besitzen, gilt

$$\int |f(x) - g(x)| dx \leq C \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

wo ω eine gemeinsame Schranke der Stetigkeitsmoduln von f und g , C eine universelle Konstante (≤ 5) ist. Ein weiteres Ergebnis betrifft beschränkte Dichten und benötigt nicht die Stetigkeitsmoduln. D. Morgenstern.

Ibragimov, I. A.: Remark on a probability distribution of class L . *Teor. Veroyatn. Primen.* 2, 121—124, engl. Zusammenfassg. 124 (1957) [Russisch].

Früher herrschte die Meinung, alle Verteilungen der Klasse L seien unimodal [vgl. B. W. Gnedenko und A. N. Kolmogorov, Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsvariabler, Moskau-Leningrad (1949); englische Übersetzung s. dies. Zbl. 56, 360]. Verf. widerlegt dies durch Angabe von Gegenbeispielen. W. Richter.

Laha, R. G.: An example of a nonnormal distribution where the quotient follows the Cauchy law. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 44, 222—223 (1958).

Ogawa, Junjiro: A limit theorem of Cramér and its generalizations. *J. Elisha Mitchell sci. Soc.* 73, 261—267 (1957).

Beweis des folgenden Satzes: x_n, y_n, z_n seien k -dimensionale stochastische Vektoren, A eine Matrix von der Ordnung $k \times k$ mit konstanten Elementen $y_n = A x_n + z_n$. Für $n \rightarrow \infty$ konvergiere die Verteilung von x_n gegen eine bestimmte Grenzverteilung und z_n in Wahrscheinlichkeit gegen 0. Dann konvergiert y_n gegen eine Grenzverteilung, definiert durch $y = A x$. Verf. gibt Verallgemeinerungen dieses Satzes für den Fall, daß an Stelle von x_n eine Funktion $f(x_n)$ mit bestimmten Eigenschaften betrachtet wird. W. Saxer.

Rogers jr., Hartley: A note on the law of large numbers. *Proc. Amer. math. Soc.* 8, 518—520 (1957).

The author produces a counter example to the following form of the weak law of large numbers which was considered true for some 25 years. Let $\{X_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, be a sequence of independent random variables with mean $E[X_k] = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Let $F_k(x)$ be the distribution function of X_k . In order that

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

for every $\varepsilon > 0$ it is necessary and sufficient that as $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sum_{k=1}^n \int_{|x| > n} dF_k(x) \rightarrow 0, & \text{ii)} \quad & \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \int_{|x| < n} x dF_k(x) \rightarrow 0, \\ \text{iii)} \quad & \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \int_{|x| < n} x^2 dF_k(x) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

J. M. Shapiro.

Kolmogorov, A. N.: Deux théorèmes asymptotiques uniformes pour des sommes des variables aléatoires. *Teor. Verojatn. Primen.* 1, 426—435, français. Zusammenfassg. 436 (1957) [Russisch].

Let $\xi = \sum \xi_k$ where $\{\xi_k\}$ is a sequence of independent random variables with $F_k(x) = P\{\xi_k < x\}$ and $\Phi(x) = P\{\xi < x\}$. Let \mathfrak{E} be the set of unitary distributions and Θ be the set of infinitely divisible distributions. The theorems are: Theorem 1: If $E_k(x-l) - \varepsilon \leq F_k(x) \leq E_k(x+l) + \varepsilon$, where $E_k \in \mathfrak{E}$ ($k = 1, \dots, n$), $\varepsilon > 0$; then there is a constant C and a $\Psi \in \Theta$ such that for $L > 2l > 0$ and $\delta = C \max[Ll^{-1}(\log Ll^{-1})^{1/2}, \varepsilon^{1/5}]$, $\Psi(x-L) - \delta \leq \Phi(x) < \Psi(x+L) + \delta$. Theorem 2. When the ξ_k have equal distributions there is a C and a $\Psi \in \Theta$ such that for all x , $|\Psi(x) - \Phi(x)| \leq Cn^{-1/5}$. The proofs depend on seven lemmas whose proofs are elsewhere or left to the reader. The reader must also correct some misprints in their statements as well as elsewhere in the paper.

L. Cote.

Bühlmann, Hans: Le problème „limite central“ pour les variables aléatoires échangeables. *C. r. Acad. Sci., Paris* 246, 534—536 (1958).

The author announces several results concerning the limit behavior of exchangeable sequences of random variables.

L. Cote.

Agnew, Ralph Palmer: Estimates for global central limit theorems. *Ann. math. Statistics* 28, 26—42 (1957).

Let $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ be independent identically distributed random variables with mean 0 and variance 1. Let $F(x)$ be the common distribution function of the ξ_k and let $F_n(x)$ be the distribution function of $n^{-1/2}(\xi_1 + \dots + \xi_n)$. Let $\Phi(x)$ be the normal distribution 0, 1. It has previously been shown by the author (this *Zbl.* 55, 367) that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|^p dx = 0$$

if $p > \frac{1}{2}$. The author investigates the rapidity of convergence of the integral in the above limit in the case when $p = 2$ and a general formula is obtained for

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|^2 dx$$

involving the characteristic functions of $F(x)$ and $\Phi(x)$ (C. G. Esseen, this *Zbl.* 60, 287). In particular it is shown that

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|^2 dx = \frac{1}{6\pi^{1/2}n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

if $F(x)$ is the symmetric binomial distribution and

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|^2 dx = \frac{3}{1280 \pi^{1/2} n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

if $F(x)$ is the uniform distribution over $[-3^{1/2}, 3^{1/2}]$.

J. M. Shapiro.

Parzen, Emanuel: A central limit theorem for multilinear stochastic processes. *Ann. math. Statistics* **28**, 252—256 (1957).

A stochastic process $\{X(t), t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ is said to be multilinear if it can be represented as follows:

$$X(t) = \sum_{v_1, \dots, v_k = -\infty}^{\infty} a(v_1, \dots, v_k) W_1(t - v_1) \cdots W_k(t - v_k)$$

where k is a positive integer, the $a(v_1, \dots, v_k)$ are constants defined for $v_1 = 0, \pm 1, \dots$ and $i = 1, \dots, k$ such that

$$\sum_{v_1, \dots, v_k = -\infty}^{\infty} |a(v_1, \dots, v_k)| < \infty$$

and the $W_i(t)$ are random variables defined for $t = 0, \pm 1, \dots$ and $i = 1, \dots, k$ such that the k -dimensional random vectors $W(t) = [W_1(t), \dots, W_k(t)]$ are independent. Also it is assumed that $E[|W_1(t_1) \cdots W_k(t_k)|^\alpha] \leq c$ for any t_1, \dots, t_k for some $\alpha > 2$ where c is a constant. The following central limit theorem is proved: Let $X(t)$ be a multilinear process and let $S(n) = X(1) + \cdots + X(n)$. If $\liminf_n n^{-1} \sigma^2[S(n)] > 0$ then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{S(n) - E[S(n)]}{\sigma^2[S(n)]} < a \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx$$

for any real number a .

J. M. Shapiro.

Saad, K. Nasr: On the convergence, basic distributions and classification of abstract random variables. *Teor. Verojatn. Primen.* **2**, 178—186, russ. Zusammenfassg. 186 (1957).

Für eine Familie zufälliger Größen X_λ mit Werten in einem uniformen Raum (definiert durch die Pseudometriken d_t) werden untersucht: 1. Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit, d. h. für jedes t, ε, η existiert eine Filtermenge A aus dem λ -Raum, so daß für $\lambda \in A$ gilt

$$P\{d_t(X, X_\lambda) < \eta\} > 1 - \varepsilon.$$

2. Starke Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit, d. h. für jedes t, ε, η existiert eine Filtermenge A , so daß gilt

$$P\{d_t(X, X_\lambda) < \eta \text{ für alle } \lambda \in A\} > 1 - \varepsilon.$$

3. Fast sichere Konvergenz. Diese Konvergenzbegriffe werden verglichen untereinander und mit denen von Frechet und Doss, sowie bei Änderung der Topologie des λ -Raumes. In Analogie zu dem n -dimensionalen Fall werden Verteilungsgesetze betrachtet, die die Zufallsgrößen charakterisieren, die Zufallsgrößen klassifizieren lassen, und Konvergenz nach Verteilung behandelt.

D. Morgenstern.

Geffroy, Jean: Sur la notion d'indépendance limite de deux variables aléatoires. Application à l'étendue et au milieu d'un échantillon. *C. r. Acad. Sci., Paris* **245**, 1291—1293 (1957).

Es werden zwei Arten von asymptotischer Unabhängigkeit der Folgen von zufälligen Größen X_n und Y_n definiert; Art a) Die globale Unabhängigkeit (der Folgen X_n und Y_n): $F_n(x, y) - A_n(x) B_n(y) \rightarrow 0$ gleichmäßig mit $1/n$, wobei $F_n(x, y) = \Pr\{X_n < x, Y_n < y\}$ und $A_n(x), B_n(y)$ die Gesetze der respektiven Randverteilungen sind. Art b) Die strikte Unabhängigkeit (der Folge Y_n von der Folge X_n). Mit $B_n^*(y; x) = \Pr\{Y_n < y | X_n = x\}$ und $E_n = \{x | \max | B_n^*(y, x) - B_n(y) | < \varepsilon\}$, gelte $\Pr(X_n \in E_n) \rightarrow 1$ und $n \rightarrow \infty$. Unserer Meinung nach, könnte die Be-

zeichnung „strikt“ unterbleiben. Die Definition zeigt mit genügender Klarheit, daß im allgemeinen diese Unabhängigkeit — welche stärker ist als die der Art a) — nicht symmetrisch ist. Verf. gibt folgendes Theorem: Wenn X_n und Y_n unabhängig der Art a) oder der Art b) sind, dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Stabilität von $X_n + Y_n$ die Stabilität von beiden, X_n und Y_n . Andererseits, falls Y_n und Z_n die Extrema einer Stichprobe sind, dann ist Y_n unabhängig der Art b) in bezug auf X_n , woraus die interessante Folgerung entspringt: Damit die Ausdehnung $Y_n - Z_n$ der Stichprobe stabil sei, ist es notwendig und hinreichend, daß Y_n und Z_n stabil seien. Unter dieser letzten Bedingung konvergiert das Mittel $M_n = \frac{1}{2} (Y_n + Z_n)$ in Wahrscheinlichkeit gegen einen bestimmten Wert.

O. Onicescu.

Ciucu, George: *Propriétés asymptotiques des chaînes à liaisons complètes*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 23, 11—15 (1957).

Eine Kette mit vollkommenen Verbindungen auf einer abzählbaren Menge S von Zuständen ist vom Typus (B), wenn — wie immer die Wege $c, c' \in W$ und die Zustände x_1, \dots, x_s, y sein mögen gilt:

$$(1) \quad P_y^1(u_{x_1, \dots, x_s}(c)) = P_y'(u_{x_1, \dots, x_s}(c')) (1 + \theta \varepsilon_s),$$

wobei $|\theta| < 1$, $\varepsilon_s > 0$, $\sum_s \varepsilon_s < \infty$. Die Kette verifiziert die Bedingung (K), falls ein $\lambda > 0$ existiert, so daß $P_x'(c) \geq \lambda P_x'(c')$ für $c, c' \in W$. Verf. beweist, daß die Ketten des Typus (B), die außerdem die Bedingung (K) erfüllen, ein genügend starkes ergodisches Theorem erfüllen: Es existiert eine Wahrscheinlichkeit P_A^∞ , definiert für jeden Teil A von $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_s$, für welche

$$(2) \quad |P_A^n(c) - P_A^\infty| \leq \eta(n)$$

ist, wobei $\eta(n)$ mit $n \rightarrow \infty$ eine Reihe von positiven Zahlen durchläuft. Wir heben aus diesem Paragraphen hervor, daß, falls $\eta(n) = L e^{-\lambda \sqrt{n}}$, man von einer Konvergenz im normalen Sinne sprechen kann; und zwar von der Konvergenz der Summe einer zufälligen Größe mit ihren Transformaten vermittelt der Kette. Im zweiten Teil der Arbeit definiert Verf. Ketten (mit vollkommenen Verbindungen), die eine Dichte besitzen, durch Übergangswahrscheinlichkeiten der Form $P^n(c, A) = \int_A \varphi^n(c, x) P(dx)$, wobei die Rekurrenzregel der Dichten

$$\varphi^n(c, A) = \int_A \varphi(c, z) \varphi^{n-1}(u_z(c), x) P(dz)$$

ist. Wenn zudem eine Bedingung vom Typus (K^*) erfüllt ist, und zwar wenn ein λ existiert, so daß $\varphi(c, x) \geq \lambda \varphi(c', x)$ für jeden der Wege c, c' und jedes $x \in S$, dann wird, ebenso wie in den abzählbaren Fällen, eine ergodische Ungleichheit vom Typus (2) verifiziert.

O. Onicescu.

Lévy, Paul: *Processus strictement markoviens*. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1490—1492 (1958).

Hier wird unterschieden zwischen (1) schwacher Markoff-Eigenschaft, definiert dadurch, daß für jede monotone Folge t_n die $X(t_n)$ eine Markoff-Kette bilden, und (2) der strikten Markoff-Eigenschaft, definiert durch die bei der Bedingung $X(t_0) = x$ bedingte Unabhängigkeit jedes in $t \geq t_0$ definierten Ereignisses von der Vergangenheit. (1) hängt mit den den Chapman-Kolmogoroffschen Übergangsgleichungen genügenden Übergangswahrscheinlichkeiten zusammen und (2) scheint mit der von K. L. Chung [vgl. D. G. Austin, Proc. nat. Acad. Sci., USA 44, 575—578 (1958)] bewiesenen Fundamentealeigenschaft Markoffscher Prozesse zusammenzuhängen. Eine ausführlichere Darstellung wird vom Verf. in Aussicht gestellt.

D. Morgenstern.

Reuter, G. E. H.: *Denumerable Markov processes and the associated contraction semigroups on l* . Acta math. 97, 1—46 (1957).

Es sei \mathfrak{P} ein Markoffscher Prozeß mit abzählbarem Zustandsraum E und Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$, $t \geq 0$, wobei insbesondere $\sum_{\alpha} p_{i\alpha}(t) \leq 1$ und $p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0+} p_{ij}(t)$. Gegenstand der Arbeit sind Beziehungen zwischen \mathfrak{P} und der infinitesimalen Erzeugenden Ω der zu \mathfrak{P} gehörenden Halbgruppe von Operatoren P_t , definiert im Banachschen Raum l der Folgen $x = (x_{\alpha})_{\alpha \in E}$ mit der Norm $\|x\| = \sum_{\alpha} |x_{\alpha}|$ durch $(P_t x)_j = \sum_{\alpha} p_{\alpha j}(t) x_{\alpha}$. Der Prozeß \mathfrak{P} heiße „redlich“ (honest), wenn $\sum_{\alpha} p_{i\alpha}(t) = 1$, d. h. $\|P_t x\| = \|x\|$, sobald $x_{\alpha} \geq 0$. Es sei $q_{ij} = p'_{ij}(0)$. Den Satz von Austin [Proc. nat. Acad. Sci. USA 41, 224—226 (1955)] etwas verschärfend zeigt der Verf. zunächst, daß die p_{ij} und die „Unredlichkeitsfunktionen“ $d_i = 1 - \sum_{\alpha} p_{i\alpha}$ unter der Annahme $q_{ii} > -\infty$ im Bereich $t \geq 0$ stetig differenzierbar sind und daß $P_t u^i$ mit $(u^i)_j = \delta_{ij}$ für $t > 0$ im Definitionsbereich von Ω liegt. Zur Formulierung von neuen Bedingungen für die Gültigkeit der Kolmogoroffschen Gleichungen (B) $p'_{ij}(t) = \sum_{\alpha} q_{i\alpha} p_{\alpha j}(t)$ und (F) $p'_{ij}(t) = \sum_{\alpha} p_{i\alpha}(t) q_{\alpha j}$ wird ein Operator Q durch $(Qx)_j = \sum_{\alpha} x_{\alpha} q_{\alpha j}$ definiert im Bereich aller x aus l , für die diese Reihen absolut konvergieren mit $Qx \in l$, und Q_0 sei die Einschränkung von Q auf den Unterraum aller x mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Komponenten. (B) gilt dann und nur dann, wenn $Q_0 \subseteq \Omega$, und (F) dann und nur dann, wenn $\Omega \subseteq Q$. Dies dient zur Untersuchung der Eindeutigkeit von \mathfrak{P} bei vorgegebenen Zahlen q_{ij} mit $q_{ij} \geq 0$ für $i \neq j$ und $\sum_{\alpha} q_{i\alpha} \leq 0$, nachdem der von Feller (dies. Zbl. 25, 347) konstruierte spezielle derartige Prozeß, \mathfrak{F} , durch gewisse Minimal-eigenschaften charakterisiert wurde. Ist $\sum_{\alpha} q_{i\alpha} = 0$ für jedes i , so liegt Eindeutigkeit dann und nur dann vor, wenn \mathfrak{F} redlich ist. Für den entgegengesetzten Fall werden Eindeutigkeitskriterien innerhalb der beiden Klassen der Prozesse \mathfrak{P} , die (B) bzw. (F) erfüllen, angeben, und über die Struktur beliebiger Prozesse \mathfrak{P} zu vorgegebenen q_{ij} finden sich Teilresultate. Einige Beispiele werden behandelt, insbesondere sehr ausführlich der allgemeine Geburten- und Todesprozeß. K. Krickeberg.

Kendall, David G. and G. E. H. Reuter: The calculation of the ergodic projection for Markov chains and processes with a countable infinity of states. Acta math. 97, 103—144 (1957).

Gegeben sei eine zeitlich homogene Markoffsche Kette mit abzählbar vielen Zuständen und Übergangsmatrizen in r Schritten $P^r = (p^r_{ij})$, $r = 0, 1, \dots$, oder ein entsprechender Markoffscher Prozeß mit Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$, $t \geq 0$ (vgl. das vorangegangene Referat). Es bedeute Ω im ersten Fall die Matrix $P - I$ und im zweiten Fall die infinitesimale Erzeugende des Prozesses. Behandelt wird das Problem, bei gegebenem Ω die Grenzwerte $\pi_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n p^r_{ij}$ bzw. $\pi_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$, deren Existenz wohlbekannt ist, zu berechnen. Im Gegensatz zu früheren iterativen Methoden erfolgt die Lösung mit Hilfe der „positiven“ Nullräume $N^+(\Omega)$ und $N^+(\Omega^*)$ in den Banachschen Vektorverbänden l und m , wobei sich auch die eindeutige Festlegung gewisser Vektoren innerhalb dieser Räume auf die Ordnungsrelationen in l und m stützt. Sodann sei eine unendliche Matrix $Q = (q_{ij})$ mit $\sum_{\alpha} q_{i\alpha} = 0$ und $q_{ij} \geq 0$ für $i \neq j$ gegeben, die einen Markoffschen Prozeß durch $q_{ij} = p'_{ij}(0)$ eindeutig bestimmt (zu einem Kriterium dafür vgl. das vorangegangene Referat). Es wird gezeigt, daß $N^+(\Omega) = N^+(Q)$ und $N^+(\Omega^*) = N^+(Q^*)$, so daß die π_{ij} in diesem Fall auch mit Hilfe von Q bestimmt werden können. Einige Beispiele, unter anderen Warte- und Geburten- und Todesprozesse, illustrieren die Theorie. Die Verf. behandeln sodann das ursprüngliche Problem, im kontinuierlichen Fall, rein als Problem in einem Banachschen Raum, ähnlich wie in einer

früheren Arbeit (dies. Zbl. 71, 111), in der ein allgemeiner Banachscher Raum an Stelle von l betrachtet wurde. Der idempotente Operator Π in l mit der Matrix (π_{ij}) erzeugt eine direkte Zerlegung $l = R(\Pi) \oplus N(\Pi)$, wobei $R(\Pi)$ der Wertevorrat von Π ist. Es gilt $R(\Pi) = N(\Omega)$, doch über $N(\Pi)$ läßt sich nur beweisen, daß es zwischen der starken und der c_0 -schwachen abgeschlossenen Hülle von $R(\Omega)$ liegt. Beispiele zeigen, daß gleichzeitig in beiden Inklusionen das Ungleichheitszeichen gelten kann. Zu jeder Inklusion wird für das Gleichheitszeichen ein Kriterium samt wahrscheinlichkeitstheoretischer Interpretation angegeben.

K. Krickeberg.

Martynov, A. V.: On local infinite divisibility of Markoff processes. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 752—755 (1957) [Russisch].

A family of distribution functions $\{P(t, x)\}$, where t runs over an arbitrary set T of the real axis, is differentiable on the right at t_0 , if

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 + 0 \\ t \in T}} \frac{1}{t - t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1) dx P(t, x) = \varphi_{t_0}^+(z),$$

$\varphi_{t_0}^+(z)$ is a bounded function on $(-\infty, +\infty)$ and the limit is uniform with respect to z in every bounded interval. If a family of distribution functions $\{P(t, x)\}$, $t \in T$, has this property, then $\varphi_{t_0}^+(z)$ is given by Lévy-Xinčîn's formula

$$\varphi_{t_0}^+(z) = iz m_{t_0}^+ + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d_x G_{t_0}^+(x).$$

Further, necessary and sufficient conditions assuring the differentiability of a family of distribution functions are given. It is also shown that certain smoothness conditions imply the above differentiability property for a time homogeneous Markov process. A generalization of Lévy-Xinčîn's formula is then presented for time homogeneous and space non-homogeneous Markov processes. As the author states, analogous properties are valid also for time non-homogeneous processes. Next the converse problem is investigated. Given the function

$$\alpha(x, z) = iz m(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{iz\xi} - 1 - \frac{iz\xi}{1+\xi^2} \right) \frac{1+\xi^2}{\xi^2} d_\xi G(x, \xi),$$

under the conditions here imposed concerning $m(x)$ and $G(x, y)$, there exists a time homogeneous Markov process with transition function $P(t, x, y)$, differentiable on the right at $t = 0$ for any $x \in (-\infty, +\infty)$. Finally, an uniqueness theorem is obtained (see also Ito Kiyosi, this Zbl. 54, 58).

R. Theodorescu.

Good, I. J.: Legendre polynomials and trinomial random walks. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 39—42 (1958).

Bei einem „trinomial random walk“ bestehen die Wahrscheinlichkeiten p_{-1} , p_0 , p_1 , daß ein Punkt um -1 , 0 oder 1 sich auf einer Geraden bewegt. Verf. betrachtet solche Bewegungen, die nie über den Ausgangspunkt nach links führen. Wenn e_n die Wahrscheinlichkeit bedeutet, beim n -ten Schritt in den Ausgangspunkt zurückzukehren, so gilt die folgende Gleichung $e_n = D^n P_n(p_0/D)$ wobei $D^2 = p_0^2 - 4p_{-1}p_1$ und P_n das n -te Legendresche Polynom bedeuten. Dazu ist e_n der Faktor von z in der Entwicklung $(p_{-1}z^{-1} + p_0 + p_1z)^n$. Verf. gibt asymptotische Darstellungen für e_n .

W. Saxon.

Good, I. J.: Random motion and analytic continued fractions. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 43—47 (1958).

Beim „trinomial random walk“ (vgl. vorstehendes Referat) seien die Wahrscheinlichkeiten p_{-1} , p_0 , p_1 von der Lage n des Punktes abhängig und deshalb mit $p_{n,-1}$, $p_{n,0}$ und $p_{n,1}$ bezeichnet. $d_{r,s}$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt nach s Schritten wieder erreicht werde. $d_{r,s}^R$ bzw. $d_{r,s}^L$ seien die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, wenn der Punkt nicht nach links von r bzw. rechts gehen darf. Die erzeugenden Funktionen $R_{(z)}^R$ bzw. $R_{(z)}^L$ lassen sich als für kleine $|z|$ konvergente Kettenbrüche darstellen.

W. Saxon.

Takács, L.: On a probability problem concerning telephone traffic. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 8, 319—324 (1957).

Suppose that at a telephone center calls are arriving at the time instants $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ ($0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots < \infty$), where $\{\tau_n\}$ forms a sequence of recurrent events with corresponding distribution function $F(x)$. Consider now a busy-signal system and let m be the number of available channels. The durations of the connections are identically distributed independent random variables which are independent also of $\{\tau_n\}$ and with distribution function

$$H(x) = 1 - e^{-\mu x} \text{ if } x \geq 0, = 0 \text{ if } x < 0.$$

If $\eta(t)$ is the number of busy channels at t , let η_n be $\eta(\tau_n - 0)$; $\{\eta_n\}$ forms a Markov chain (see the author's paper reviewed this Zbl. 72, 355) and $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_n = j\} = P_j$ ($j = 0, 1, \dots, m$)

exists and is independent of the initial distribution of η_1 . If $\mathbf{P}\{\eta_1 = j\} = P_j$ ($j = 0, 1, \dots, m$), $\{\eta_n\}$ forms a stationary Markov chain, denoted by $\{\eta_n^*\}$. Let Π_m be the probability of a call being lost for the case of the stationary Markov chain $\{\eta_n^*\}$ ($\Pi_m = P_m$). The author gives a new simple proof of the following formula

$$\Pi_m = 1 \left/ \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \prod_{k=1}^j \frac{1 - \varphi_k}{\varphi_k} \right. \quad (m = 1, 2, \dots),$$

where the empty product is 1 and $\varphi_k = \int_0^\infty e^{-k\mu x} dF(x)$. Next the author considers a connected servicing problem and shows that it is identical to the above mentioned one. R. Theodorescu.

Takács, L.: On a queueing problem concerning telephone traffic. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 8, 325—335 (1957).

At a telephone center calls are arriving at the time instants $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ ($0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots < \infty$). Let us consider a waiting system and denote by m the number of available channels. It is assumed that: A) $\{\tau_n\}$ is a sequence of recurrent events with corresponding distribution function $F(x)$, $\alpha = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$,

$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x)$ for non-negative real s ; B) if χ_n is the duration of the connection realised by the call arriving at τ_n , then χ_n ($n = 1, 2, \dots$) are identically distributed independent positive random variables which are also independent of $\{\tau_n\}$ and with distribution function

$$\mathbf{P}\{\chi_n \leq x\} = 1 - e^{-\mu x} \text{ if } x \geq 0, = 0 \text{ if } x < 0.$$

Let $\eta(t)$ be the total number of the busy channels and the calls in the waiting line at the instant t , $\eta(\tau_n - 0) = \eta_n$ ($n = 1, 2, \dots$). If $m\alpha\mu > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ ($k = 0, 1, \dots$) exists, is independent of the initial state and

$$P_k = \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} U_r \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \quad = A \omega^{k-m} \quad (k = m, m+1, \dots),$$

where ω is the only root of the equation $\int_0^\infty e^{-\mu\omega(1-\omega)x} dF(x) = \omega$ for which $0 < \omega < 1$ and

$$U_r = A C_r \sum_{j=r+1}^m \frac{\binom{m}{j}}{C_j(1-\varphi_j)} \left[\frac{m(1-\varphi_j) - j}{m(1-\omega) - j} \right],$$

$$A = 1 \left/ \left\{ 1 - \omega + \sum_{j=1}^m \frac{\binom{m}{j}}{C_j(1-\varphi_j)} \left[\frac{m(1-\varphi_j) - j}{m(1-\omega) - j} \right] \right\} \right.,$$

$$C_j = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_1} \dots \frac{\varphi_j}{1-\varphi_j}, \quad \varphi_j = \int_0^\infty e^{-j\mu x} dF(x).$$

If $B_r = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k$ is the r -th binomial moment of $\{P_k\}$, then

$$B_r = U_r + \frac{A}{1-\omega} \sum_{j=0}^r \binom{m}{j} \left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^{r-j} \text{ if } r < m, \quad = \frac{A \omega^{r-m}}{(1-\omega)^{r+1}} \text{ if } r \geq m.$$

Further, if $m \alpha \mu > 1$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, $\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\eta(t) = k\} = P_k^*$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) exists, is independent of the initial state and

$$P_0^* = 1 - \frac{1}{m \alpha \mu} - \frac{1}{\alpha \mu} \sum_{j=1}^{m-1} P_{j-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{m}\right),$$

$P_k^* = P_{k-1}/k \alpha \mu$ if $k = 1, 2, \dots, m-1$, $P_k^* = P_{k-1}/m \alpha \mu$ if $k = m, m+1, \dots$.

Finally, a stationary process $\{\eta(t)\}$ is defined such that $P\{\eta(t) = k\} = P_k^*$ for all t ($0 \leq t < \infty$); the distribution function of the waiting time of an arbitrary call has the expression

$$G^*(x) = 1 - A \exp[-m \mu (1-\omega)x]/(1-\omega) \quad (x \geq 0),$$

if the connections are realised in the order of the arrival of the calls. Analogous problems for a busy-signal system were considered by the author in a previous paper (this Zbl. 72, 355).

R. Theodorescu.

Pollaczek, Félix: Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparentes. Mém. Sci. math. 136, 122 p. (1957).

The theory of stochastic queues had its origin in telephone engineering starting with the famous investigations of Erlang. In recent years it has been applied to many different fields and has become more widely known. As a result the theory has been growing fast and the literature has expanded rapidly. The author of this monograph is one of the pioneers in this field, and he gives us a valuable survey of those problems that deal with a single server. The main tool is complex variable theory applied to the Laplace transform. This makes the derivations very elegant and the results precise and pretty. Of course one does not get this free; one has to impose conditions upon the original distributions, but they do not seem to restrict the practical use very much. The monograph contains a detailed discussion of the cases where the time points of arrival obey a Poisson or Bernoulli law of distribution. Distributions are derived for various quantities especially for the waiting time, both before and after statistical equilibrium has been reached. One chapter is devoted to the study of a general input, and another deals with the situation when service is refused if the server is occupied at the moment of arrival. The presentation is clear and makes the book very readable. The general theory is illustrated by application to a number of important special cases.

U. Grenander.

Gnedenko, B. V.: On a problem of mass service. Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR 1958, 477—478, russ. und engl. Zusammenfassg. 478—479 (1958) [Ukrainisch].

This paper is an answer to a question which has been raised by specialists in gas and electric design. There is a great number of power consumers. The intensity of consumption at any moment of time is a random variable. Making most general assumptions, the total consumption at arbitrary moments of time t_1, t_2, \dots, t_s for any integer s is a random vector whose distribution is close to normal.

Cuzzer, A.: Limiti e possibilità del concetto di informazione. Periodico Mat., IV. Ser. 36, 41—47 (1958).

Hirschman jr., I. I.: A note on entropy. Amer. J. Math. 79, 152—156 (1957).

Soient $f(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$ et $g(y) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\{-2\pi ixy\} dx \in L^2$ deux fon-

tions, telles que $\|f\| = \|g\| = 1$. Soit, de plus, $E[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \log \Phi(x) dx$.

L'A. démontre que (*) $E[|f(x)|^2] + E[|g(x)|^2] \leq 0$, dès que le terme de gauche a un sens. L'A. conjecture que l'inégalité peut être améliorée.

B. Mandelbrot.

Hatori, Hirohisa: On the distribution of completion times for random communication in the task-oriented group with a special structure. *Kodai math. Sem. Reports* 9, 23—33 (1957).

Consider a network with three parallel-connected branches $\overrightarrow{e c d}$, $\overrightarrow{d b e}$ and $\overrightarrow{d a e}$ between two points e and d , having respectively l , m , n links and let $T(l, m, n)$ be the task-oriented group with this network. In the present paper the author gives the distributions of completion times of $T(l, m, n)$ for the following cases: (I) $m = n \geq 2$; (II) $m = 1$, $n \geq 2$; (III) $m + 1 = n$, $m \geq 2$; (IV) $m + 1 < n \leq 2m$, $m \geq 2$; (V) $2m < n$, $m \geq 2$. It is supposed $m \leq n$ thanks to the symmetricity of m and n ; the case $m = n = 1$ is trivial. All other cases are included in the above mentioned ones.

R. Theodorescu.

Bellman, Richard and Robert Kalaba: Dynamic programming and statistical communication theory. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 43, 749—751 (1957).

Consider the following problem: Any of the signals $1, 2, \dots, M$ are transmitted, independently, in succession, with known probability that j has been sent when i is received. A gambler bets z_j ($j = 1, \dots, M$) that j has been transmitted ($z_j \geq 0$, $\sum z_j \leq x$) and receives $r_i z_i$ if i has in fact been transmitted. It is required to maximize the expected value of a function $\Phi(w)$ of the final total w , when this process is repeated N times, while the initial capital, represented by x , is reduced, after each stage, by the stakes $\sum_j z_j$ and increased by the gain $r_i z_i$. — The author formulates this problem by applying the principle of optimality of dynamic programming. In particular, when $\Phi(w) = \log w$, or w^a ($a > 0$), simpler results can be stated. — The case where the probability of a correct transmission depends on whether the previous signal was correctly transmitted is also mentioned. — Proofs are promised for a later publication.

S. Vajda.

Kemeny, John G. and J. Laurie Snell: Game-theoretic solution of baccarat. *Amer. math. Monthly* 64, 465—469 (1957).

This is a description of the solution of the two person version of the game of baccarat, known as chemin de fer. It is obtained by reducing the game matrix from 2×2^{88} to 2×5 . The solution is compared with other solutions obtained without benefit of today's game theory. The details will appear elsewhere. *J. E. L. Peck.*

Handscomb, D. C.: On the random disorientation of two cubes. *Canadian J. Math.* 10, 85—88 (1958).

Zwei kongruente Körper mit Symmetriegruppe (z. B. zwei Würfel) seien nach Zufall (unabhängig voneinander) orientiert. Man kann die Körper dann auf verschiedene Art durch Drehungen um Achsen durch den (gemeinsamen) Schwerpunkt zur Deckung bringen. Der kleinste dafür nötige Drehwinkel d heißt die Disorientierung der beiden Körper. Die Arbeit beschäftigt sich mit der Frage des Verteilungsgesetzes dieser Disorientierung bei zwei Würfeln. Durch Darstellung der Drehungen mittels normierter Quaternionenparameter nach Euler und Cayley wird die Frage auf elementare Flächenbestimmungen auf der Sphäre des E_4 zurückgeführt und durch einfache und anschauliche Rechnungen exakt erledigt. *J. K. Mackenzie und M. J. Thomson* (dies. Zbl. 78, 337) hatten für die Verteilung von d mittels der Monte-Carlo-Methode nur Schätzwerte gewonnen.

K. Strubecker.

Statistik:

• **Chacón, P. Enrique:** Lehrbuch der Statistik. Bd. 3. (Publicaciones de la Universidad de Deusto: Vol. 6.) Bilbao: Editorial El Mensajero del Corazón de Jesús 1958. XV, 319 p. 200 pesetas [Spanisch].

• **Fisher, Sir Ronald A. and Frank Yates:** Statistical tables for biological, agricultural and medical research. 5th ed. revised and enlarged. Edinburgh: Oliver & Boyd 1957. X, 138 p. 24 s. net.

Daß diese 1938 erstmalig erschienenen Zahlentafeln nun schon in 5-ter Auflage vorliegen, darf bereits als Bestätigung ihrer Eignung und Nützlichkeit gedeutet werden. Das Werk enthält ungefähr das Tafelmaterial, das der Biometriker Fisherscher Prägung für den täglichen Gebrauch benötigt. Zunächst Tafeln (I—V) der Normal-, Student-, χ^2 -, z - und F -Verteilung; der kritischen r -Werte in Stichproben aus Binormalverteilung mit $\rho = 0$ und für die Fishersche z -Transformation des Korrelationskoeffizienten (VII). Der Lösung des Behrens-Fisher-Problems sollen die von P. V. Sukhatme berechneten, weil auf dem Fiducialschluß beruhenden, allerdings wahrscheinlichkeitstheoretisch anfechtbaren Tafeln (VI) des Behrens-Fisher-Sukhatme-Tests dienen. Wenige, kurze Tafeln (VIII) sind der Beurteilung von Häufigkeiten, insbesondere der Prüfung von 2×2 -Tabellen, und Parameterschätzung von Binomial- und Poisson-Verteilung gewidmet, sowie daran anknüpfenden Fragen der bakteriologischen Technik; in der neuen Auflage tritt hinzu eine Tafel (VIII₃), die, auf Fishers eigenen Resultaten fußend, die Signifikanzprüfung periodischer Komponenten erlaubt. Eine Serie von Tafeln (IX—XII) dient der Probit-, Logitanalyse, Arcussinus- und Loglog- (d. h. $\ln \ln(1-p)$ -) Transformation, Tafel XIII der erbstatistischen Auswertung von Kreuzungsversuchen zur Faktorenkoppelung; Tafeln XV—XIX stellen für die Versuchsplanung nützliche lateinische Quadrate, unvollständige Blöcke etc. zusammen. Es folgen Tafeln (XX, XXI) der Erwartungswerte μ_r der Stufwerte (order statistics) in Stichproben aus Normalverteilung und ihrer Quadratsummen $\sum_{r=1}^n \mu_r^2$,

solche (XXII) der — bekanntlich für Kombinatorik und mathematische Statistik äußerst bedeutsamen — Stirling-Zahlen 2. Art, ferner ausgedehnte Tafeln (XXIII) der in der Regressionsanalyse zu verwendenden Orthogonalpolynome 1. bis 5. Grades und eine Tafel (XXIV) zur Erleichterung numerischer Integrationen. Zu den Tafeln (XXV—XXXII) der gewöhnlichen, natürlichen Logarithmen, Quadrate, Quadratwurzeln, Reziproken, trigonometrischen Funktionen, Fakultäten und deren Logarithmen tritt neu hinzu eine solche (XIV) der Funktionen $\frac{1}{2}(\text{Coj } x \pm \cos x)$, $\frac{1}{2}(\text{Sin } x \pm \sin x)$, $\text{Coj } x$ und $\text{Sin } x$. Das Werk schließt mit umfangreichen Tafeln (XXXIII) von Zufallszahlen und zufälligen Permutationen von 10 bzw. 20 Elementen und einer Zusammenstellung (XXXIV) für den Praktiker wichtiger Daten und Konstanten. — Der Gebrauch der Tafeln setzt großenteils sorgfältiges Studium der 37 Seiten umfassenden Einleitung voraus, in der Verff. die theoretischen Grundlagen der Tafeln, zumeist unter Hinweis auf einschlägige eigene Arbeiten, kurz skizzieren und ihre Verwendung an Zahlenbeispielen illustrieren, und in welcher abschließend Anleitungen zur Interpolation erteilt werden. Stoffauswahl und Darstellung scheinen somit den praktischen Bedürfnissen des im Buchtitel angesprochenen Abnehmerkreises in hohem Maße angemessen und rechtfertigen vollauf die weite Verbreitung und große Beliebtheit des Tafelwerkes in diesen Kreisen.

M. P. Geppert.

● **Fractional factorial experiment designs for factors at two levels.** (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series. No. 48.) Washington: Government Printing Office 1957. IV, 85 p. 50 cents.

The user of experimental designs, even when he has decided what type of design is most suitable for his purpose, is always confronted with the difficulty of working out a detailed plan adapted to the specific experiment he has in mind. Fortunately, his task has been considerably lightened by the publication of various collections of ready-made plans, covering a large area of possibilities. To these the National Bureau of Standards has made a valuable contribution by the publication of a short monograph presenting a large number of designs of the type known as fractional replicates. The work has been restricted to the more important case of factorial designs with each factor at two levels. It contains 125 plans for experi-

ments with 5 to 16 factors, using $1/2$ to $1/256$ replicates and requiring from 16 to 256 observations. The designs have been chosen so as to involve a minimum loss of information. A factorial effect was considered measurable if its aliases are interactions involving at least three factors, and the plans have been chosen so that all main effects and the maximum number of two-factor interactions are measurable in this sense. All plans allow for one-way elimination of heterogeneity (grouping into blocks), some of them for two-way elimination of heterogeneity (grouping into blocks and rows). Naturally, these facilities are optional and all plans can be used with complete randomization as well. With each plan are listed the two-factor interactions that are measurable if the plan is used completely randomized, with single grouping and with double grouping respectively, and in the latter cases the factorial effects that are confounded with blocks and with rows. Moreover, for each design is given a fundamental identity, from which the aliases of any factorial effect can be derived easily. Theoretical questions and the analysis of results are not discussed, but a short bibliography provides the reader with the necessary references.

Fr. J. J. Bezem.

Cox, D. R.: The use of a concomitant variable in selecting an experimental design. *Biometrika* 44, 150—158 (1957); Corrigenda: 44, 534.

The variance of the estimate of treatment effects can often be reduced by measuring a concomitant variable, which is strongly correlated with the yield. Various experimental arrangements and various estimation methods may be employed to utilize such concomitant measurements. The author compares the effectiveness of seven different methods. The criterion used by the author is the average of the variances of the differences between the estimates of the treatment effects.

H. B. Mann.

Smith, Fairfield H.: A multivariate analysis of covariance. *Biometrics* 14, 107—127 (1958).

Clark, Frank Eugene: Truncation to meet requirements on means. *J. Amer. statist. Assoc.* 52, 527—536 (1957).

Verf. berechnet Mittelwerte und Varianzen von Verteilungen, die aus gegebenen Normalverteilungen durch ein- oder zweiseitige Stützung entstehen, allgemein, und numerisch für Stützpunkte, die Vielfache von 0,25 sind. Die Ergebnisse werden benutzt zur Beantwortung der für die Qualitätskontrolle wichtigen Frage: Wie muß ich eine gegebene Normalverteilung stützen, damit die Mittelwerte von Stichproben vom Umfang n aus ihr gewisse vorgegebene Grenzen nur mit der Wahrscheinlichkeit r überschreiten? Als zu minimisierende Verlustfunktion kann man eine lineare Funktion von r und p , dem Grad der Stützung, betrachten. Weitere Untersuchungen über die zur Erfüllung gewisser Bedingungen für Stichproben erforderlichen Stützungen sollen folgen.

O. Ludwig.

Blalock jr., H. M.: Probabilistic interpretations for the mean square contingency. *J. Amer. statist. Assoc.* 53, 102—105 (1958).

Moore, P. G.: The ranges in small and correlated samples. *Trabajos Estadist.* 9, 3—12 (1958).

Kiefer, J. and Lionel Weiss: Some properties of generalized sequential probability ratio tests. *Ann. math. Statistics* 28, 57—74 (1957).

Es seien $f_1(x) = 1$ in $[0, 1]$ und $f_2(x)$ streng monoton in $[0, 1]$ mit $\int_0^1 f_2(x) dx = 1$ zwei Verteilungsdichten, die als Hypothesen H_1, H_2 in einem Sequentialtest miteinander verglichen werden sollen. Ein GSPRT (Generalized sequential probability ratio test) ist dann definiert durch die Vorgabe von Zahlen a_m, b_m und die Prüfung, ob in $b_m < \log f_2(X_i) < a_m$ für ein gewisses m zum ersten Male die Ungleichung nach einer Seite nicht mehr erfüllt ist. Es werde noch g_i als Dichtefunktion für $\log f_2(X_i)$ unter der Hypothese $H_i, i = 1, 2$, eingeführt. Es bezeichne $D_i(n, T)$ die Wahrschein-

lichkeit, daß der Test T unter Annahme der Hypothese H_i spätestens nach n Schritten zur Entscheidung führt. Dann gilt: Unter der Annahme, daß $g_i > 0$ fast überall, folgt aus $D_i(n, T') = D_i(n, T)$ die Gleichheit der Teste T und T' . Es wird noch die Zulässigkeit der GSPRT untersucht und ein Verfahren, $E n$ unter gewissen Nebenbedingungen zu optimieren.

F. Wever.

Hoffman, Paul J.: Predetermination of test weights. *Psychometrika* **23**, 85—92 (1958).

Mérie, Jean: Sur le calcul de la fonction «OC» du test binomial de Wald, à partir de la relation de récurrence de Pólya. *C. r. Acad. Sci., Paris* **245**, 1500—1502 (1957).

The author starts from a recurrence formula for $K(x, y)$ which he derived in a paper reviewed this Zbl. **66**, 124 (q. v. for definitions) and shows how to obtain a precise expression for the operating characteristic of Wald's binomial test, thereby generalizing a result of Pólya.

S. Vajda.

Mérie, Jean: Sur une méthode matricielle pour le calcul de la fonction O.C. du test binomial de Wald. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 884—887 (1958).

The author reverts to the problem previously dealt with (preceding review) and indicates a more convenient method of computing the operating characteristic of Wald's binomial test.

S. Vajda.

Sterrett, Andrew: On the detection of defective members of large populations. *Ann. math. Statistics* **28**, 1033—1036 (1957).

Rider, Paul R.: The midrange of a sample as an estimator of the population midrange. *J. Amer. statist. Assoc.* **52**, 537—542 (1957).

Es seien x_1 und x_n kleinster und größter Wert einer Stichprobe vom Umfang n aus einer Verteilung mit Dichte $f(x)$. Die Verteilung des Mittels $u = \frac{1}{2}(x_n + x_1)$ und des Halbabstandes $v = \frac{1}{2}(x_n - x_1)$ werden für einige vorgegebene $f(x)$ berechnet, und zwar für $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ ($-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$), für $f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$ ($-1 \leq x \leq 1$) und für $f(x) = \frac{3}{2}x^2$. In Tabellen werden für kleinere n die Streuungen von u mitgeteilt. — Schließlich wird noch die Wirksamkeit eines Tests untersucht, der bei den genannten Verteilungen u als Schätzfunktion für $E(x)$ verwendet.

F. Wever.

Raj, Des: On estimating parametric functions in stratified sampling designs. *Sankhyā* **17**, 361—366 (1957).

Eine geschichtete Stichprobe werde in k Schichten mit n_j Beobachtungen aus einer Gesamtheit von N_j Elementen ($j = 1, \dots, k$) entnommen. \bar{Y}_j seien die Mittel der Schichten, \bar{y}_j die beobachteten Stichprobenmittel aus den einzelnen Schichten ($j = 1, \dots, k$). — Geschätzt werden sollen $r \leq k$ Linearfunktionen $L_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} \bar{Y}_j$

($i = 1, \dots, r$) wozu $\hat{L}_i = \sum_{j=1}^p l_{ij} \bar{y}_j$ als Schätzfunktionen verwendet werden. Die Koeffizienten l_{ij} seien als bekannt vorausgesetzt. — Die zweckmäßige Auswahl der n_j wird beschrieben, einmal bei Minimierung der Kosten, dann bei Minimierung der Kosten und des Informationsverlustes und schließlich bei Minimierung der Streuung. Ein Zahlenbeispiel erläutert den Vorgang.

F. Wever.

Jaekel, K.: Verteilungen von Warte- und Anschlußzeiten. *Z. angew. Math. Mech.* **37**, 404—406 (1957).

x und y seien zwei normal-verteilte Zufallsgrößen mit dem Mittelwert μ und der Streuung $1/h$. Der Betrag ihrer Differenz ist dann ebenfalls eine Zufallsgröße, die in bestimmten Fragestellungen als Wartezeit interpretiert werden kann. Verf. bringt hierfür das Beispiel eines großen Schmelzofens, der von zwei kleinen Vorschmelzöfen mit den (normal-verteilten) Lieferzeiten x und y beschickt wird und erst dann angefacht werden kann, wenn das Schmelzgut des später anliefernden kleinen

Ofens vorliegt. $z = |x - y|$ ist hier die Wartezeit, die am großen Ofen durch Verzögerungen in der Anlieferung des Schmelzguts entsteht. Verf. untersucht die Verteilung dieser Wartezeit z und gelangt zu folgenden Ergebnissen: 1. z besitzt eine gestutzte Normalverteilung mit der Dichte: $w(z) = 2h(2\pi)^{-1/2} e^{-h^2 z^2/2}$; $z \geq 0$. 2. Ein Schätzwert (nach der Maximum-Likelihood-Methode) für den Parameter h ist: $\left(\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n z_v^2\right)^{1/2}$ (bei einer Stichprobe von n unabhängigen Meßwerten z_v). 3. Die Größe $h^2 \sum_{v=1}^n z_v^2$ ist nach einer χ^2 -Verteilung mit n Freiheitsgraden verteilt. 4. Daraus ergibt sich ein Prüftest zur Beurteilung zweier unabhängiger Stichproben $\{z_v\}$ und $\{Z_v\}$: Man berechne die Größe $F = \left(\frac{h^2 \sum_{v=1}^{n_1} z_v^2}{n_1}\right) / \left(\frac{h^2 \sum_{v=1}^{n_2} z_v^2}{n_2}\right)$, die unabhängig von h und nach einer F -Verteilung mit $(n_1; n_2)$ Freiheitsgraden verteilt ist. Verf. untersuchte ferner die Verteilung der Anschlußzeiten t (für den Arbeitsbeginn des dritten Ofens), d. i. der Zufallsgröße $t = \begin{cases} y & \text{wenn } y \geq x \\ |x & \text{wenn } y \leq x \end{cases}$, ohne jedoch so schöne Ergebnisse wie bei den Wartezeiten zu erhalten. Er konnte zwar die Verteilung und ihren Mittelwert und Streuung angeben; die Bestimmung von Schätzwerten nach der Maximum-Likelihood-Methode führte jedoch schon auf transzendente Bestimmungsgleichungen, so daß Verf. zum Prüfen zweier Stichproben das Heranziehen eines Rangtests empfiehlt.

B. Schneider.

Kovalenko, I. N.: Determining the correlation functions of some processes associated with serving problems. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1958, 480—481, russ. und engl. Zusammenfassg. 481 (1958) [Ukrainisch].

There are some instruments using power. The law of this utilization may be interpreted as a stochastic process generated by some sequence of independent random variables. The correlation function of the process is obtained.

Engl. Zusammenfassg.

Palmer, D. S.: A statistical model of some time series. *Nature* 181, 1677 (1958).

Bastenaire, François: Distributions statistiques des durées de vie à la fatigue et forme de la courbe de Wöhler. *C. r. Acad. Sci., Paris* 245, 136—139 (1957).

Ein direkter Ansatz für die Verteilungen der Lebensdauer von Versuchsobjekten bei wiederholter Beanspruchung (Ermüdung) bringt außerordentliche Schwierigkeiten mit sich. Es empfiehlt sich deshalb, von der Bruchwahrscheinlichkeit p auszugehen, die eine Funktion der Lebensdauer N (= Zahl der Wiederholungen) und der Belastungsintensität S ist: $p = F(S, N)$. Zur Ermittlung dieser Funktion $F(S, N)$ wurden bisher 3 Methoden angewandt, die darin bestehen, daß die Bruchwahrscheinlichkeit bei festgehaltenem S oder bei festgehaltenem N oder S als Funktion von N bei festgehaltener Bruchwahrscheinlichkeit p ermittelt wird. Zwischen diesen drei Verfahren müssen gewisse Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sein. Eine befriedigende Behandlung der Ermüdungserscheinungen konnte damit allerdings nicht erzielt werden. Verf. schlägt deshalb ein viertes Verfahren vor, das darin besteht, daß die Verteilung von N in eine solche von S transformiert wird und aus dieser Transformation auf die Wöhlerkurven (— Kurven gleicher Wahrscheinlichkeit) geschlossen wird; oder noch besser, daß von einer bestimmten Form der Wöhlerkurven ausgegangen wird und dann daraus die gesuchte Transformation hergeleitet wird. Verf. zeigt, daß man durch dieses Verfahren zu recht interessanten Ergebnissen gelangen kann, die gut mit den Experimenten übereinstimmen und befriedigende Aussagen über die Verteilung der Lebensdauer und die Form der Wöhlerkurven gestatten. Allerdings stehen diese Ergebnisse im Widerspruch zu einigen Sätzen und Prinzipien der bisherigen Theorie. Es sind also über diese Fragen noch weitere Untersuchungen erforderlich.

B. Schneider.

Weibull, Waloddi: Statistical handling of fatigue data and planning of small test series. *Flygtekn. Försöksanstalt, Meddel.* 69, 35 p. (1957).

Bei der statistischen Beschreibung der Ermüdungserscheinungen werden hauptsächlich bestimmte Kurvenscharen verwendet, in denen die Belastungsintensität S , die Zahl der Beanspruchungen (= Lebensdauer) N und die Bruchwahrscheinlichkeit (bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit) p miteinander verknüpft sind. Es ist sehr naheliegend, zur exakten empirischen Ermittlung dieser Kurvenscharen auf die Methoden der Regressionsanalyse zurückzugreifen. In dem Bericht werden die sogenannten Wöhlerkurven (SN -Kurven) betrachtet, für die sich — zumindest im oberen konkaven Teil der Kurve — die Beziehung $S = b N^{-c} + S_E$ mit den Parametern b , c und S_E bewährt hat. Beim Ausgleichen dieser Kurven sind 2 Fälle zu unterscheiden: 1. (P -case A) die Varianz von S ist homogen in N (d. h. sie hängt nicht von N ab); 2. (P -case B) die Varianz von $\log S$ ist homogen in N . Verf. betrachtet vor allem den ersten Fall. Dabei verwendet er die Transformation $U = N^{-c}$, bei der die Beziehung zwischen S und U linear wird und auch die Homogenität der Varianz von S bezüglich U erhalten bleibt. Es können also — wenn der Parameter c bekannt ist — die bekannten Formeln der linearen Regression herangezogen und Varianzen und Testgrößen berechnet werden. (Die Formeln sind in einem Anhang zusammengestellt.) Für den Fall, daß c unbekannt ist, hat Verf. 4 Schätzmethoden angegeben, von denen die ersten beiden darauf beruhen, daß die Residualstreuung zu einem Minimum gemacht werden soll, die letzten beiden sich weitgehend auf Erfahrungstatsachen stützen. Verf. erörtert weiter den Einfluß des Stichprobenumfangs auf die Genauigkeit der Tests und diskutiert die Frage nach dem optimalen Verhältnis, in dem die einzelnen Belastungsstufen S_i geprüft werden sollen. Die Methoden werden an einem ausführlichen Beispielmateriale demonstriert. Der Bericht dürfte mehr für Ingenieure als für Mathematiker bestimmt sein. Dementsprechend sind die mathematischen Ableitungen knapp gehalten und lassen manchmal auch die nötige Strenge vermissen. Die Beispiele sind gut gegliedert und übersichtlich zusammengestellt.

B. Schneider.

Tukey, John W.: Antithesis or regression? Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 923—924 (1957).

The author insists that the antithetic variate method (Hammersley and Morton, this Zbl. 71, 354 and Hammersley and Mauldon, this Zbl. 71, 355) is a special case of regression estimation, in order to discourage a separation of Monte Carlo theory from the classical theory of sampling.

S. Vajda.

Béjar, Juan: Praktische Berechnung der Regression auf der Basis des Medianwertes. Trabajos Estadíst. 8, 157—173, engl. Zusammenfassg. 173 (1957) [Spanisch].

This article explains a method to find out the regression line or plane by median similar to linear programming method. The regression line is $y = a + bx$ if $z = \sum |y_i - a - bx_i|$ is minimum. We calculate the intersection of two straight lines $i \cdot e$: $y_i = a + bx_i$ ($i = 1, 2$) and we shall verify if the point found out produces a minimum in z . If that did not happen, changing systematically the values or a and b we should have the solution. Also, the regression plane is $z = a + bx + cy$ if $Z = \sum |z_i - a - bx_i - cy_i|$ is minimum. We give, too, the disposition of data in order to make the shortest calculations, as you can see by the two examples.

Engl. Zusammenfassg.

Biomethe-matik. Versicherungsmathe-matik. Wirtschaftsmathe-matik:

Nozawa, Ken: Statistical studies on the populations of farm animals. I. Estimation of the effective population size. Proc. Japan Acad. 33, 217—220 (1957).

The author derives a formula to estimate the effective population size in which the unequalness of the numbers of breeding males and females as well as the variability of the numbers of progeny of each parent are taken into consideration. It is shown that the formula implies Wright's previous results as particular cases.

Y. Komatu.

Rao, C. Radhakrishna: Some statistical methods for comparison of growth curves. Biometrics 14, 1—17 (1958).

Hatheway, W. H. and E. J. Williams: Efficient estimation of the relationship between plot size and the variability of crop yields. *Biometrics* 14, 207—222 (1958).

Simpson, H. R.: The effect of sterilised males on a natural tsetse fly population. *Biometrics* 14, 159—173 (1958).

Harris, Eugene K.: On the probability of survival of bacteria in sea water. *Biometrics* 14, 195—206 (1958).

Ward jr., Joe H.: The counseling assignment problem. *Psychometrika* 23, 55—73 (1958).

A disposition index which provides information about each possible placement to be considered in a personnel classification situation is discussed. Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Audley, R. J.: The inclusion of response times within a stochastic description of the learning behavior of individual subjects. *Psychometrika* 23, 25—31 (1958).

A stochastic process applicable to the learning behavior of an individual subject is discussed. The process describes both the response times and the sequence of choices obtained from a situation involving two alternatives. Parameter estimates and techniques for assessing goodness of fit are considered. Zusammenfassg. des Autors.

● Hooker, P. F. and L. H. Longley-Cook: Life and other contingencies. Cambridge: At the University Press 1957. IX, 256 p. 20 s.

Laumans, B. A. M.: Valuation by groups for policies not involving life-contingencies with premium refund in event of prior death. *Verzekeerings-Arch.* 34, Actuar. Bijv. 78—86 (1957).

Für einen Bestand an Erlebensfallversicherungen mit Prämienrückgewähr bei vorzeitigem Ableben (Erlebensfallkapitalversicherung, Rentenversicherung mit Rückgewähr vor und nach Rentenbeginn) besteht bei Gliederung nach dem gleichen erreichten Alter $x + m$ die allgemeine, von Hage gegebene Beziehung für die Deckungskapitalien in einer Gruppe

$$\sum (K C_1)/D_{x+m} + Q_{x+m} \sum (K P') - A_{x+m} \sum (K C_2) - \ddot{a}_{x+m} \sum (K P).$$

Darin ist $C_1 = P N_x - P' R_x$ und $C_2 = x P'$ mit $P' =$ Bruttoprämie und $P =$ Netto-prämie. Zur Auswertung sind vier Hilfszahlen bzw. ihre Summen $\sum (K C_1)$, $\sum (K P')$, $\sum (K C_2)$ und $\sum (K P)$ zu bilden, ferner treten die von $x + m$ abhängigen Werte $1/D_{x+m}$, A_{x+m} , \ddot{a}_{x+m} und $Q_{x+m} = [R_{x+m} + (x + m) M_{x+m}]/D_{x+m}$ auf. Verf. formt die eingangs mitgeteilte Formel in dem Sinne um, daß weniger Hilfszahlen oder weniger Werte, die von $x + m$ abhängig sind, auftreten. Teilweise müssen dazu die Rückgewährsleistungen etwas anders angesetzt werden. E. Zwinggi.

Zwinggi, Ernst: Approximative Berechnung der Prämienrückerstattung bei erhöhter Sterblichkeit. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 57, 201—203 (1957).

Aus den Näherungen für die Zuschlagsprämie für eine gemischte Versicherung anormaler Risiken $Z_{x\bar{n}}^{(\gamma)} = \gamma Z_{x\bar{n}}^{(1)}$ bei multiplikativer Sterblichkeitserhöhung ($\mu_x^{(\gamma)} = (1 + \gamma) \mu_x$) und $Z_{x\bar{n}}^{(\gamma)} = \gamma k^{-1} Z_{x\bar{n}}^{(k)}$ bei additiver Sterblichkeitserhöhung ($\mu_x^{(\gamma)} = \gamma + \mu_x$) werden Näherungsformeln für die eine Rückgewähr im Erlebensfall berücksichtigenden Zuschlagsprämien abgeleitet. Diese enthalten außer den ohnehin als bekannt vorauszusetzenden $Z_{x\bar{n}}^{(1)}$ bzw. $Z_{x\bar{n}}^{(k)}$ nur Größen, die auf der normalen Sterblichkeit beruhen. G. Reichel.

Estrugo, José Antonio: Eine elementare Methode zur Berechnung des Zinsfußes bei Leibrenten. *Gac. mat., Madrid* 9, 104—107 (1957) [Spanisch].

Einsatz elektronischer Rechenmaschinen im Versicherungsbetrieb. Tagung vom 17./18. Mai 1957 in der Eidgenössischen Hochschule, Zürich. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 57, 221—328 (1957).

Leepin, P.: Grundbegriffe der elektronischen Informationsverarbeitung (S. 224—230); Spring, Osc. W.: Einsatz elektronischer Rechenmaschinen bei amerikanischen Versicherungsgesellschaften (S. 231—246); Rutishauser, H.: Über die Vorbereitungsarbeit beim automatischen Rechnen (S. 247—257); Schäfer, H.-W.: Praktische Herstellung und Prüfung eines Programms

für elektronische Rechenautomaten (S. 258—264); **Thüring, B.:** Die Berechnung der Prämienreserven mit der Univac Fac-Tronic (S. 265—280); **Schläpfer, J. W.:** Erfahrungen bei der Einführung von großen elektronischen Data Processing Maschinen (S. 281—285); **Vogel, W.:** Problemstellung und Lösung mit einer Tischrechenmaschine (S. 286—292); **Schlatter, A.:** Lösung auf dem Elektronenrechner Gamma 3 A (S. 293—298); **Bournonville, L. de:** Solution au moyen du Gamma à tambour magnétique (S. 299—301); **Läuchli, P.:** Lösung auf der ERMETH (S. 302—303); **Käslin, W.:** Lösung auf der IBM 650 (S. 304—315); **Haffter, M.:** Lösung auf der Univac 120 und auf dem Univac File Computer (S. 316—328).

● **Stelson, Hugh E.:** *Mathematics of finance.* Princeton: D. van Nostrand, Inc. 1957.

● **Osborn, Roger:** *The mathematics of investment.* New York: Harper & Brothers, Ltd. 1957. VIII, 162 p., 117 p. of tables. \$ 4,25.

Casal Grangei, Vicente: *Die Äquivalenz von Effekten mit rationalem Diskont.* *Gac. mat., Madrid* 9, 60—62 (1957) [Spanisch].

● **Lowenstein, Lloyd L.:** *Mathematics in business.* New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. 1958. XV, 364 p. \$ 4,95.

● **Churchman, C. West, Russel L. Ackoff and E. Leonard Arnoff:** *Introduction to operations research.* New York: John Wiley and Sons, Inc. 1957. X, 645 p. \$ 12,00.

Operations research beschäftigt sich mit Optimierungsproblemen in der Industrie, Betriebswirtschaft, Verwaltung u. dgl. unter Anwendung von mathematischen (und anderen) Modellen. Von den 22 Kapiteln des vorliegenden Buches beschäftigen sich 10 Kapitel mit allgemeinen, organisatorischen und ähnlichen Fragen. Von mathematischem Interesse sind dagegen nur die Kapitel 7—19, in denen einige spezielle mathematische Modelle besprochen werden: Lagerhaltungsmodelle, Aktivitätsanalyse, Wartezeitmodelle, Erneuerungsprobleme, Wettbewerbsmodelle. Ein ausführliches Referat hierüber dürfte sich aber erübrigen, da auch in diesen mathematischen Kapiteln die Darstellung hauptsächlich für den Praktiker bestimmt ist und daher versucht wird, mit möglichst geringem mathematischen Aufwand auszukommen. Das hat zur Folge, daß nur die elementaren Modelle besprochen werden, während die mathematisch interessanteren Entwicklungen nicht berücksichtigt werden können. Dies gilt z. B. für die Arbeiten von Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz (dies. Zbl. 46, 376; 48, 371; 53, 279) über Lagerhaltung, die Arbeiten von Pollaczek zum Wartezeitproblem [vgl. z. B. *Ann. Inst. H. Poincaré* 10, 1—55 (1946)], die zahlreichen neueren Arbeiten über Ruinspiele, Blottospiele u. ä. bei den Wettbewerbsmodellen. Aus dem gleichen Grunde wird auch bei vielen der dargestellten mathematischen Sätze und Methoden nicht auf die Beweise eingegangen. Dies gilt z. B. für die besprochenen Lösungsmethoden für lineare Programme und für die angeführten Sätze aus der Theorie der Spiele. Gelegentlich sind auch mathematische Einwände gegen die Art der Darstellung zu erheben: Die Bemerkungen auf S. 262 können kaum als ausreichende Begründung der Lagrangeschen Faktormethode angesehen werden; bei der Darstellung der Simplexmethode ist der Fall der Entartung nicht erwähnt; auf S. 526 ist die Formulierung fälschlich so gefaßt, als ob jeder Punkt einer Auszahlungsmatrix eines Zweipersonen-Nullsummen-Spieles, wo die Auszahlungsfunktion den gleichen Wert wie in einem Sattelpunkt hat, optimale Strategien lieferte; der Begriff der Dominanz zwischen Imputationen eines Spieles ist auf S. 552 (bzw. S. 554) falsch definiert. — Den Mathematiker dürften an diesem Buch am meisten interessieren die zusammenfassenden Übersichten über die einzelnen Modelle jeweils zu Beginn des betreffenden Kapitels mit den zugehörigen Literaturverzeichnissen, die auch die mathematisch interessanteren, im Buche nicht behandelten Arbeiten aufzählen.

E. Burger.

Kaldor, Nicholas: *Capitalist evolution in the light of Keynesian economics.* *Sankhyā* 18, 173—182 (1957).

Rothwell, Doris P.: Use of varying seasonal weights in price index construction. *J. Amer. statist. Assoc.* 53, 66—77 (1958).

Ferris, George E.: The k -visit method of consumer testing. *Biometrics* 14, 39—49 (1958).

● **Arrow, Kenneth J., Samuel Karlin and Herbert Scarf** (with contributions by **Martin J. Beckmann, John Gessford and Richard F. Muth**: Studies in the mathematical theory of inventory and production. (Stanford Mathematical Studies in the Social Sciences. 1.) Stanford: Stanford University Press 1958. 340 p. \$ 8,75.

Kenneth J. Arrow, Historical Background (3—15); **Kenneth J. Arrow, Samuel Karlin and Herbert Scarf**, The nature and structure of inventory problems (16—36); **Kenneth J. Arrow, Samuel Karlin and Herbert Scarf**, Summaries (37—60); **Kenneth J. Arrow and Samuel Karlin**, Production over time with increasing marginal costs (61—69); **Kenneth J. Arrow and Samuel Karlin**, Smoothed production plans (70—85); **Kenneth J. Arrow and Samuel Karlin**, Production planning without storage (86—91); **Kenneth J. Arrow, Martin J. Beckmann and Samuel Karlin**, The optimal expansion of the capacity of a firm (92—108); **Samuel Karlin**, One stage inventory models with uncertainty (109—134); **Samuel Karlin**, Optimal inventory policy for the Arrow-Harris-Marschak dynamic model (135—154); **Samuel Karlin and Herbert Scarf**, Inventory models of the Arrow-Harris-Marschak type with time lag (155—178); **John Gessford and Samuel Karlin**, Optimal policy for hydroelectric operations (179—200); **Herbert Scarf**, A min-max solution of an inventory problem (201—209); **Martin J. Beckmann and Richard F. Muth**, On the two-bin inventory policy: An application of the Arrow-Harris-Marschak model (210—222); **Samuel Karlin**, Steady state solutions (223—269); **Samuel Karlin**, The application of renewal theory to the study of inventory policies (270—297); **Herbert Scarf**, Stationary operating characteristics of an inventory model with time lag (298—318); **Samuel Karlin and Herbert Scarf**, Inventory models and related stochastic processes (319—336); Bibliography of inventory theory (337—340).

Bei Betrieben aller Art ist im allgemeinen eine gewisse Lager- und Kassahaltung notwendig, um rationelle Produktionsprogramme zu ermöglichen und die nachteiligen Folgen allfälliger Betriebsstörungen und von Schwankungen im Auftragseingang abzuwenden. Die Lagerhaltung ist anderseits mit besonderen Kosten und Zinsausfällen, sowie mit Spekulationsrisiken im Hinblick auf die künftige Preisentwicklung verbunden. Unter Benützung geeignet konstruierter „Lagerhaltungsmodelle“ (Inventory-modells) läßt sich der Betriebsertrag als Funktion der Lagerhaltung und weiterer Größen darstellen; die Gesamtheit aller Produktions- und Lagerhaltungspläne ist durch diese Ertragsfunktion analytisch erfaßt. Von besonderem Interesse sind allenfalls existierende Optimalpläne, bei denen der Geschäftsertrag unter geeigneter Beschränkung der mit diesen Plänen verbundenen Risiken ein Maximum erreicht. Die praktischen Auswirkungen von bestimmten Plänen (und gegebenenfalls deren Anpassung) lassen sich mit Hilfe geeigneter Operationscharakteristiken (z. B. jeweiliger Lagerbestand) laufend überprüfen. Die benutzten Lagerhaltungsmodelle sind teils deterministischer, teils stochastischer Natur. Im letzteren Falle wird der Geschäftsablauf als stochastischer Prozeß gedeutet, bei dem beispielsweise der Auftragseingang einer bestimmten zeitabhängigen Verteilung folgt. Optimallösungen werden mit Hilfe der üblichen Methoden der Maximum-Minimumbestimmung oder mit den Hilfsmitteln der Variationsrechnung gefunden. Bemerkenswert ist die Verwandtschaft mancher Fragestellungen der Lagerhaltungstheorie mit Problemen der Erneuerungs- und Wartezeittheorie (Queueing theory), sowie mit Stabilitäts- und Solvabilitätsbetrachtungen im Versicherungswesen. Das vorliegende Werk gibt in seinem ersten Teil eine anschauliche Einführung in die skizzierten Probleme, während der zweite und dritte Teil eine Reihe von unabhängigen Einzelarbeiten über besondere Fragen aus dem Gebiete der deterministischen und stochastischen Lagerhaltungstheorie enthält; der vierte Teil umfaßt weitere Einzelarbeiten über Operationscharakteristiken. Obschon manche der behandelten Modelle mit Annahmen arbeiten, welche zum Teil im Hinblick auf eine elegante analytische Behandlung gewählt wurden, bedeutet das vorliegende Ge-

meinschaftswerk doch einen verheißungsvollen Anfang für die Anwendung analytischer Methoden auf dem Gebiete der Betriebswirtschaftslehre. *H. Ammeter.*

Kantorovič (Kantorovich), L. V.: Methods of analyzing some extremum problems concerned with industrial programs. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 441—444 (1957) [Russisch].

Verf. betrachtet ein lineares Produktionsmodell von der üblichen Art mit endlich vielen Technologien, in welchem zwischen primären Produktionsfaktoren, Zwischenprodukten und Endprodukten unterschieden wird. Er fragt nach einem Produktionsplan (= nichtnegative Mischung der Technologien), welcher gegebene Einsatzmengen der primären Produktionsfaktoren nicht überschreitet, die benötigten Zwischenprodukte alle produziert und dabei optimal ist in dem Sinne, daß der Vektor der Endprodukte ein möglichst großes Vielfaches eines vorgegebenen positiven Sortimentvektors ist. Verf. beweist unter der Voraussetzung, daß die Technologien nicht völlig ohne Einsätze produzieren können, die Existenz eines optimalen Planes und charakterisiert diesen durch die Existenz gewisser Multiplikatoren für die Produkte nach Art des Dualitätssatzes für lineare Programme. — Es folgen einige kurze Bemerkungen über ähnliche Extremalaufgaben, über effektive Berechnungsmethoden für optimale Pläne und über Pläne, die sich über mehrere Zeitabschnitte erstrecken.

E. Burger.

Béjar, Juan: Lineare Programmierung. Trabajos Estadíst. 8, 191—196 (1957) [Spanisch].

Abraham, Jaromír: Über die Stabilität von Lösungen im Transportproblem der linearen Programmierung. Czechosl. math. J. 8(83), Nr. 1, 131—138, russ. Zusammenfassg. 138 (1958).

Das klassische Transportproblem ist in den letzten Jahren mittels verschiedener Methoden untersucht und verallgemeinert worden. Die Arbeit des Verf. betrifft die wichtige Frage nach der Stabilität der Lösung des vorgegebenen Transportproblems. Das klassische Transportproblem führt zur folgenden mathematischen Formulierung: Es sei $M(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n)$ ($m \geq 1, n \geq 1$) eine geordnete Menge von $m+n$ positiven Zahlen a_i, b_j , die die Gleichung

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

befriedigen und (k_{ij}) ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) eine (gegebene) Menge von positiven Zahlen. Unter allen Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}, \dots, x_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ x_{m1}, \dots, x_{mn} \end{pmatrix}$$

vom Typus m, n , deren Elemente nicht negativ sind und die die Bedingungen

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

erfüllen, soll diejenige aufgefunden werden, die das Minimum der Linear-Form $\sum_{i,j} k_{ij} x_{ij}$ ausweist. Die Matrix mit den angegebenen Eigenschaften wird minimale Lösung von M genannt und entspricht der Lösung des gegebenen Transportproblems. Sind $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ reelle Vektoren mit der Eigenschaft

$$(1) \quad \alpha_i + \beta_j > 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad b_j + \beta_j > 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j,$$

dann kann folgende Definition der Stabilität der Lösung des gegebenen Transportproblems eingeführt werden: Eine minimale Lösung X von M heißt stabil, wenn es zwei positive Zahlen K_1, K_2 gibt, die die folgende Eigenschaft besitzen: Für alle Vektoren $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$, welche die Bedingungen (1) erfüllen und für die $\|\underline{\alpha}\| < K_1$, $\|\underline{\beta}\| < K_2$ ist, soll eine minimale Lösung $Y = (y_{ij})$ von $M(a_1 + \alpha_1, \dots, a_m + \alpha_m; b_1 + \beta_1, \dots,$

..., $b_n + \beta_n$) existieren, wo $x_{ij} = 0 \Leftrightarrow y_{ij} = 0$. Es werden weiter die Bedingungen festgestellt, die die Stabilität (im eingeführten Sinne) der Lösung des vorgegebenen Transportproblems garantieren. *F. Nožička.*

Harris, A. J.: A maximum-minimum problem related to statistical distributions in two dimensions. *Biometrika* 44, 384—398 (1957).

Let a rectangle be divided into rows and columns and let the row and column totals be given, adding up to N . Select a certain set of the cells to constitute a region \mathfrak{R} . It is required to find the minimum of the total of all cell entries in \mathfrak{R} satisfying the marginal totals. — This is that special case of the Transportation Problem of Linear Programming where the cost coefficients are 0 or 1, but the method here presented determines the minimum without finding the actual cell entries. — It is easily shown that if \mathfrak{R} is a rectangle and if S_1 and S_2 are, respectively, the sums of its row and column totals, then the minimum is $\max [S_1 + S_2 - N, 0]$. It is shown that the minimum for any \mathfrak{R} equals the largest minimum for any rectangle (or any area which can be formed into a compact rectangle by a rearrangement of rows and columns contained in \mathfrak{R}). — The proof of the same theorem for the infinite problem: minimum

$\iint_{\mathfrak{R}} f(x, y) dx dy$, $f(x, y) \geq 0$, $\int_0^b \int_0^x f dx dy = A(x)$, $\int_0^y \int_0^a f dx dy = B(y)$ is given under restrictive conditions. It is also shown, for the discrete case, how to find the minimum for an area within \mathfrak{R} , when the content of \mathfrak{R} is at its minimum. The author states without proof that in the 3-dimensional analogous case it is possible to find a region whose minimum content is larger than the minimum content of any rectangular parallelepiped contained in it. A few illustrative examples are given.

S. Vajda.

Bellman, Richard: Terminal control, time lags, and dynamic programming. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 43, 927—930 (1957).

As an illustration of the technique of Dynamic Programming consider the minimization of $|u(T)|$ over all functions v satisfying $|v(t)| \leq k$, $0 \leq t \leq T$, $\int_0^T v^2(t) dt \leq k_2$, where $u'' + a u' + b u = v$, $u(0) = c_1$, $u'(0) = c_2$. Using the principle of optimality, this is reduced to the solution of the functional equation $f(a, T) = \min_v [\lambda \int_0^T v^2 + f(a + k T v \Delta, T - \Delta)] + o(\Delta)$, involving a sequence of functions of one variable.

S. Vajda.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Tits, J.: Sur la géométrie des R -espaces. *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. 36, 17—38 (1957).

Dans un Mémoire précédent (ce Zbl. 67, 123) l'A. a étudié les espaces homogènes complexes des groupes de Lie semi-simples complexes qui sont des variétés projectives d'un point de vue géométrique, considérant en particulier des familles de sous-espaces de même nature et leurs relations d'incidence. Il affirme ici que, au moins pour les espaces homogènes des groupes classiques et de E_6 , ces données géométriques permettent de définir pour tout corps commutatif des analogues de ces espaces homogènes, et il s'attache plus particulièrement à l'étude de l'espace homogène symétrique complexe E de E_6 . Parmi les sous-espaces privilégiés figurent des droites et plans projectifs et des quadriques à 8 dimensions, appelés respectivement, droites, plans et hyperdroites. Soient a, a' deux hyperdroites se coupant exactement en un point A et soit λ la relation « x et x' sont coplanaires» entre droites passant par A et contenues respectivement dans a et a' . L'A. montre comment E peut être décrit par

des éléments géométriques définis à partir de a, a' et λ . Il indique ensuite que cette description permet d'associer à tout corps commutatif K un espace $E^{(K)}$ analogue, du point de vue géométrie projective, à E , dans lequel les hyperdroites sont des quadriques à 8 dimensions d'indices maximum sur K . Le groupe $G_p^{(K)}$ des automorphismes de $E^{(K)}$ qui induisent des projectivités sur les hyperdroites a un groupe dérivé simple et son ordre est calculé lorsque K est un corps fini. Les résultats relatifs à $E^{(K)}$ et $G_p^{(K)}$ sont énoncés sans démonstration. Dans un exposé au Séminaire Bourbaki (février 1958, exp. 162), consacré à des questions voisines, l'A. remarque que $G_p^{(K)}$ est isomorphe au groupe attaché à E_6 et K par le procédé général de C. Chevalley (ce Zbl. 66, 15).

A. Borel.

Skornjakov, L. A.: Homomorphismen projektiver Ebenen und T -Homomorphismen von Ternaren. Mat. Sbornik, n. Ser. 43 (85), 285—294 (1958) [Russisch].

Eine Homomorphie (d. h. Inzidenz erhaltende) Abbildung einer projektiven Ebene auf eine andere führt zu einer „homomorphen“ Abbildung der zugehörigen Ternärkörper, die auf 4 Punkte und ihre in allgemeiner Lage befindlichen Bildpunkte bezogen sein sollen. Verf. benützt einige der durch Übersetzung der Homomorphiebedingung in die Ternärkörpersprache entstehenden Bedingungen zur Definition von „ T -Homomorphismen“ von Ternärkörpern und beweist, daß genau die T -Homomorphismen zwischen Ternärkörpern zu Homomorphismen der über ihnen gebildeten Ebenen führen. Weiter stellt er eine Verbindung zu dem früher (s. dies. Zbl. 78, 21) eingeführten Begriff des T -Homomorphismus von Ringen, insbesondere distributiven Quasikörpern her, indem er bemerkt, daß ein Ring- T -Homomorphismus zwischen distributiven Quasikörpern genau dann ein Ternärkörper- T -Homomorphismus ist, wenn noch eine gewisse zusätzliche Bedingung gilt, die im assoziativen Fall (d. h. bei Körpern) immer von selbst erfüllt ist.

H. Salzmann.

Ostrom, T. G.: Transitivity in projective planes. Canadian J. Math. 9, 389—399 (1957).

§ 1: In einer affinen Ebene haben zwei Translationen in verschiedenen Richtungen die gleiche Ordnung. § 2 gibt eine im wesentlichen bekannte Aufstellung der Art der Koordinatenkörper bei Transitivität gewisser Translations- und Streckungsgruppen, vgl. Pickert (dies. Zbl. 66, 387) § 3.5. Statt Baer (dies. Zbl. 60, 322) wurde dabei versehentlich André (dies. Zbl. 56, 385) zitiert. Die Behauptung in Satz 16, daß eine Ebene desarguessch sei, wenn es in ihr zwei transitive Streckungsgruppen gibt, bei denen die Verbindungsgerade der beiden Zentren nicht durch den Schnittpunkt der beiden Achsen geht, ist unrichtig. [Bem. des Ref.: Es gibt jedoch nur zwei Ausnahmen, nämlich die Ebene über dem Fastkörper mit 9 Elementen und die duale dazu.] In § 3 werden endliche Ebenen betrachtet, deren Ordnung eine ungerade Potenz von 2 ist. Verf. zeigt, daß eine solche zweifach transitive projektive Ebene desarguessch ist und fügt bei der Korrektur hinzu, daß sein Ergebnis inzwischen durch A. Wagner überholt sei, der bewiesen hat, daß jede zweifach transitive endliche Ebene desarguessch ist. Ist ferner die Kollineationsgruppe zweifach transitiv auf den eigentlichen Punkten einer solchen affinen Ebene, so ist die Ebene eine Translationsebene. § 4 bringt die Bemerkung, daß jede endliche projektive Ebene Desargues-Konfigurationen enthält.

H. Salzmann.

Zappa, Guido: Sui gruppi di collineazioni dei piani di Hughes. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 507—516 (1957).

Hughes [Canadian J. Math. 9, 378—388 (1957)] hat in Verallgemeinerung eines Beispiels von Veblen-Wedderburn zu jeder ungeraden Primzahl p und natürlichen Zahl n eine nicht desarguessche projektive Ebene π der Ordnung p^{2n} mit einer desarguesschen Teilebene π_0 der Ordnung p^n angegeben, die eine zyklische Kollineationsgruppe der Ordnung $p^{2n} + p^n + 1$ besitzt, ohne jedoch die volle Kollineationsgruppe bestimmen zu können. Die zyklische Kollineationsgruppe entsteht durch Fortsetzung der Singerschen transitiven zyklischen Kollineationsgruppe von π_0

auf π . Verf. zeigt nun, daß sich jede projektive Kollineation von π_0 zu einer Kollineation von π fortsetzen läßt, und beweist in dem eine Sonderstellung einnehmenden Fall der Ordnung 9, daß die volle Kollineationsgruppe das direkte Produkt einer zur Kollineationsgruppe von π_0 isomorphen Gruppe der Ordnung 5616 mit der zur S_3 isomorphen Gruppe der von den Automorphismen des Koordinatenbereichs hervorgerufenen Kollineationen ist, die π_0 punktweise fest lassen. *H. Salzmann.*

Rosati, Luigi Antonio: *Piani proiettivi desarguesiani non ciclici.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 230—240 (1957).

Verf. beweist die folgenden Aussagen: Eine scharf einfach transitive Kollineationsgruppe einer endlichen desarguesschen projektiven Ebene liefert eine auf den von 0 verschiedenen Elementen der additiven Gruppe des 3-dimensionalen Vektorraumes über dem zu der Ebene gehörenden Koordinatenkörper scharf einfach transitive Automorphismengruppe, mit deren Hilfe sich der Vektorraum in natürlicher Weise zu einem (vollständigen) Fastkörper machen läßt, der kein Körper ist, wenn die Kollineationsgruppe nicht zyklisch ist. Hat dieser Fastkörper p^{3t} Elemente und ist er vom Rang m (> 1) über seinem Zentrum, so ist entweder $m = 3$ oder m nicht durch 3 teilbar und $p^{2t} + p^t + 1 \equiv 0 \pmod{m}$. Alle (echten) Fastkörper, die einer dieser beiden Bedingungen genügen, lassen sich auf die beschriebene Weise gewinnen. Genau im Fall $m = 3$ besteht die Kollineationsgruppe aus lauter projektiven Kollineationen. *H. Salzmann.*

● **Tresse, A.:** *Théorie élémentaire des géométries non euclidiennes. Tome I.* Paris: Gauthier-Villars 1957. 150 p. 2.500 F.

Les pages (de ce livre) relèvent du domaine de la pédagogie et sont conçues comme devant être accessibles à l'enseignement secondaire. Ayant été écrites dans un isolement dû surtout aux circonstances de l'époque actuelle, elles ne comportent guère de références, leur nature ne s'y prêtant d'ailleurs pas. Comme elles reposent principalement sur la théorie de l'inversion, nous renverrons donc à tous les exposés classiques de cette théorie, et par exemple, à l'exposé magistral qu'on trouve dans la deuxième édition de la Géométrie élémentaire de M. Hadamard, exposé dont nous aurons à faire une application essentielle en y ajoutant toutefois la notion de « point anallagmatique à l'infini » (ou point ∞) que nous avons présentée dans deux articles des « *Humanités Scientifiques* » (éditions Hatier, année 1947). (Aus dem Vorwort.) *W. Klingenberg.*

● **Norden, A. P.:** *Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie.* (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 35.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1958. IX, 259 S., 115 Abb. Kunstleder DM 14,—.

Das russische Original ist in diesem Zbl. 52, 371 besprochen.

Valette, Guy: *Le plan conforme sur le corps à trois éléments.* Mathesis 66, 269—283 (1957).

Verf. beschäftigt sich mit einigen Abschnitten der analytischen und der projektiven Geometrie der Ebene und des Raumes über einem endlichen Körper der Charakteristik 3 von 9 Elementen. Alle Grunddefinitionen (des Raumes P_d und seiner Unterräume, der projektiven Abbildung, des Kegelschnittes und der Quadrik u. a.) stimmen formal mit den üblichen überein. Nach der Klassifikation und nach der Beschreibung der Kegelschnitte und der Quadriken wählt der Verf. eine sog. „Oval-Quadrik“ C_2 in P_3 mit der Gleichung $(X_1)^2 + (X_2)^2 - X_0 X_3 = 0$ fest. Unter einer „konformen“ Ebene wird eine C_2 verstanden. Ihre „konformen“ Transformationen sind die projektiven Abbildungen des P_3 , von denen die C_2 fest gelassen wird. Ausführlich werden die Kreislinien in einer „konformen“ Ebene C_2 studiert. Sie sind als Durchschnitte der C_2 mit den P_2 aus P_3 definiert. Auf Grunde ähnlicher, selbstverständlich schwacher Analogien werden auch weitere Begriffe (u. a. der Orthogonalität der Kreislinien, des Winkels) eingeführt. Endlich werden sog. „direkte konforme“ Transformationen beschrieben. *K. Čulík.*

Takusu, Tsurusaburo: *A non-linear N. E. geometry with a general p -ic surface as absolute.* Yokohama math. J. 5, 171—199 (1957).

Es werden die Grundlinien einer nichteuklidischen Geometrie des projektiven Raumes mit einer ausgezeichneten absoluten algebraischen Fläche 3. Ordnung und

Klasse Φ entwickelt. Nach Einführung geeigneter „Weierstraßscher“ Koordinaten für Punkte und Ebenen wird eine 12-parametrische (nicht projektive) Gruppe G_{12} von kongruenten Transformationen erklärt, welche Φ in sich überführen, und eine darin enthaltene Untergruppe G_6 ausgezeichnet. Mit Hilfe eines Systems ternärer komplexer Größen werden aus den Doppelverhältnissen der Schnittpunkte (bzw. Tangentenebenen) einer Geraden g mit Φ Abstände von Punkten und Winkel von Ebenen erklärt und die Formeln der entsprechenden Trigonometrie entwickelt.

K. Strubecker.

Ewald, Günther: Über eine Berühreigenschaft von Kreisen. Math. Ann. 134, 58—61 (1957).

Verf. bringt eine Reihe von Bemerkungen und Ergänzungen zu seinen früheren Arbeiten (s. dies. Zbl. 72, 157, 158). Insbesondere wird erwähnt, daß durch Ergebnisse von Baer, Barner, Benz, und Lenz das algebraische Modell der vom Verf. axiomatisch in den zitierten Arbeiten definierten Kreisgeometrie nunmehr feststeht: Die Kreise einer solchen Geometrie sind sämtlich auf einer Quadrik der Form $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ in einem projektiven Raum über einem kommutativen angeordneten Körper gelegen, in dem jedes positive Element Quadrat ist.

W. Klingenberg.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● Sperner, Emanuel: Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra. 1. Teil. (Studia Mathematica — Mathematische Lehrbücher. Bd. 1.) 3. durchgesehene Aufl. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1957. 347 S., 45 Fig. Ln. DM 23,—.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. in diesem Zbl. 31, 66.

● Sperner, Emanuel: Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra. 2. Teil. (Studia Mathematica — Mathematische Lehrbücher. Bd. 6.) 2. Aufl. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1957. 388 S. DM 20,—.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. in diesem Zbl. 45, 235.

Weiner, L. M.: The theorem of Pythagoras in n dimensions. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 11, 28—31 (1957).

Es handelt sich um folgenden bekannten Satz: In dem von n paarweise senkrechten Vektoren $\vec{OA_1}, \dots, \vec{OA_n}$ aufgespannten Simplex ist das Quadrat des $(n-1)$ -dimensionalen Inhalts der O gegenüberliegenden Seite gleich der Quadratsumme der Inhalte der übrigen Seiten. Der Satz eignet sich als Übungsaufgabe zur n -dimensionalen analytischen Geometrie.

H. Lenz.

● Locher-Ernst, Louis: Raum und Gegenraum. Einführung in die neuere Geometrie. Dornach (Schweiz): Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum 1957. 216 S. Ganzleinen DM 27,50.

Mit dem vorliegenden, inhaltlich und methodisch äußerst interessant aufgebauten Werk will Verf. unser vorwiegend als Punktbewußtsein ausgebildetes Vorstellungsvermögen durch systematische Schulung des Geraden- und Ebenenbewußtseins polar erweitern, einen größeren Interessentenkreis mit der Harmonie geometrischer Formen vertraut machen und neue Anregungen für den modernen Geometrieunterricht geben. Manche sonst kaum erwähnte Tatsachen werden ausführlich dargestellt, um eine wirklich tiefgehende Erweiterung des Anschauungsvermögens zu erzielen; bekannte Beziehungen erscheinen durch die originelle Betrachtungsweise des Verf. oftmals in völlig neuem Licht. Bei strenger Beweisführung ist der Inhalt leicht faßlich dargeboten und wirkt durch die souveräne Beherrschung der Materie und den flüssigen Stil von Anfang bis zu Ende anregend. Besondere Erwähnung verdienen die hervorragend schönen Zeichnungen, deren jede einzelne hinsichtlich Annahme und Ausführung schlechthin mustergültig ist. Das Buch ist in vier Abschnitte gegliedert: Grundlagen, Schulung, Lehre und Hinweise.

— Die „Grundlagen“ enthalten u. a.: Elemente und Grundgebilde des projektiven Raumes; die Gesetze der Dualität; die Reyesche Konfiguration (Fundamentalstruktur des Raumes); Anordnungsbeziehungen; Kern- und Hüllgebilde in der Ebene und im Raum; Desarguessche Konfiguration (Fünfheit im Raum); Stetigkeitsaxiome. — In der „Schulung“ findet man Sätze über die perspektive Kollineation in der Ebene, im Bündel und im Raum (um die Bewegungsvorgänge, durch die kollineare Figuren ineinander übergehen, dem Vorstellungsbewußtsein besonders nahe zu bringen, führt Verf. eine Reihe neuer Bezeichnungen ein; die geometrische Anschauungskraft erfährt durch die geschilderte Betrachtungsweise reiche Belebung, vielleicht könnte mit weniger Namen das Auslangen gefunden werden); die Gliederung von Feld und Bündel durch vier und fünf teilende Elemente; Maschen- und Zellenbildung; Gliederung des Raumes durch sechs Ebenen (die Beschreibung des vollständigen Sechsecks mit seinen tetraedrischen Kranzkernen, Hauptkernen und Hauptpunkten stellt einen Höhepunkt des Buches dar); allgemeine Sätze über Regelflächen zweiten Grades und ebene Kurven; Topologie der Ebene (Möbiussches Band). — Die „Lehre“ bringt die wichtigsten Grundsätze der projektiven Geometrie bis zur Polarität: Harmonische Würfe, Perspektivität und Projektivität, Erzeugnisse projektiver Grundgebilde, Kegelschnittsbüschel (ein eindruckvolles Bild eines solchen zeigt die Umschlagsseite). — die „Hinweise“ enthalten philosophische Betrachtungen, Ergänzungen zu früher beschriebenen Tatsachen und Angaben über einschlägige Literatur.

H. Horninger.

Al-Dhahir, M. W.: On a theorem of H. F. Baker. Proc. math. phys. Soc., Egypt 5, Nr. 4, 57—60 (1957).

Synthetischer Beweis eines Satzes von H. F. Baker über eine Verallgemeinerung der Möbiusschen Tetraeder und Ergänzungen hierzu. Zahlreiche Druckfehler.

H. Horninger.

Manevič, V. A.: Über die Darstellung der Elemente von Systemen von Kollineationen zweiter und dritter Stufe in Form eines Produktes von Polarenbeziehungen und über Eigenschaften der Kollineationen, die mit dieser Frage zusammenhängen. Mat. Sbornik, n. Ser. 41 (83), 221—230 (1957) [Russisch].

Verf. zeigt mittels einfacher synthetischer Betrachtungen, daß man jede Kollineation der reellen projektiven Ebene als Produkt zweier Polaritäten darstellen kann. Dasselbe wird auch im P_3 bewiesen. Es wird jedoch überall nur der allgemeine Fall behandelt, daß die Kollineationen 3 bzw. 4 linear unabhängige Fixpunkte besitzen und dann die Polaritäten, als deren Produkt die gegebene Kollineation darzustellen ist, unter denjenigen gesucht werden, die ein gegebenes selbstpolares Dreieck, bzw. Tetraeder besitzen. Als Literatur erwähnt Verf. lediglich zwei außerhalb Rußlands kaum bekannte Schriften von Vlassov über Kegelschnitte und Polarsysteme [Abh. Univ. Moskau, Phys.-Math. Abt. B 16, 208 S. (1901); 186 S. (1910)]. Hinsichtlich der ebenen Frage möchte Ref. jedoch noch auf das Buch von Coxeter, Reelle projektive Geometrie der Ebene (s. dies. Zbl. 65, 364) hinweisen, wo die Frage auch behandelt ist.

W. Burau.

Lagrange, René: Sur le groupe de la famille des coniques du plan qui ont un élément de contact donné. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 1866—1868 (1957).

Verf. betrachtet die 7-gliedrige, aus Kollineationen und quadratischen Transformationen bestehende Gruppe \mathcal{G} , der reellen projektiven Ebene P_2 , die ein gegebenes Linienelement festhalten. Es werden die infinitesimalen Transformationen von \mathcal{G} aufgestellt, und gewisse Typen von Involutionen angegeben, derart, daß fast alle Elemente von \mathcal{G} sich als Produkte von je zwei dieser Involutionen ergeben. Dann wird gezeigt, daß die betrachtete Gruppe \mathcal{G} isomorph zur Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen des reellen Euklidischen Raumes E_3 ist.

W. Burau.

Lagrange, René: Sur le groupe ponctuel conservant la famille des coniques du plan qui ont un élément de contact donné. Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 74, 197—229 (1957).

Zur Untersuchung steht jener Grenzfall der sechsgliedrigen Gruppe der ebenen Möbiusschen Kreisverwandtschaften, der durch Zusammenrücken des absoluten Punktepaares entsteht, also gewissermaßen die Möbiusgruppe der isotropen Ebene. Betrachtet man als normiertes Modell die Gesamtheit der quadratischen Punkttransformationen

$$(1) \quad x' = (\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta), \quad y' = (k y + e x^2 + 2 f x + g)/(\gamma x + \delta)^2,$$

welche die Menge der achsenparallelen Parabeln

$$(2) \quad h y + u x^2 + v x + w = 0$$

in sich überführen (x, y kartesische Normalkoordinaten), so sieht man, daß es sich hier im Gegensatz zur gewöhnlichen Möbiusgruppe um eine siebengliedrige Gruppe handelt. Diese G_7 ist im übrigen isomorph zur Ähnlichkeitsgruppe des dreidimensionalen euklidischen Raumes, wie u. a. in der Weise gezeigt wird, daß die ∞^3 Parabeln

(2) vermöge

$$(3) \quad \xi = (u - w)/h, \quad \eta = (u + w)i/h, \quad \zeta = v/h$$

auf die Punkte (ξ, η, ζ) des R_3 abgebildet werden (ξ, η, ζ kartesische Normalkoordinaten). Den ∞^7 Transformationen (1) entsprechen dabei gerade die Ähnlichkeiten des Bildraumes, und zwar hat der Ähnlichkeitsfaktor den Wert $(\alpha \delta - \beta \gamma)/k$. Die durch $\alpha \delta - \beta \gamma = k$ gekennzeichnete Untergruppe G_6 der G_7 ist mithin den Bewegungen des Bildraumes zugeordnet; ihr gegenüber besitzen je zwei Parabeln eine gewisse, als Entfernung ihrer Bildpunkte deutbare Invariante, die als Steigungsunterschied („Sperrung“) in einem der beiden Schnittpunkte erklärt werden kann. Jede Transformation aus G_6 läßt sich im allgemeinen aus zwei, in Ausnahmefällen aus drei involutorischen Transformationen zusammensetzen, die als Grenzfälle der (gleichsinnigen) Möbius-Involutionen anzusehen sind; eine solche involutorische Transformation besitzt zwei eigentliche Fixpunkte A, B und ordnet einem Punkt P jenen Punkt P' auf der (invarianten) Parabel ABP zu, der zu P bezüglich A und B harmonisch liegt. Während es bei der Möbiusgruppe neben der Identität nur eine einzige Transformation gibt, die einen Kreis punktweise festläßt, nämlich die Inversion an diesem Kreis, existiert im betrachteten Grenzfall eine ganze Gruppe von ∞^1 Transformationen, die eine der Parabeln punktweise festhalten; hierin kann ein Grund für die erhöhte Parameterzahl erblickt werden. — Anm. des Ref.: Auf die naheliegende Heranziehung der Studyschen „dualen Zahlen“ $z = x + \varepsilon y$ mit $\varepsilon^2 = 0$, wie sie beispielsweise U. Graf (dies. Zbl. 15, 37) und im Anschluß daran L. Peczar in einer Dissertation „Die den Möbiusschen Kreisverwandtschaften entsprechenden Transformationen in der dualen Zahlenebene“ (T. H. Wien 1943) verwendet, wird verzichtet. Auch die bereits von J. Grünwald [Monatsh. Math. Phys. 17, 81—136 (1906)] benützte stereographische Projektion etwa eines Drehzylinders und seiner automorphen Kollineationen, die einen bequemen Einblick in die obwaltenden Verhältnisse gewährt, wäre zu empfehlen gewesen.

W. Wunderlich.

Lockwood, E. H.: Negative pedal of the ellipse with respect to a focus. Math. Gaz. 41, 254—257 (1957).

Gegeben ein Kreis vom Radius a , S ein Punkt in der Entfernung ae ($e < 1$) vom Kreismittelpunkt, Y ein Punkt auf dem Kreis, $Y P \perp S Y$. $Y P$ umhüllt eine Ellipse mit der Exzentrizität e . Liegt P auf der Ellipse und ist $P Q \perp S P$, so umhüllt $P Q$ eine vom Verf. „Burleighs Oval“ genannte Kurve, nach seinem Schüler M. J. Burleigh, der ihn auf diese Kurve aufmerksam machte, die in Salmons Higher Plane Curves (p. 107), in Hiltons Plane Algebraic Curves (p. 64) und in einer Abhandlung von A. Ameseder über negative Fußpunktkurven [Arch. Math. Phys. 64, 164—176 (1879)] behandelt wird. Verf. entwickelt ihre Cartesische Glei-

chung und diskutiert ihre Eigenschaften. Für $e \leq \frac{1}{2}$ ist sie eiförmig mit einer Achse der Länge $2a$; für $e > \frac{1}{2}$ hat sie einen Knoten und zwei Spitzen.

M. Zacharias.

Algebraische Geometrie:

Segre, Beniamino: *Corrispondenze di Möbius e trasformazioni cremoniane intere*. Atti Accad. Sci., Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. **91**, 3—19 (1957).

Die durch $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) mit Funktionen aus der Klasse C^1 und $\partial(y_1, y_2, \dots, y_r)/\partial(x_1, x_2, \dots, x_r) = \text{const} \neq 0$ bestimmte Abbildung des euklidischen Raumes $S_r(x_1, x_2, \dots, x_r)$ in den euklidischen Raum $S'_r(y_1, y_2, \dots, y_r)$ nennt Verf. Möbius-Korrespondenz. Er zeigt, daß sich die allgemeinste Abbildung dieser Art aus speziellen zusammensetzen läßt, die man durch Differentiation und Elimination allein erzeugen kann. Verf. beschäftigt sich dann mit den ganzrationalen Möbius-Korrespondenzen über einem Körper der Charakteristik 0. Er beweist zunächst, daß für eine ganzrationale Kurve $x = f(t)$, $y = g(t)$ in einer affinen Ebene über einem beliebigen Körper der Charakteristik 0, die keinen mehrfachen Punkt im Endlichen besitzt, die Gradzahl des einen Polynoms ein Vielfaches der Gradzahl des anderen Polynoms sein muß. Mit Hilfe dieses Lemmas findet er, daß sich jede ganzrationale Möbius-Korrespondenz von zwei Ebenen aus affinen und gewissen ganzen Transformationen von de Jonquières zusammensetzen läßt, und daß die ganze Möbius-Korrespondenz somit eine ganze Cremona-Transformation ist. Unter der Voraussetzung, daß sich das o. a. Lemma für den r -dimensionalen Raum verallgemeinern läßt, ergibt sich eine Verallgemeinerung des Zerlegungssatzes und die zugehörige Folgerung. Das noch zu beweisende Lemma lautet: Besitzt eine ganzrationale Hyperfläche $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) + \dots$, $i = 1, 2, \dots, r$ (die φ_i sind die Formen der Glieder höchsten Grades) keinen mehrfachen Punkt im Endlichen, so muß wenigstens ein φ_i als Polynom mit Koeffizienten aus dem Grundkörper in den übrigen φ_i dargestellt werden können. Die Sätze sind für einen Grundkörper der Charakteristik $p \neq 0$ nicht richtig. W. Engel.

Akizuki, Yasuo and Hideyuki Matsumura: *On the dimension of algebraic system of curves with nodes on a non-singular surface*. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A **30**, 143—150 (1957).

Nakai, Yoshikazu: *A property of an ample linear system on a non-singular variety*. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A **30**, 151—156 (1957).

Matsumura, Hideyuki and Masayoshi Nagata: *On the algebraic theory of sheets of an algebraic variety*. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A **30**, 157—164 (1957).

Um die Vollständigkeit der charakteristischen Schar eines Kurvensystems auf einer algebraischen Fläche im abstrakten Fall zu beweisen, braucht man den folgenden Satz: Sei E das lineare System, das auf einer nichtsingulären Fläche von den Hyperflächen der Ordnung m ausgeschnitten wird. Dann bildet die Menge \mathfrak{E}_d der Kurven von E , die d oder mehr Knotenpunkte, sonst aber keine anderen Singularitäten besitzen, zusammen mit ihren Spezialisierungen ein algebraisches Untersystem $\overline{\mathfrak{E}}_d$ von E , und jede seiner Komponenten hat eine Dimension $\geq \dim(E) - d$ (falls $\overline{\mathfrak{E}}_d$ nicht leer ist). Die drei Arbeiten enthalten Beweise für diesen Satz. In der ersten Arbeit geschieht das durch den Beweis der folgenden Aussagen: \mathfrak{U} sei eine Komponente von $\overline{\mathfrak{E}}_d$. Dann gibt es eine algebraische Untermenge $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{U})$ von \mathfrak{U} mit folgenden Eigenschaften: 1. $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{E}_{d+1} \supseteq \mathfrak{B} \supseteq \overline{\mathfrak{E}}_{d+1}$, 2. jede Komponente von \mathfrak{B} hat eine Dimension $\geq \dim(\mathfrak{U}) - 1$. Dann ist nämlich $\bigcup_{\mathfrak{U}} \mathfrak{B}(\mathfrak{U}) = \overline{\mathfrak{E}}_{d+1}$. Der Verf. der zweiten Arbeit beweist den Satz, indem er die duale Abbildung in die Grassmannsche Mannigfaltigkeit gebraucht. In der dritten Arbeit wird die

von Severi im klassischen Fall benutzte Methode der „falsche analytische“ in die Sprache der lokalen Algebra übersetzt und zum Beweis des genannten Satzes verwendet.

W. Engel.

Nakai, Yoshikazu: On the characteristic linear systems of algebraic families. Illinois J. Math. 1, 552—561 (1957).

Zariski vermutete, daß das Verschwinden des geometrischen Geschlechts eine hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit des charakteristischen Systems einer algebraischen Familie im abstrakten Fall ist. Verf. gibt einen Beweis hierfür und zeigt, daß auf einer nicht-singulären Fläche die Ungleichung $p_g \geq h^{0,1} - q \geq 0$ gilt, wobei p_g das geometrische Geschlecht, $h^{0,1}$ der Maximaldefekt und q die Irregularität (die Dimension der Picardschen Mannigfaltigkeit) der vorgegebenen Fläche bedeutet. Er beweist zuerst die Linearität des charakteristischen Systems einer algebraischen Familie. Dann zeigt er $q \leq h^{0,1}$ für eine nichtsinguläre Mannigfaltigkeit beliebiger Dimension. Schließlich gibt er einen Beweis für den im vorangehenden Referat angeführten Satz, woraus das gewünschte Ergebnis für die nichtsingulären Flächen folgt.

W. Engel.

Marchionna, Ermanno: Sulle varietà di prima specie. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 16, 433—438 (1957).

Es bedeute V eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 1$ in einem projektiven S_r , \bar{V} den Schnitt von V mit einem allgemeinen S_{r-1} . Dann heißt V nach Dubreil (s. dies. Zbl. 11, 268) „von 1. Gattung“, wenn die V enthaltenden Hyperflächen der Ordnung t das Vollsistem der \bar{V} enthaltenden Hyperflächen derselben Ordnung im S_{r-1} ausschneiden. Idealtheoretisch ist V einfach dadurch charakterisiert, daß die Syzygienkette des zugehörigen homogenen Primideals höchstens die Länge $r - 1$ hat. Ferner heißt nach Zariski V arithmetisch normal, wenn die Hyperflächen jeder beliebigen Ordnung auf V ein Vollsistem ausschneiden, d. h. wenn der Restklassenring des Primideals lokal ganz abgeschlossen ist und seine Syzygienkette eine Länge $\leq r - 1$ hat. Dubreil stellte das Problem, zu entscheiden, ob der Restschnitt W von $r - d$ durch V gehenden allgemeinen Hyperflächen immer von derselben Gattung wie V sei. Gaeta (s. dies. Zbl. 33, 208) konnte die Frage für den Fall singularitätenfreier Kurven bejahen. Das gilt aber nicht mehr allgemein für höhere Dimensionen, wie Verf. an einem Beispiel zeigt. Die von Gaeta in einer späteren Arbeit (s. dies. Zbl. 40, 230) benutzten idealtheoretischen Begriffe und Methoden würden vielleicht auch hier weitere Klärung bringen.

W. Gröbner.

Marchionna, Ermanno: Sulle superficie aritmeticamente regolari ed aritmeticamente normali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 24—35 (1958).

Une surface d'un espace S^r est dite arithmétiquement régulière si les hypersurfaces de tout ordre de S^r la coupent selon un système régulier, pour lequel la surabondance est nulle; une surface d'irrégularité nulle est dite topologiquement régulière. Si l'on considère deux surfaces F et F' irréductibles, sans singularités, complémentaires, c'est à dire formant ensemble intersection complète de $r - 2$ hypersurfaces d'ordre n_1, n_2, \dots, n_{r-2} , soient q et q' les irrégularités de ces surfaces, $d_l, d_{l'}, s_l, s_{l'}$, les déficiences et surabondances des systèmes coupés sur F et F' par les hypersurfaces d'ordre l , l'A. montre que si $l > \sum_{i=1}^{r-2} n_i - r - 1$, $s = s' = d = d' = 0$ — si $l = \sum_{i=1}^{r-2} n_i - r - 1$, $s = s' = 0$, $d = q'$, $d' = q$ — si $l < \sum_{i=1}^{r-2} n_i - r - 1$, $d_l + d'_{s'n_i - r - 1 - l} = s_l + s'_{s'n_i - r - 1 - l}$. Si les hypersurfaces d'un ordre quelconque coupent un système complet la variété est dite arithmétiquement normale. La condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces complémentaires non

singulières soient toutes deux arithmétiquement normales est qu'elles soient toutes deux arithmétiquement et topologiquement régulières. De ceci se déduit: la section hyperplane générique d'une surface F arithmétiquement normale est aussi arithmétiquement normale si et seulement si une surface F' complémentaire de F est arithmétiquement normale. Il est intéressant de remarquer que contrairement à ce qui se passe pour les courbes, étant données deux surfaces complémentaires l'une peut être arithmétiquement normale et l'autre non; un exemple est donné à partir de la F_4 de S^4 projection d'une surface de Véronèse, non arithmétiquement normale alors que sa complémentaire $F'_{n_1, n_2 - 4}$ est arithmétiquement normale: si $n_1 = n_2 = 3$, F_4 est topologiquement et arithmétiquement régulière, non arithmétiquement normale, F'_5 est arithmétiquement régulière et normale mais d'irrégularité $q' = 1$ — si $n_1 = 3, n_2 = 4$, la F'_8 est topologiquement régulière, arithmétiquement normale mais non arithmétiquement régulière.

B. d'Orgeval.

Leung, K. T.: Ein Satz über lokal normale Varietäten. Math. Ann. 134, 232—236 (1958).

Der Satz von van der Waerden (s. dies. Zbl. 39, 165), daß eine auf einer irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit definierte und in einem gegebenen einfachen Punkt P endliche rationale Funktion $f(x)/g(x)$ immer so geschrieben werden kann, daß $g(x)$ in P nicht verschwindet, wird dahin verallgemeinert, daß von P nur vorausgesetzt wird, die Mannigfaltigkeit sei dort lokal normal. Bedeutet also J den Restklassenring des die Mannigfaltigkeit definierenden (inhomogenen) Primideals, J_P den zu P gehörigen Quotientenring, so soll J_P ganz abgeschlossen sein. Der Beweis beruht auf der Tatsache, daß in J_P für die Ideale höchster Dimension eine eindeutige Zerlegung in Primidealepotenzen möglich ist, wenn man nach van der Waerden Quasigleichheit benützt, d. h. alle Komponenten kleinerer Dimension streicht. Ist daher $f(x)/g(x)$ im Punkte P beschränkt, so folgt: $f(x)$ ist in J_P durch $g(x)$ quasiteilbar, also auch, weil es sich um Hauptideale handelt, im gewöhnlichen Sinne teilbar.

W. Gröbner.

Weil, André: Zum Beweis des Torellischen Satzes. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., IIa 1957, 32—53 (1957).

Eine abelsche Mannigfaltigkeit A heißt „polarisiert“, wenn auf ihr ein nicht-ausgearteter positiver Divisor X vorgegeben ist; dabei heißt X „nichtausgeartet“, wenn er nur durch endlich viele Translationen in sich übergeführt wird. Zwei nichtausgeartete Divisoren X, X' von A bestimmen genau dann dieselbe Polarisation, wenn es ganzrationale Zahlen $m, m' > 0$ gibt derart, daß mX und $m'X'$ algebraisch äquivalent sind. Ist $A = J$ die Jacobische Mannigfaltigkeit einer algebraischen Kurve C , so kann J mit Hilfe des zu C gehörigen Thetadivisors θ polarisiert werden; dies ist die „kanonische“ Polarisierung von J . Der Torellische Satz besagt in der hier angegebenen Form, daß eine algebraische Kurve C durch ihre kanonisch polarisierte Jacobische Mannigfaltigkeit bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Die Beweisidee lehnt sich an den Ansatz von Andreotti (s. dies. Zbl. 48, 379) an. Die Durchführung des Beweises ist infolge technischer Schwierigkeiten etwas langwierig; die Fälle niedrigeren Geschlechts müssen gesondert behandelt werden. Als Hilfsmittel zum Beweis des Torellischen Satzes beweist Verf. u. a. das folgende Resultat, welches auch selbständige Bedeutung besitzt: Es sei A eine polarisierte abelsche Mannigfaltigkeit der Dimension 2. Es gebe auf A einen Polardivisor X derart, daß $X \cdot X_u$ den Grad 2 besitzt für generisches u . Dann ist entweder X eine Kurve vom Geschlecht 2, A die kanonisch polarisierte Jacobische Mannigfaltigkeit von X und die kanonische Abbildung von X in A die identische; oder A ist das Produkt $C \times C'$ zweier elliptischer Kurven C, C' und X ist von der Form $C \times a' + a \times C'$, wo a, a' Punkte auf C bzw. C' sind.

P. Roquette.

Kirby, D.: The structure of an isolated multiple point of a surface. I—III. Proc. London math. Soc., III. Ser. 6, 597—609 (1956); 7, 1—18, 19—28 (1957).

Die vorliegende aus drei Teilen bestehende Untersuchung beschäftigt sich mit isolierten m -fachen Punkten P , und insbesondere mit isolierten Doppelpunkten ($m = 2$), einer algebraischen Fläche V , die auf einer irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit U mit drei Dimensionen liegt. Die angewendeten Methoden verfangen nur, wenn P einfach für U ist. Der Grundkörper k wird als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt; insbesondere kann k der Körper der komplexen Zahlen sein. — Im 1. Teil werden die analytischen Hilfsmittel vorbereitet, die in der Folge benutzt werden. Es wird für V , in der Umgebung des m -fachen Punktes P , eine Gleichung folgender Form angegeben: $x^m + x^{m-2}g_2(y, z) + \dots + g_m(y, z) = 0$; hier sind x, y, z Lokalkoordinaten auf U in P ; die $g_i(y, z)$ sind Reihenentwicklungen in y, z , mit ganzen Exponenten, deren Ordnungen $\geq i$ sind; zu einer solchen Gleichung gelangt man durch Anwendung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes und darauffolgende Vereinfachungen. Für $m = 2$ hat man einfach die Gleichung $x^2 + g_2(y, z) = 0$. Ist dann $x'^2 + g'_2(y', z') = 0$ eine andere ähnliche Gleichung für dieselbe V , so ist g'_2 aus g_2 durch eine reguläre Transformation von y, z in y', z' , bis auf eine Faktorreihe der Ordnung Null, erhältlich. Es werden so mit dem m -fachen Punkte P gewisse $m - 1$ analytische Kurven $g_i = 0$, und im Falle $m = 2$ eine einzige solche Kurve $g_2 = 0$, verbunden; so daß die Untersuchung der Struktur von P sich auf diejenige der Struktur der Kurven $g_i = 0$ in der Umgebung von P reduziert. Es werden dann notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, dafür, daß P auf einer m -fachen Linie von V liegt. — Der 2. Teil fängt mit einer kurzen Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften der von B. Segre eingeführten Dilatationstransformationen an; es ist bekannt, daß es möglich ist, einen isolierten Doppelpunkt P durch eine endliche Anzahl von aufeinanderfolgenden Punkt- und Liniendilatationen aufzulösen. Die auflösende Dilatationenreihe wird nun von der Struktur der analytischen Kurve $g_2 = 0$ in der Umgebung von P (d. h. von der Reihe aufeinanderfolgender mehrfacher Punkte, die $g_2 = 0$ in P aufweist) vollständig bestimmt. Es folgt die Anwendung auf besondere Arten von Doppelpunkten. Es werden zunächst sogenannte „vollständig isolierte“ Doppelpunkte betrachtet, d. h. solche, die durch lauter Punktdilatationen auflösbar sind; die Lokalgleichung von V in P kann dann auf eine der folgenden Formen reduziert werden: $x^2 + y^2 + z^r = 0$ ($r \geq 2$); $x^2 + y^2 z + z^r = 0$ ($r \geq 3$); $x^2 + y^3 + z^4 = 0$, $x^2 + y^3 + y z^3 = 0$, $x^2 + y^3 + z^5 = 0$; die entsprechende Kurve $g_2 = 0$ hat in P entweder eine Folge von Multiplizitäten, die 2 nicht übersteigen, oder eine einzige (höchste) Multiplizität gleich 3. Es werden schließlich kompliziertere Arten von Doppelpunkten betrachtet, d. h. die „Hyperdoppelpunkte“, für welche die Kurve $g_2 = 0$ eine Anzahl $r > 1$ von aufeinanderfolgenden dreifachen Punkten aufweist; und dann die Doppelpunkte, welche von folgenden Gleichungen definiert werden: $x^2 + y^{2n} + z^{2mn} = 0$, $x^2 + y^{2n} z + z^{2mn+1} = 0$, $x^2 + y^{2n+1} + z^{2mn+m} = 0$. Dieser 2. Teil ist mit den Untersuchungen von B. Segre (s. dies. Zbl. 46, 389) und P. Du Val (dies. Zbl. 36, 375) über Doppelpunkte in Verbindung zu setzen. — Im 3. Teil werden die Verfahren des 2. Teiles auf einen m -fachen isolierten Punkt P von V ausgedehnt. Es wird bewiesen, daß die Struktur der $m - 1$ analytischen Kurven $g_i = 0$ in der Umgebung von P eine Reihe von Punkt- und Liniendilatationen bestimmt, die, von V ausgehend, zu einer Fläche führt, auf welcher dem Punkte P lauter Punkte mit einer Multiplizität kleiner als m entsprechen.

E. Togliatti.

Godeaux, Lucien: Note sur les points de diramation d'une surface multiple. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 44, 8—16 (1958).

Etude par la méthode classique de l'A. du comportement de certaines courbes sur la surface image d'une involution en un point de diramation où le cône tangent se scinde en quatre cônes rationnels. En ce point sont infiniment voisins des points

doubles dont le premier est sur la droite (s_α, t_α) . Cette note étudie surtout les points doubles sur la droite (t_α, t_β) . B. d'Orgeval.

Hutcherson, W. R. and N. A. Childress: Surfaces obtained from involutions generated by homographies of periods three, five, and thirteen. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 11, 41—48 (1957).

Etude de la surface représentant les groupes d'une involution plane d'ordre 13 engendrée par une homographie non homologique, et de ses projections.

L. Godeaux.

Burniat, Pol: Modèles de surfaces canoniques de genres $p_g = 4$ et $p^{(1)} = 13, 14, \dots, 33$. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 720—730 (1957).

L'A. construit une surface algébrique régulière contenant une involution d'ordre 4 engendrée par un groupe trirectangle de transformations birationnelles involutives de la surface en soi, dont le système canonique a la dimension 3 ($p_g = 4$) et est composé au moyen de l'involution. Le genre linéaire de la surface peut prendre les valeurs de 13 à 33.

L. Godeaux.

Godeaux, Lucien: Sur le lieu des droites des surfaces cubiques d'un faisceau. Mathesis 66, 249—252 (1957).

Jede algebraische Fläche dritter Ordnung F , die keine Regelfläche ist, trägt bekanntlich 27 Geraden, die Durchdringungskurve zweier solcher Flächen ist i. a. eine algebraische Raumkurve neunter Ordnung c . Die Gesamtheit der durch c laufenden Flächen F bildet ein Büschel; die allen Büschelflächen angehörenden Geraden erfüllen eine algebraische Regelfläche Γ . Gegenstand der vorliegenden Abhandlung ist die Ermittlung der algebraischen Charaktere von Γ . Es wird bewiesen, daß Γ von der Ordnung 42 und vom Geschlecht 70 ist, c zur elffachen Kurve und überdies eine Doppelkurve d der Ordnung 255 besitzt. Das Büschel enthält 32 Flächen F_0 mit je einem Doppelpunkt; jeder solche Punkt hat auf Γ die Vielfachheit 6 und auf d die Vielfachheit 15.

H. Horninger.

Gaeta, Federico: Sull'equazione canonica di un complesso C_{n-a-1}^g di sottospazi S_a di S_n . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 23, 389—394 (1958).

Estendendo precedenti risultati di F. Klein e C. H. Sisam, un classico teorema di F. Severi [Ann. Mat. pura appl., III. Ser. 24, 89—120 (1915)] afferma che, sulla grassmanniana V_t dei sottospazi S_d dello S_n [$t = (d+1)(n-d)$], ogni varietà algebrica a $t-1$ dimensioni (immagine di un complesso C^g , d'ordine g , di S_d dello S_n) è segabile con una forma d'ordine g dello spazio S_e $\left[e = \binom{n+1}{d+1} - 1 \right]$, ambiente di V_t . Il risultato, stabilito pensando come corpo base quello dei numeri complessi, è poi valido per un qualunque corpo base commutativo di caratteristica zero. — Esclusi i casi $d=0$, $d=n-1$, e $g=1$, la forma d'ordine g di cui sopra (brevemente la g -ica secante) non è unica. Nel presente lavoro, con impostazione moderna (e mezzi tensoriali), si dimostra l'esistenza di una g -ica secante individuata intrinsecamente dal complesso C^g , covariante per il gruppo di tutte le omografie che mutano la grassmanniana in sè. Si ha così la g -ica canonica secante di C^g , e la sua equazione in coordinate grassmanniane puntuali (o, dualmente, iperplanari) fornisce l'equazione canonica puntuale (od iperplanare) del complesso.

V. E. Galafassi.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

Vakselj, Anton: Algebraische Grundlage der Vektorrechnung. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 12, 161—168, serbo-kroatische Zusammenfassg. 168—169 (1957).

Verf. definiert als „äußeres“ Produkt zweier n -reihiger Matrizen (1) $A \pi B = a A B + a' B A + b A_1 B + b' B_1 A + [2 c (A B)_1 + d A_1 B_1] E$ ($A B =$ gewöhnl.

Matrizenprodukt; $A_1 = \text{Spur von } A$) und als „inneres“ Produkt $A \pi B = 2c' (A B)_1 + d' A_1 B_1$. $A \pi B$ ist, abgesehen von dem trivialen Fall $A \pi B = k A_1 B_1 E$, assoziativ, wenn $a a' = 0$ und a (oder a') $= k(k - l n)$, $b = b' = k l$, $2c = l(l n - k)$, $d = -l^2$ (k, l Parameter). Für gemischte Produkte werden diejenigen Bildungen ermittelt, bei welchen $(A \pi B) \rho C = (B \pi C) \rho A$ ist. Zwei Produktdefinitionen π und π_1 lassen sich zu einem assoziativen „Produkt“ $\pi \pi_1$ verknüpfen, indem man in (1) $A B, B A, B, A, E$ ersetzt durch $A \pi_1 B, B \pi_1 A, \frac{1}{2} (B \pi_1 E + E \pi_1 B), \frac{1}{2} (A \pi_1 E + E \pi_1 A), E \pi_1 E$. Die Koeffizienten von $\pi \pi_1$ sind als Funktionen der Koeffizienten von π und π_1 angegeben. Diese Funktionen werden besonders einfach, wenn man $A \pi B$ als lineare Kombination (mit Koeffizienten l, m, r, s, t, u) von gewissen „kanonischen“ Produkten, worunter auch $\frac{1}{2} (A B - B A)$, darstellt. Die Produktdefinition $\pi(l, m, r, s, t, u)$ wird als hyperkomplexe Zahl gedeutet. Die Menge der Matrizen mit Spur Null geht bei Anwendung von (1) in sich über, wenn (2) $a + a' + 2nc = 0$ ist. — Im zweiten Teil der Arbeit befaßt sich Verf. speziell mit zweireihigen Matrizen $A = (a_{ik})$, $a_{22} = -a_{11}$, und wählt als „äußeres“ Produkt, welches (2) erfüllt, $A \wedge B = \frac{1}{2} (A B - B A)$, als „inneres“ (kommutatives) Produkt $A \cdot B = -\frac{1}{2} (A B)_1$. Ist $A \cdot B = 0$, so wird $A \wedge B = A B = -B A$. Durch $a_1 = i a_{11}$, $a_2 = -\frac{1}{2} i (a_{12} + a_{21})$, $a_3 = \frac{1}{2} (a_{12} - a_{21})$ wird die Menge der Matrizen A hinsichtlich der Verknüpfung \wedge isomorph abgebildet auf die Menge der Vektoren $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, a_3)$ mit der Verknüpfung \times . (Ref.: Dies entspricht im wesentlichen der Abbildung dieser Vektoren auf die binären quadratischen Formen in der Binäranalyse von E. Waelsch.) Außerdem ist $A \cdot B$ gleich dem skalaren Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$. Dasselbe gilt, wie Verf. sagt, bezüglich der Matrizen $A' = (a_{ik} = \varepsilon a_l)$ mit $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem $i k l$ eine gerade oder ungerade Permutation von 1 2 3 ist, und $a_{ii} = 0$ (Ref.: dann ist aber das äußere Produkt durch $B' A' - A' B'$ zu definieren). — Damit sind zwei Darstellungen der dreidimensionalen Vektoren durch quadratische Matrizen gefunden. Verf. deutet noch die Möglichkeit an, durch Komposition von A und A' weitere solche Darstellungen zu erhalten, z. B. $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ (Ref.: Das zweite Beispiel liefert keine solche Darstellung).

E. Schönhardt.

Vakselj, Anton: Vektordreiein einer analytischen Funktion. Periodicum math. phys. astron., II. Ser. 12, 171—179, serbo-kroatische Zusammenfassg. 179—180 (1957).

Verf. entwickelt hier den Gedanken einer früheren Note (dies. Zbl. 46, 77) weiter und macht dabei durchweg Gebrauch von der in einer vorhergehenden Arbeit (s. vorstehendes Referat) behandelten Darstellung von Vektoren durch zweireihige Matrizen. Unter Ausschaltung der Matrizen stellt sich der Sachverhalt wie folgt dar. In einem Punkt z einer analytischen Funktion $T = f(Z)$ mit $t' = f'(z) \neq 0$ gibt es ein einparametrisches System von „tangentiellen“ linearen Substitutionen $W = (aZ + b)/(cZ + d)$ (darunter auch eine „oskulierende“ Substitution O), für welche $T - W$ mindestens von der zweiten (bzw. dritten) Ordnung verschwindet. In diesem System befindet sich auch eine Involution $A: W = (a_{11}Z + a_{12})/(a_{21}Z - a_{11})$. Die Doppelpunkte jeder tangentiellen Substitution werden vertauscht durch eine Involution B . Ist $t = f(z) \neq z$, so gibt es auch eine Involution C mit den Doppelpunkten z und t . A, B, C bilden zusammen mit E eine Vierergruppe, ihre Koeffizienten sind Funktionen von z, t, t' . Der Involution A läßt sich nun der Vektor $\mathfrak{A} = (i a_{11}, -\frac{1}{2} i (a_{12} + a_{21}), \frac{1}{2} (a_{12} - a_{21}))$ zuordnen; analog B und C die Vektoren \mathfrak{B} und \mathfrak{C} . $\mathfrak{A} \mathfrak{B} = 0$ bringt die harmonische Lage der Doppelpunkte von A und B zum Ausdruck. Nimmt man noch die Determinanten von A, B, C gleich 1, so bedeutet dies $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{B}^2 = \mathfrak{C}^2 = 1$, und es ist dann $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = \mathfrak{A}, \mathfrak{C} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. In $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ist damit ein Analogon zu dem begleitenden Dreiein einer Raumkurve gefunden.

Die Analogie geht aber noch weiter. Führt man nämlich die Variable $s = \int_{z_0}^z \frac{2i\sqrt{t'}}{t-z} dz$

ein, so sind die Ableitungen von \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} nach s gleich $k\mathfrak{B}$, $-k\mathfrak{A} + i\mathfrak{C}$, $-i\mathfrak{B}$, wo $k = [2t'(t' + 1) - t''(t - z)]/4t'^{3/2}$ die absolute Invariante von O ist. Man hat also ein vollständiges Analogon zu den Frenetschen Formeln, wenn man k an die Stelle der Krümmung und i an die Stelle der Torsion treten läßt. Durch Integration von \mathfrak{A} nach s , welche sich auf die drei Integrale $\int t^n dz/(t - z)^2$ ($n = 0, 1, 2$) zurückführen läßt, kann auch der Ortsvektor der der Funktion $T = f(Z)$ zugeordneten „Raumkurve“ angegeben werden. Verf. erwähnt noch, daß k und s ungeändert bleiben, wenn man z und t derselben linearen Transformation unterwirft, beweist die Umkehrung und gibt einige Beispiele für die Bedeutung von s . *E. Schönhardt*.

Brinis, Elisa: Sui tensori parzialmente isotropi. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **91**, 650—660 (1957).

Verf. nennt, in Verallgemeinerung des von U. Cisotti [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. **11**, 727—731, 917—920 (1930)] eingeführten Begriffs der Isotropie eines Tensors, einen Tensor dritter Stufe der Form $T_{rk}^i = q_r \delta_k^i (\delta_k^i = 0 \text{ für } i \neq k, \delta_i^i = 1)$ „partiell isotrop“ hinsichtlich der Indizes i und k . (Isotrope Tensoren zweiter Stufe lassen sich auf die Form $A \delta_k^i$ zurückführen, isotrope Tensoren ungerader Stufe existieren nicht). In Analogie mit der Darstellung eines Tensors zweiter Stufe als Summe eines isotropen Teils und eines andern mit verschwindender linearer Invariante gilt für einen Tensor dritter Stufe die eindeutige Zerlegung $T_{ih}^k = \varphi_i \delta_h^k + \psi_h \delta_i^k + B_{ih}^k$, worin die beiden ersten Summanden partiell isotrop hinsichtlich h, k bzw. i, k sind, während $B_{ih}^k = B_{ih}^h = 0$ ist. — Wie das von P. Nalli (dies. Zbl. **71**, 155) betrachtete System der $n^2 - 1$ Größen $T_{i+1}^{i+1} \dots T_i^i$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$), T_i^j ($i \neq j$) verschwindet, wenn T_i^i isotrop ist, so bedeutet das Verschwinden des Systems $H(i, j)$, $K(i, j)$, $N(i, j, h)$ von P. Nalli (dies. Zbl. **65**, 148), daß der Tensor P_{hi}^j , aus dem es hergeleitet wurde, der symmetrische Teil eines partiell isotropen Tensors ist. Ein ähnliches von Verf. angegebenes System verschwindet, wenn der Ausgangstensor P_{ij}^h selbst partiell isotrop hinsichtlich j, h ist. Es folgen noch geometrische Anwendungen, sowie Hinweise auf partiell isotrope Tensoren fünfter Stufe und Anwendungen derselben.

E. Schönhardt.

Smith, G. F. and R. S. Rivlin: The anisotropic tensors. Quart. appl. Math. **15**, 308—314 (1957).

Die Verff. betrachten einen in einem kartesischen Koordinatensystem x_i ($i = 1, 2, 3$) dargestellten (und auf die orthogonale Gruppe T beschränkten) Tensor a_{i_1, i_2, \dots, i_n} ($i_p = 1, 2, 3$). Mit $x_i^* = s_{ij} x_j$, $s_{ij} s_{ik} = \delta_{ik}$ wird aus a_{i_1, i_2, \dots, i_n} das Komponentensystem $a_{i_1, i_2, \dots, i_n}^*$ a_{i_1, i_2, \dots, i_n} heißt ein isotroper Tensor wenn $a_{i_1, i_2, \dots, i_n}^* = a_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ gilt für alle orthogonalen s_{ij} , dagegen anisotrop, wenn diese Identität nur für eine Untergruppe $\{T\}$ von T besteht. Die Komponenten isotroper Tensoren erscheinen somit als Invarianten der Gruppe T , diejenigen anisotroper Tensoren als solche einer gewissen Untergruppe $\{T\}$ von T . Zu $\{T\}$ läßt sich eine Tensorbasis angeben. Jeder Tensor dieser Basis ist invariant gegenüber $\{T\}$ und irgendein gegenüber $\{T\}$ invarianter (anisotroper) Tensor läßt sich durch eine endliche Summe äußerer Tensorprodukte (aus dieser Basis) darstellen. Als Beispiele solcher Tensorbasen werden spezielle untersucht, die zu Untergruppen gehören, welche für spezielle Kristallklassen von Bedeutung sind. Die Theorie kann auch in euklidischen Räumen beliebiger Dimensionzahl entwickelt werden. *M. Pinl*.

Truesdell, C.: Geometric interpretation for the reciprocal deformation tensors. Quart. appl. Math. **15**, 434—435 (1958).

Wird eine endliche Deformation durch die lineare Vektorfunktion $x = x(X)$ dargestellt, so werden die Änderungen der Längenelemente durch den Tensor C

gemessen, wobei

$$C_{KM} = g_{km} x^k_K x^m_M$$

gilt (wenn $ds^2 = g_{km} dx^k dx^m$). Zu C gehört dual der Tensor c und zu beiden reziprok die Tensoren C^{-1} und c^{-1} . Der Tensor $C^{-1}/\det C^{-1}$ mißt die Änderung der Flächenelemente (bei Deformation) in gleicher Weise wie C die der Längenelemente. Aus dem (bekannten) ersten Dualitätsprinzip, welches die Vertauschung der Rollen von X und x erlaubt, ergibt sich ein zweites Dualitätsprinzip, welches den Übergang von C, c und „Längen“ zu $C^{-1}/\det C, c^{-1}/\det c$ und „Flächen“ gestattet.

M. Pinl.

Osipov, P. N.: On reducing a double curvilinear integral to a double plane integral. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1958, 493—496, russ. und engl. Zusammenfassg. 497 (1958) [Ukrainisch].

A. Ju. Islinskij [Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1951, 397 (1951)] obtained a formula for converting a double curvilinear integral of a scalar function of two closed circuits into a double plane integral of two smooth planes leaning on these circuits. The derivation of A. Ju. Islinskij's formula required only vector analysis. The author obtained formulas for the conversion of a double curvilinear integral of a vector function of two closed circuits into a double plane integral of two smooth planes stretched on these circuits. Vector analysis proving inadequate for the derivation of these formulas, the author had recourse to dyad calculus.

[Engl. Zusammenfassg.]

Frölicher, Alfred and Albert Nijenhuis: Theory of vector-valued differential forms. I: Derivations in the graded ring of differential forms. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 59, 338—350, 351—359 (1956).

Définition des formes scalaires et vectorielles sur un module unitaire, et des multiplications de ces formes. Définition des formes différentielles à valeurs scalaires et à valeurs vectorielles sur une variété indéfiniment différentiable. Les formes différentielles à valeurs scalaires sont les formes différentielles usuelles, qui constituent une algèbre graduée. Il existe deux classes de dérivations de cette algèbre, telles que toute dérivation soit la somme d'une dérivation de la première classe et d'une dérivation de la seconde. Toute dérivation de la première classe s'annule sur les formes de degré 0 et se trouve déterminée par son action sur les formes de degré 1. Toute dérivation de la seconde classe est déterminée par son action sur les formes de degré 0 et par une condition d'anticommutation avec la différentielle extérieure. Les dérivations de la première classe sont mises en correspondance biunivoque avec les formes différentielles à valeurs vectorielles. — Etude du crochet de deux dérivations, permettant de définir le crochet de deux formes à valeurs vectorielles. Les AA. appliquent leur théorie à l'établissement d'une démonstration nouvelle d'un théorème de Haantjes.

F. Norguet.

Schouten, J. A.: On currents and their invariant derivatives. II. III. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 59, 381—385 (1956); 60, 1—11 (1957).

L'A. introduit une méthode de calcul, la „valence-number method“, permettant une réduction importante du nombre des indices au cours des calculs tensoriels. Il utilise cette méthode pour établir une formule relative aux opérateurs introduits dans un travail précédent (ce Zbl. 72, 172) ainsi qu'une formule due à A. Frölicher et A. Nijenhuis (rapport ci-dessus). Dans la IIIème partie l'A. poursuit le développement de la méthode introduite dans la IIème partie. Il étudie certains produits de tenseurs alternés en leurs indices covariants et en leurs indices contravariants pour lesquels se pose le problème de choisir des coefficients bien adaptés. Deux solutions sont présentées, issues respectivement du calcul tensoriel sous la forme de la „valence-number method“, et de la multiplication extérieure des formes différentielles. La seconde solution utilise des opérateurs introduits par A. Nijenhuis au cours d'une correspondance avec l'A.

F. Norguet.

Carter, W. J.: Second acceleration in four-bar mechanisms as related to rotopole motion. *J. appl. Mech.* 25, 293—294 (1958).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

- Norden, A. P.: *Differentialgeometrie. I.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956. VIII, 135 S. DM 7,60.
- Norden, A. P.: *Differentialgeometrie. II.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1957. VIII, 260 S., 60 Abb. Brosch. DM 7,40.

Die von R. Sulanke ausgeführte Übersetzung der Nordenschen Differentialgeometrie ist in zwei Teilen erschienen. Abweichend vom russischen Original sind zur Erleichterung zum selbständigen Durcharbeiten der Übungen die Lösungen und besondere Erläuterungen angefügt. Die Kapitel des I. Bandes behandeln: Vektoren als Funktionen eines Parameters, Kurven und Tangenten (hier werden auch ebene Kurven in impliziter Darstellung, singuläre Punkte, Asymptoten, algebraische Kurven, Enveloppen behandelt), das begleitende Dreiein einer Kurve, die Frenetschen Formeln, die natürlichen Gleichungen einer Kurve, abwickelbare Flächen. Band II behandelt: Krümmmlinige Koordinaten (Parameterdarstellung einer Fläche, I. quadratische Form, Rotationsflächen, abwickelbare und nicht abwickelbare geradlinige Flächen), Krümmung einer Kurve auf einer Fläche (II. quadratische Form, Sätze von Meusnier und Euler, Umgebung eines elliptischen, parabolischen, hyperbolischen Punktes), besondere Linien und Netze auf einer Fläche, innere Geometrie der Flächen (Verbiegung, geodätische Linien, konforme Abbildung), Parallelübertragung (Parallelverschiebung eines Vektors längs einer Kurve, Satz von Gauß-Bonnet, geodätische Dreiecke, Integralkrümmung geschlossener Flächen). — Die Darstellung bevorzugt das elementar Anschauliche und vernachlässigt eine klare Begriffsbildung. Z. B. findet man in Band I auf S. 1 ohne jeden Zusammenhang als Definition: „Ein Vektor heißt unendlich klein, wenn sein absoluter Betrag gegen Null strebt“. An anderer Stelle wird das Restglied der Taylorsche Formel für eine vektorische Funktion einer Variablen richtig mit drei Zwischenwerten angegeben, aber die Anwendung auf I, S. 54 ist irreführend und nicht richtig. Derartige Beispiele lassen sich beliebig vermehren.

W. Haack.

Calapso, Maria Teresa: *Sulle curve a flessione costante.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 22, 438—442 (1957).

Ausgehend von zwei analytischen, isotropen Kurven des Raumes, für die eine wohlbekannte Parameterdarstellung unter Verwendung willkürlicher Funktionen f bzw. φ des Parameters t benutzt wird, gibt die Verfasserin die Parameterdarstellung einer allgemeinen Raumkurve konstanter Krümmung an. Die Funktionen f und φ müssen hierzu einer Beziehung der Gestalt genügen, daß f''' eine einfach gebaute Funktion von $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$ sowie des konstanten Krümmungsradius ist. Die Bestimmung der Kurven konstanter Krümmung läuft daher bei Vorgabe von φ nach einem Satz der Analysis auf eine einzige Quadratur hinaus. Einfache Beispiele, wie etwa die Kubik von Lyon, sowie Sonderfälle dieser Differentialgleichung werden betrachtet. Als Verallgemeinerung werden in gleicher Weise, d. h. mit der gleichen Parameterdarstellung die Kurven des Raumes erfaßt, für die der Krümmungsradius eine lineare Funktion der Bogenlänge ist. Hierzu ist lediglich die Beziehung zwischen den Funktionen f und φ geringfügig abzuändern. Auch in diesem Fall benötigt man nur eine einzige Quadratur.

H. R. Müller.

Kaul, R. N. and Ram Behari: *Generalization of Lie's theorem on null lines.* Math. Student 25, 17—18 (1957).

Mit den Worten der Verff. läßt sich das Resultat ihrer Note zusammenfassen in: „We get the result that the locus of the points which divide the join of any two points one on each of the two null lines imbedded in a Euclidean E_n in any constant ratio is a minimal variety of 2 dimensions, which is a generalization of Lie's theorem for surface in a Euclidean 3-space“.

K. P. Grottemeyer.

Nitsche, Johannes: Über eine mit der Minimalflächengleichung zusammenhängende analytische Funktion und den Bernsteinschen Satz. Arch. der Math. 7, 417—419 (1957).

Es sei $z(x, y)$ eine Lösung der Minimalflächengleichung in dem konvexen Gebiet G . Verf. gibt eine elegante Transformation

$$\xi = x + A(x, y), \quad \eta = y + B(x, y)$$

auf isotherme Parameter an, die G auf das Gebiet Γ der (ξ, η) -Ebene abbildet. Diese umkehrbar eindeutige Abbildung hat die Eigenschaft, daß alle Entfernungen vergrößert werden. Wenn G also die ganze (x, y) -Ebene ist, dann muß Γ die ganze (ξ, η) -Ebene sein. Es zeigt sich, daß die Funktion

$$F(\sigma) = (p - iq) \left(1 + \sqrt{1 + p^2 + q^2}\right)^{-1}, \quad z_x = p, \quad z_y = q,$$

in $\sigma = \xi + i\eta$ regulär analytisch ist. Außerdem gilt in Γ : $|F(\sigma)| < 1$. Ist G die Vollebene, so folgt daraus bereits der Bernsteinsche Minimalflächensatz: Eine für alle (x, y) zweimal stetig differenzierbare Minimalfläche, welche sich in der Form $z = z(x, y)$ darstellen läßt, ist notwendig eine Ebene. Kombiniert man das Schwarzsche Lemma mit der Beschränktheit von $F(\sigma)$, so läßt sich die Gaußsche Krümmung K im Mittelpunkt (x_0, y_0) eines Kreises vom Radius R in Abhängigkeit von R abschätzen, in ähnlicher Weise, wie dieses schon von E. Heinz (s. dies. Zbl. 48, 154) und E. Hopf (s. dies. Zbl. 51, 126) geschehen ist. *K. P. Grottemeyer.*

Nitsche, Johannes C. C.: Elementary proof of Bernstein's theorem on minimal surfaces. Ann. of Math., II. Ser. 66, 543—544 (1957).

Verf. gibt einen sehr einfachen und durchsichtigen Beweis des folgenden Satzes (vgl. Joergens, dies. Zbl. 55, 84). Die Funktion $z(x, y)$ sei für alle (x, y) zweimal stetig differenzierbar und genüge der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$, dann ist $z(x, y)$ ein quadratisches Polynom, d. h. ein Paraboloid. [Übrigens läßt sich dieses Ergebnis im Rahmen der Affin-Geometrie einfach geometrisch interpretieren: Die einzigen für alle (x, y) zweimal stetig differenzierbaren uneigentlichen Affinsphären (spezielle Affinminimalflächen), die sich in der Form $z = z(x, y)$ darstellen lassen, sind die Paraboloiden.] Zum Beweis betrachtet Verf. die eineindeutige Abbildung $\xi = x + p(x, y)$, $\eta = y + q(x, y)$, $p = z_x$, $q = z_y$, welche die (x, y) -Ebene auf die (ξ, η) -Ebene abbildet. Die Funktion $f(\sigma) = (x - p) - i(y - q)$ ist dann regulär analytisch in $\sigma = \xi + i\eta$. Weiter findet man $|f'(\sigma)| < 1$ in der ganzen σ -Ebene. Daraus ergibt sich aber mit $r = \text{const}$, $s = \text{const}$, $t = \text{const}$ die Behauptung. Unter Verwendung des Schwarzschen Lemmas lassen sich auf einfache Weise Abschätzungen für die dritten und höheren Ableitungen der Lösungen von $rt - s^2 = 1$ in einer Kreisscheibe angeben. *K. P. Grottemeyer.*

Löbell, Frank: Der Einfluß einer Flächentransformation auf die geodätischen Krümmungen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1957, 15—24 (1958).

Bei der Abbildung einer Fläche \mathfrak{F} auf eine Fläche \mathfrak{F}' bleibt im allgemeinen ein orthogonales Kurvennetz orthogonal. Bezogen auf dieses Netz wird die geodätische Krümmung einer Flächenkurve nach Bonnet-Liouville aufgestellt und ihr Verhalten bei der Abbildung $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ untersucht. Sind g, g' die geodätischen Krümmungen zugeordneter Kurvenpunkte, so gilt $m^3 g' = m_1 m_2 g + \Phi$ mit m = linearer Maßstab, $m_1 \cdot m_2$ = Flächenmaßstab der Abbildung. Φ ist eine kubische, von g unabhängige Form. Daher gibt es in jedem Punkt P drei Flächentangenten der Art, daß die sie berührenden geodätischen Linien Bildkurven besitzen, deren geodätische Krümmung in P' verschwindet. Es folgen Betrachtungen über den Fall, daß Φ den Faktor m^2 enthält, über flächentreue Abbildung und eine Schlußbemerkung über die Transformation des Krümmungsmaßes. *W. Haack.*

Santaló, L. A.: Einige Eigenschaften der konformen Abbildung im Kleinen zweier Flächen aufeinander. Revista Un. mat. Argentina 18, 45—52 (1957) [Spanisch].

Sei F eine zweimal differenzierbare Fläche, μ ihre (durch Einbettung in den Raum induzierte) metrische Grundform. Jeder Kurve k von F durch p wird ihr Krümmungszentrum $m(k)$ in dem zur projektiven Ebene P_p erweiterten Tangentialraum zugeordnet. Verf. beweist: eine lokale konforme Homöomorphie in eine F' , die $p \rightarrow p'$, $k \rightarrow k'$ und $\mu' \rightarrow \alpha \mu$ überführt, induziert eine Projektivität $m(k) \rightarrow m(k')$ von $P_p \rightarrow P_{p'}$. Folgerungen: 1. Invarianz des Quotienten $(\kappa_1 - \kappa_2)/(\kappa_1 - \kappa_3)$ für drei Kurven durch p mit gleicher Tangente und den Krümmungen κ_j . 2. Die $m(k')$, deren zugehörige k in p die Krümmung Null besitzen, liegen auf einer Geraden — insbesondere: haben die Bilder zweier Geodätischer durch p die Krümmung Null in p' , so entsprechen sich die Kurven mit Krümmung Null durch p und p' eindeutig. 3. Diejenigen $m(k')$, deren zugehörige k in p eine feste Krümmung ($\neq 0$) besitzen, liegen auf einem Kegelschnitt mit dem Ursprung als Brennpunkt (Verallgemeinerung eines Satzes von Ringleb für $F = \text{Ebene}$). $d\alpha = 0$ in p ist notwendig und hinreichend dafür, daß sich die Krümmung mit $\alpha(p)$ multipliziert — Kurven konstanter Krümmung entsprechen einander, wenn $\alpha = \text{konst.}$ und umgekehrt. 4. Anwendung auf Loxodromen der Rotationsflächen und die Mercatorprojektion.

K. Legrady.

Rembs, Eduard: Über einen Starrheitssatz von A. D. Alexandrow und E. P. Senkin und ein Analogon. Math. Nachr. 16, 130—133 (1957).

Es sei F eine Fläche positiver Krümmung und O ein solcher Punkt, daß 1. die Fläche aus dem Punkt von einer Seite sichtbar ist, und 2. durch den Punkt eine Ebene geht, derart, daß die Fläche auf einer Seite von ihr liegt. Sind dann die Entfernungen der Randpunkte zu O stationär, so ist die infinitesimale Verbiegung eine infinitesimale Bewegung; d. h. die Fläche ist starr. Dieser Satz der beiden im Titel genannten Autoren wird vom Verf. für den Fall, daß die Fläche von „außen“ gesehen wird, durch eine einfache Anwendung des Parafschen Satzes bewiesen, wobei die Voraussetzung über die Ebene überflüssig ist. Ist \mathfrak{z} der Zusatzvektor der infinitesimalen Verbiegung, so wird mit Hilfe des Schiebungsvektors eine Gleichung für die Funktion $(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{x}) = \psi$ hergeleitet:

$$(\mathfrak{x} \xi) \underline{B}^{ik} \psi_{i||k} + 2 \kappa g^{ik} (\mathfrak{x} \mathfrak{x}_i) \psi_k - 2 \kappa \psi = 0.$$

Die genannte Randbedingung lautet $\psi = 0$ am Rand. Da $(\mathfrak{x} \xi) \underline{B}^{ik}$ positiv definit ist, so ist $\psi = 0$ die einzige Lösung mit der genannten Randbedingung. Aus $\psi = 0$ folgt aber $\mathfrak{z} = [\alpha \times \mathfrak{x}]$; d. h. es liegt eine infinitesimale Drehung vor. Im zweiten Teil der Arbeit wird gezeigt, daß eine Mütze M , deren sphärisches Bild ganz im Inneren einer Halbkugel liegt, starr ist, wenn am ganzen Rand der Drehvektor η tangential zu M ist. Der Beweis beruht auf der Weingartenschen Differentialgleichung für die charakteristische Funktion φ . Mit φ ist nämlich auch die Funktion $\varphi + (\alpha \xi)$ ($\xi = \text{Flächennormale}$; $\alpha = \text{fester Vektor}$) eine Lösung der Differentialgleichung. Als Anwendung des Satzes läßt sich zeigen: Wenn bei einer Mütze mit fester mittlerer Krümmung H am Rande für den Stützabstand gilt: $(\mathfrak{x} \xi) = -1/H$, so ist die Mütze Stück einer Kugel. Eine andere Anwendung ist der folgende Starrheitssatz: Eine Mütze mit ebenem Rand des sphärischen Bildes: $(e \xi) = \text{const.}$ ($e = \text{const.}$) ist bei $\delta(e \xi) = 0$ am Rande insgesamt starr. Zum Schluß zeigt der Verf. unter Verwendung der Integralformel von Blaschke, daß der Hauptsatz auch für gewisse Kalotten richtig bleibt, bei denen das sphärische Bild nicht ganz im Inneren einer Halbkugel liegt. Z. B. braucht der Randstreifen der Kalotte nur aus einer endlichen Anzahl von zylindrischen Streifen zusammengesetzt sein.

K. P. Grottemeyer.

Vincensini, M. Paul: Sur un invariant du groupe des équivalences superficielles de l'espace euclidien à trois dimensions. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 23, 217—220 (1958).

Unter Bezugnahme auf eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 30, 368) werden Zuordnungen zwischen den Punkten $P = \mathfrak{x}(u')$ einer Fläche und Punkten $I = \eta(u^i)$

der Tangentialebene betrachtet $\eta = \xi + a^i \xi_i$ ($i = 1, 2$, $a^i = a^i(u^l)$, $\xi_i = \partial \xi / \partial u^i$) und die Bedingung aufgestellt dafür, daß einer Fortschreitungsrichtung $d\xi$ eine dazu orthogonale $d\eta$ entspricht. Die Punkte P gehören dann einem gewissen Netz $A_{ik} du^i du^k = 0$ an: $A_{ik}' = g_{ik} + g_{il} a_k^l + \left[\begin{smallmatrix} k l \\ i \end{smallmatrix} \right] a^l (A_{12} \neq A_{21})$, das biegungsinvariant ist. Mit den Tangenten als Achsen in den Tangentialebenen hat I die Koordinaten $a\sqrt{g_{11}}$, $b\sqrt{g_{22}}$. Das Netz ist insbesondere orthogonal unter der Bedingung

$$\partial a^1 / \partial u^1 + \partial a^2 / \partial u^2 + a^1 \partial \lg \sqrt{g} / \partial u^1 + a^2 \partial \lg \sqrt{g} / \partial u^2 + 2 = 0.$$

Die Funktionenpaare a^1, a^2 , für die das Netz orthogonal ist, bilden also eine sogar gegen flächentreue Abbildungen (équivalences superficielles) invariante Menge. Sind die Flächen S, S' bei der Abbildung auf gleiche Parameter u^i bezogen, so entsprechen sich in den Tangentialebenen der Punkte P, P' die Punkte I, I' mit den Koordinaten (x, y) und (x', y') vermöge der Affinität

$$x' / \sqrt{g_{11}'} = x / \sqrt{g_{11}}, \quad y' / \sqrt{g_{22}'} = y / \sqrt{g_{22}},$$

die als Fortsetzung der flächentreuen Abbildung auf die Tangentialebenen angesehen werden kann. E. Rembs.

Jha, P.: On the guiding curves of a rectilinear congruence. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 23, 412—419 (1957).

Ein Strahlensystem S sei gegeben, indem jedem Punkt einer Leitfläche ξ ein Einheitsvektor δ zugeordnet wird. Durch senkrechte Projektion von δ auf die Tangentenebene von ξ entsteht ein Richtungsfeld in der Leitfläche. Die Hüllkurven des Richtungsfeldes nennt Verf. Leitlinien. Es werden mehrere Sätze über Beziehungen der Torsen des Systems zu den Leitlinien bewiesen, die insbesondere zur Kennzeichnung spezieller Strahlensysteme dienen. Z. B. Zuordnung der Torsen von S und des reflektierten Systems bezüglich ξ ; Leitlinien als eine Schar von Krümmungslinien; Leitlinien als geodätische Linien. W. Haack.

Saban, Giacomo: Détermination des congruences synectiques et des surfaces réglées. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 21, 195—199 (1957).

Bekanntlich läßt sich eine gesuchte Gerade im Euklidischen Raum durch einen dualen Einheitsvektor $\mathfrak{A} = \alpha + \varepsilon \bar{\alpha}$ mit $\varepsilon^2 = 0$ darstellen. Ist \mathfrak{A} Funktion eines dualen Parameters, so entsteht ein synekisches Strahlensystem (s. etwa Blaschke, Vorl. über Diff.-Geometrie I. New York 1945). Verf. zeigt: Ein solches System ist durch eine duale Invariante vollständig bestimmt. Das sphärische Bild, welches stets in eine Kurve entartet, bestimmt das synekische System bis auf einen Parameter. Die Schlußbemerkung des Verf., daß jede Regelfläche durch ihr sphärisches Bild bis auf einen Parameter bestimmt ist, kann Ref. nicht einsehen. W. Haack.

Springer, C. E.: Union parallel displacement. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 11, 104—109 (1957).

Eine Kurve k auf einer Fläche Φ heißt bezüglich einer Strahlenkongruenz K eine „union curve“, wenn die Schmiegeebene σ in jedem Punkt P von k den durch P laufenden Kongruenzstrahl enthält. Die „Unionslinien“ sind damit eine Verallgemeinerung der geodätischen Linien, die man erhält, wenn die Kongruenz K aus den Normalen der Fläche Φ besteht. Die Elemente der Differentialgeometrie dieser Unionslinien von Φ bezüglich der Kongruenz K hat Verf. früher (dies. Zbl. 60, 355) entwickelt. In der vorliegenden Note werden die Begriffe des absoluten Parallelismus von Levi-Civita und des Riemannschen Krümmungstensors auf die Unionsgeometrie einer Fläche Φ bezüglich einer Kongruenz K übertragen. Verschiebt man einen Flächenvektor im absoluten Sinne längs eines infinitesimalen Rundwegs um irgendeinen Punkt P von Φ , so kehrt er nur dann in seine Ausgangslage zurück, wenn der Riemannsche Krümmungstensor von Φ verschwindet, d. h. Φ eben ist. Im Gegensatz dazu kann man die Strahlenkongruenz K zu Φ stets so wählen, daß durch den zugehörigen Unionsparallelismus auf infinitesimalen Rund-

wegen verschobene Flächenvektoren stets in ihre Ausgangslage zurückkehren, ohne daß Φ eben wäre; notwendig und hinreichend dafür ist vielmehr, daß der Unionskrümmungstensor von Φ bezüglich K verschwindet. *K. Strubecker.*

Thybaud, A.: Sur les hélices d'un complexe linéaire. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 884—897 (1957).

Sei K ein linearer Komplex, a seine Achse, E eine zu a normale Ebene und $o = a \cap E$. Eine Raumkurve Γ projiziert sich auf γ in E und definiert den Kegel Φ ihrer Tangentenrichtungen mit Spitze in o . Wenn jede Tangente von Γ zu K gehört (Γ gehört zu K), so ist die Beziehung $\Gamma \rightarrow \Phi \rightarrow \gamma$ bis auf Translationen parallel zu a eineindeutig. $\Phi \leftrightarrow \gamma$ hängt nur von der Komplexkonstanten ab. Zu K gehörige Γ mit Drehkegel Φ heißen Schraubenlinien — γ ist dann Kurve 2. Ordnung. Zu jedem nicht elliptischen γ , dessen Brennpunkt o enthält, gibt es zu jedem K mit Achse a unendlich viele (wesentlich verschiedene) Schraubenlinien, die sich auf γ projizieren — im elliptischen Falle nur für alle genügend großen Komplexkonstanten. Zwei Klassen von Schraubenlinien werden unterschieden: (H): die Hauptnormalen erzeugen Konoide, deren Kanten im Endlichen liegende Durchmesser des Komplexes sind (charakteristisch). (H'): Sie sind Developpen von Schlepplinien. Angabe weiterer Eigenschaften der Kurven H . *K. Legrady.*

Kovancov (Kovantsov), N. I.: A ruled surface geometry analogue to a tri-orthogonal system of surfaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 497—500 (1957) [Russisch].

F. Klein [Math. Ann. 5, 257—302 (1872)] hatte entdeckt, daß jeder Geradenkomplex des P_3 in Analogie zu den Krümmungslinien einer gewöhnlichen Fläche 3 Scharen sog. Hauptregelflächen besitzt. Als Gegenstück zu den Dreifachorthogonalsystemen von Flächen des R_3 , die sich in ihren Krümmungslinien schneiden, hat Klein ferner die sog. Vierfachinvolutionssysteme von Komplexen des P_3 definiert, die sich in ihren gemeinsamen Geraden involutorisch schneiden, was das liniengeometrische Analogon zum senkrechten Schnitt der Flächen des R_3 ist. Das wesentliche Beispiel bei Klein hierzu war die Schar konfokaler Komplexe, in die sich ein allgemeiner quadratischer Komplex einbetten läßt. Allgemein wird jeder Komplex eines Vierfachinvolutionssystems von den übrigen Komplexen in W -Kongruenzen geschnitten, deren Brennflächen mit den Hauptflächen des Komplexes zusammenfallen. In der vorliegenden Arbeit wird nun im Anschluß an einen vom Verf. schon an früherer Stelle entwickelten Formelapparat [s. Kovancov, Ukrain. mat. Žurn. 8, 140—158 (1956)] mit Hilfe von Pfaffschen Formen, die dem Problem angepaßt sind, die besondere Art derjenigen Komplexe untersucht, die sich in ein Vierfachinvolutionssystem einbetten und mithin auch in dreifacher Weise nach je ∞^1 W -Kongruenzen schichten lassen. Die Analogie mit den Dreifachorthogonalsystemen läßt sich noch weiter verfolgen: Die W -Kongruenzen entsprechen den Flächen des dreifachen Orthogonalsystems, die Hauptflächen des Komplexes den Krümmungslinien und die Reguli innerhalb des Komplexes sind analog zu den Geraden und Kreisen auf den Flächen im R_3 . Im Sinne dieser Analogie werden noch folgende zwei Typen von Komplexen besonders untersucht: a) solche, bei denen eine Schar von Hauptflächen aus Quadriken besteht, d. h. wo im R_3 eine Schar der auftretenden Krümmungslinien aus Kreisen oder Geraden besteht, b) solche, die analog zu Dreifachorthogonalscharen sind, bei denen eine Schar aus Kugeln oder Ebenen besteht.

W. Burau.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Nagarathnamma, H. S.: Properties of the intrinsic derivatives of the first and higher orders of the unit normal vector for a curve in a Riemannian space. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 23, 40—49 (1957).

Die Autorin betrachtet lokale Eigenschaften einer Kurve C in einem Riemann-

schen Raum V_n , der in einen Riemannschen Raum V_{n+1} eingebettet ist. Die Note zeichnet sich durch besondere Klarheit im Ausdruck und in der Wahl der Bezeichnungen aus. Die Sätze werden koordinatenfrei formuliert, ihr Inhalt, sowie die Beweise folgen dem üblichen Schema für diese Art von Fragestellungen, z. B.: Theorem 1. A necessary and sufficient condition that a curve C in V_n has constant torsion in V_{n+1} is that the second intrinsic derivative of the unit principal normal vector to C in V_{n+1} should be orthogonal to the first binormal unit vector.

W. Klingenberg.

Singal, M. K. and Ram Behari: A note on a family of parallel hypersurfaces in a Riemannian V_n . Math. Student 25, 19—20 (1957).

Die Verff. beweisen den folgenden Satz: Die Hyperflächen einer Schar von Parallel-Hyperflächen sind genau dann zueinander isometrisch, wenn auf jeder einzelnen Hyperfläche der Schar die mittlere Krümmung konstant ist.

K. P. Grottemeyer.

Petrov, P. I.: Second order invariants of the quaternary differential quadratic form. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 1214—1217 (1957); Berichtigung. Ibid. 119, 846 (1958) [Russisch].

Die Invarianten zweiter Differentiationsordnung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit V_4 mit euklidischer oder pseudoeuklidischer Metrik sind nach Cartan in jedem Punkt der V_4 Invarianten des dem lokalen Vierbein zugeordneten Krümmungstensors B_{ijkl} hinsichtlich der orthogonalen Gruppe, wobei noch 3 mögliche Signaturen des Fundamentaltensors g_{ij} zu berücksichtigen sind. In der vorliegenden Arbeit wird ohne Beweis ein umfangreiches System linearer Differentialgleichungen in den 21 Koeffizienten des Krümmungstensors als unabhängigen Variablen aufgestellt, das durch die gesuchten Invarianten befriedigt wird. Durch Integration dieses Systems ergeben sich 14 Grundinvarianten, die homogen und rational von den Graden 2 bis 4 in den B_{ijkl} sind. In den Spezialfällen eines Einsteinschen und eines konform euklidischen Raumes reduzieren sie sich auf jeweils nur 4 Grundinvarianten.

W. Burau.

Stavroulakis, Nicias: Nappes logarithmiques d'un espace riemannien à deux dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1149—1152 (1958).

En observant que le ds^2 d'une nappe conique peut être écrit, dans un système convenable de coordonnées (x_1, x_2) , sous la forme

$$(*) \quad ds^2 = a_{11} dx_1^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2,$$

les a_{ij} étant des fonctions homogènes de degré zéro en x_1, x_2 , l'A. étudie des espaces de Riemann bidimensionnels, dont le ds^2 a la forme (*) et appelle ces espaces des nappes logarithmiques. En utilisant certaines courbes ordinaires (Γ) entourant le point $x_1 = x_2 = 0$, et qui tendent vers ce point ou s'éloignent indéfiniment,

on démontre que $\int_{\Gamma} \frac{ds}{R_g}$ admet toute valeur finie ou infinie comme point d'accumulation.

En utilisant les courbes (Γ) et (Γ'') , en désignant par $\Delta(\Gamma)$, $\Delta(\Gamma'')$ les domaines limités par (Γ) et (Γ'') et en faisant tendre ces courbes vers $x_1 = x_2 = 0$, ou en les faisant s'éloigner indéfiniment, on démontre que $\iint_{\Delta(\Gamma) - \Delta(\Gamma'')} K d\sigma$ admet toute

valeur finie ou infinie comme point d'accumulation. Plusieurs propriétés géométriques sont étudiées, de même qu'une forme réduite du ds^2 , qui permet d'écrire l'équation des géodésiques sous la forme

$$y' = (y^2 + 1) (f y + \sqrt{1 - f^2}),$$

f étant une fonction périodique.

A. Haimovici.

Stavroulakis, Nicias: Les points logarithmiques et les points coniques dans les espaces de Riemann à deux dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1368—1371 (1958).

Si le ds^2 d'un espace riemannien bidimensionnel peut s'écrire sous la forme

$$ds^2 = (a_{11} + \delta_{11}) dx_1^2 + 2(a_{12} + \delta_{12}) dx_1 dx_2 + (a_{22} + \delta_{22}) dx_2^2,$$

les a_{ij} étant des fonctions de degré zéro en x_1, x_2 et les δ_{ij} s'annulant pour $x_1 = x_2 = 0$, on dit que le point $x_1 = x_2 = 0$ est un point logarithmique de l'espace. On admet que si l'on met $\delta_{ij}(u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2) = u_1 \chi_{ij}(u_1, u_2)$, les χ_{ij} sont des fonctions à dérivées premières et secondes continues. On définit encore la nappe logarithmique à élément linéaire $ds^2 = a_{11} dx_1^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2$ comme nappe logarithmique tangente à l'espace au point logarithmique. La notion de point logarithmique est invariante. À l'aide des considérations précédentes on peut définir un point conique d'un espace riemannien: comme un point singulier isolé, pour lequel les coefficients du ds^2 de la nappe logarithmique tangente satisfont à une relation qui caractérise ces points dans un espace euclidien; on trouve que

cette notion est invariante. On démontre pour les intégrales $\int_F \frac{ds}{R_g}$ et $\iint_{\Delta(\Gamma) - \Delta(\Gamma'')} K d\sigma$,

les courbes Γ et Γ'' entourant un point logarithmique non conique, des théorèmes analogues à celles démontrées dans la Note recensée ci-dessus, pour des nappes logarithmiques. On donne enfin une généralisation du théorème de Gauss-Bonnet et on étudie les mêmes intégrales quand $x_1 = x_2 = 0$ est un point conique.

A. Haimovici.

Toponogov, V. A.: On convexity of Riemannian spaces of positive curvature. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 674—676 (1957) [Russisch].

In der vorliegenden Note wird folgender Satz bewiesen: R^n sei ein zweimal differenzierbarer Riemannscher Raum mit einer Metrik von nicht negativer Krümmung. Dann hat jedes geodätische Dreieck Winkel, die nicht kleiner sind als die Winkel des entsprechenden euklidischen Dreiecks von gleicher Seitenlänge. Der Beweis stützt sich auf 2 Hilfssätze und geht dann nach dem Muster der Überlegungen in dem Buche von A. D. Alexandrov [Innere Geometrie konvexer Flächen (dies. Zbl. 38, 352), p. 100—103] vor sich.

W. Burau.

Elianu, Jean: Fonctions complexes et groupes continus. Bull. Sci. math., II. Sér. 81, 134—144 (1957).

Etant donnée une fonction $f(z^1, \dots, z^n)$ où $z^\alpha = x^{2\alpha-1} + i x^{2\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) sont des variables complexes, nous avons $f = P + i Q$ où P, Q sont fonctions des $2n$ variables réelles x^a ($a = 1, \dots, 2n$). L'A. associe à la fonction f l'espace de Riemann V_{2n} ayant la métrique $ds^2 = (P^2 + Q^2) (dx^a)^2$. En posant

$$ds^{2\alpha-1} = P dx^{2\alpha-1} - Q dx^{2\alpha}, \quad ds^{2\alpha} = Q dx^{2\alpha-1} + P dx^{2\alpha}$$

les congruences définies par les $2n$ formes de Pfaff ds^a , sont des congruences orthogonales dans V_{2n} et les covariants bilinéaires Δs^a des formes ds^a sont donnés par les formules

$$(1) \quad \Delta s^{2\alpha-1} = w_{2\alpha-1, 2\alpha}^{2\alpha-1} [ds^{2\alpha-1} ds^{2\alpha}] + \dots$$

et une formule analogue où l'on change $2\alpha-1$ avec 2α et où nous avons

$$(2) \quad w_{2\alpha-1, 2\alpha}^{2\alpha-1} = \frac{1}{P^2 + Q^2} \left[\frac{\partial Q}{\partial x^{2\alpha-1}} + \frac{\partial P}{\partial x^{2\alpha}} \right], \quad w_{2\alpha-1, 2\alpha}^{2\alpha} = \frac{1}{P^2 + Q^2} \left[\frac{\partial Q}{\partial x^{2\alpha}} - \frac{\partial P}{\partial x^{2\alpha-1}} \right].$$

Quant aux termes non écrits dans les (1) ils s'annulent avec ds^a ($a \neq 2\alpha-1, 2\alpha$) mais il ne sont pas identiquement nuls pour $n > 1$ comme l'A. suppose. Il en résulte que $\Delta s^{2\alpha-1}, \Delta s^{2\alpha} \pmod{ds^a}$ sont nuls et si $n=1$ l'espace V_2 est euclidien, si la fonction f est analytique. Si f n'est pas analytique, un cas intéressant considéré par l'A. et celui où Δs^a sont à coefficients constants, quand d'après un théorème du Ref. l'espace V_{2n} possède un groupe simplement transitif de mouvement.

G. Vranceanu.

Vranceanu, G.: Sur une classe d'espaces symétriques. Begriff des Raumes in der Geometrie, Ber. Riemann-Tagung Forsch.-inst. Math. 112—123 (1957).

Verf. betrachtet die elliptischen hermiteschen Räume (das sind die komplexen projektiven Räume $P(C)$ mit der Metrik von Study und Fubini; die 2-Krümmung

ist stets positiv) und die hyperbolischen hermiteschen Räume (das Gegenstück zu $P(C)$ mit negativer 2-Krümmung). Beides sind symmetrische Räume, und zwar diejenigen Spezialfälle des Typs (A III) in Cartans Klassifikation, deren Rang 1 ist. Verf. gibt eine Normalform für das Linienelement in diesen Räumen an, die schon auf Study (1905) und Fubini (1908) zurückgeht, vgl. S. Bochner (s. dies. Zbl. 35, 104). Auch die anderen Ergebnisse des Verf. sind klassisch.

W. Klingenberg.

Singh, K. D.: Sous-espaces d'une variété kählérienne. Bull. Sci. math., II. Sér. 81, partie I, 21—29 (1957).

Verf. berechnet für Untermannigfaltigkeiten Kählerscher Mannigfaltigkeiten Christoffelsymbole, Krümmungsgrößen und dgl. und zieht einige einfache Folgerungen daraus.

H. Götz.

Kawaguchi, Akitsugu and Detlef Laugwitz: Remarks on the theory of Minkowski spaces. Tensor, n. Ser. 7, 190—199 (1957).

Eine sich über 6 Briefe und fast 4 Monate erstreckende Korrespondenz zweier Spezialisten in Finsler-Geometrie, bis der erste Korrespondent zu dem erfreulichen Schluß gelangt, daß alle aufgeworfenen Probleme sich von selber lösen, wenn man bemerkt, daß verschiedene Definitionen von Minkowskischer Geometrie zugrunde gelegt wurden [$F(\lambda x) = |\lambda| F(x)$ (Kawaguchi) und $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ (Laugwitz) für die Indikatrixfunktion $F(x)$].

W. Klingenberg.

Moór, Arthur: Über die autoparallele Abweichung in allgemeinen metrischen Linienelementräumen. Publ. math., Debrecen 5, 102—118 (1957).

L'A. prosegue lo studio degli spazi metrici generali di elementi lineari (v. questo Zbl. 70, 172). Nel presente lavoro, si considera lo scostamento autoparallelo (autoparallela Abweichung), definito in modo analogo allo scostamento geodetico di uno spazio Riemanniano, sostituendo alle geodetiche le autoparallele (che nel caso attuale non coincidono con le geodetiche). Dopo aver trattato il caso delle varietà immerse in uno spazio generale metrico di elementi lineari, (§ 2), si determina l'equazione dello scostamento autoparallelo (§ 3): sfruttando i risultati trovati si dimostra poi nel caso delle due dimensioni una condizione sufficiente affinché le autoparallele uscenti da un punto posseggano un involuppo: il risultato, che è di carattere globale, generalizza un noto teorema di geometria riemanniana, che risolve l'analoga questione per le autoparallele uscenti da un punto. Si accenna poi al caso di dimensioni qualsiasi.

V. Dalla Volta.

Auslander, L. and M. Kuranishi: On the holonomy group of locally euclidean spaces. Ann. of Math., II. Ser. 65, 411—415 (1957).

In the paper there is given an algebraic characterization of the fundamental group of a compact locally euclidean manifold. It is proved, that a finitely generated group π is the fundamental group of some compact euclidean space of dimension n if and only if: 1. There exists a normal subgroup $N \subset \pi$ which is maximal abelian and N is free on n generators. 2. π/N is a finite group. 3. π has no finite subgroups. In the part II is stated, that any finite group can be considered as the holonomy group of a compact euclidean manifold. Many references are made to L. Bieberbach, Math. Ann. 70, 297—336 (1911); 72, 400—412 (1912). In the proofs cohomology theory in abstract groups (S. Eilenberg and S. MacLane, see this Zbl. 29, 340, 341) is used.

M. Sekanina.

Debever, R.: Connexions métriques et champs d'éléments plans parallèles dans les variétés à quatre dimensions. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 44, 56—61 (1958).

Dans un espace riemannien V_4 , à tenseur fondamental g_{ij} , on considère un champ tensoriel antisymétrique non isotrope a_{ij} , normé à l'unité. On cherche une connexion métrique I_{ij}^k , de manière que le champ D_2 soit parallèle, c'est-à-dire que

l'on ait: $\nabla_k g_{ij} = 0$, $\nabla_k a_{ij} = 0$. La solution de ce système est donnée par:

$$(*) \quad \Gamma_{ijk} = \gamma_{ijk} + \varepsilon (a_k^r \overset{\circ}{\nabla}_i a_{rj} + e(g) * a_k^r \overset{\circ}{\nabla}_i * a_{rj}) + \lambda_i a_{jk} + \mu_i * a_{jk},$$

où γ_{ij}^k sont les coefficients de la connexion de Levi-Civita, $\overset{\circ}{\nabla}$ est le symbole de la dérivation par rapport à cette connexion, $*a_{ij}$ est le tenseur adjoint à a_{ij} , $\varepsilon = \pm 1$, $e(g) = \text{sgn } g$, et λ_i et μ_i sont deux vecteurs arbitraires. On donne encore des caractérisations géométriques de la connexion obtenue en posant $\lambda_i = \mu_i = 0$, et de celle obtenue en annulant deux vecteurs correspondants à des composantes irréductibles du tenseur de torsion de la connexion. La donnée du champ a_{ij} entraîne celle des champs $a_{ij} \pm *a_{ij}$ qui définissent des structures presque complexes. La connexion donnée par (*) avec $\lambda_i = \mu_i = 0$, est la moyenne arithmétique des connexions presque complexes de Yano et Lichnerowicz. *A. Haimovici.*

Cattaneo Gasparini, Ida: *Sulle connessioni affini associate a una data connessione lineare.* Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. **10**, 119—126 (1956).

La terminologie et la notation étant celles utilisées par A. Lichnerowicz, dans sa „Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie“ (Rome 1955), si π_U et π_U sont les matrices de deux connexions affines π et π de V_n , associées à une même connexion linéaire ω , on a

$$\sigma_U = \pi_U - \bar{\pi}_U = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0^\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0^\alpha = (\gamma_{0\beta}^\alpha - \bar{\gamma}_{0\beta}^\alpha) \theta^\beta,$$

et on démontre que $\sigma_0^\alpha = T^\alpha$ est une 1-forme vectorielle; une connexion π est donc caractérisée par la connexion linéaire ω et par cette forme T^α . Si l'on considère le champ de points $w^U = (1, w^1, \dots, w^n)$, on trouve $\overset{\pi^*}{\nabla} w^\alpha - \overset{\pi}{\nabla} w^\alpha = T^\alpha$, où on a désigné par $\overset{\pi}{\nabla}$ la différentielle absolue par rapport à π , et où π^* est la connexion affine canoniquement associée à ω . La courbure d'une connexion affine s'exprime à l'aide de celle de la connexion linéaire et de T^α ; pour que les courbures de π et de π^* coïncident, il faut que $\overset{\omega}{\nabla} T^\alpha = 0$. *Adolf Haimovici.*

Cattaneo Gasparini, Ida: *Sulle geodetiche di una V_n relative a una connessione affine.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Cl. **22**, 146—154 (1957).

En utilisant la même terminologie et la même notation que celles de la Note de l'A. révisée si-dessus on définit les géodésiques d'une variété différentiable V_n de classe C^r ($r > 2$), comme les courbes qui se développent sur l'espace affine tangent d'après des droites. On démontre que celles-ci coïncident avec les courbes le long desquelles la différentielle absolue du vecteur $\overset{\pi}{\nabla} x/dt$ est collinéaire à ce vecteur même. On remarque que $\overset{\pi}{\nabla} x/dt$ n'est pas tangent à la courbe, mais s'obtient de la tangente v^α par l'opération $\Phi_\beta^\alpha v^\alpha$, où $\Phi_\beta^\alpha = T_\beta^\alpha + \delta_\beta^\alpha$, T_β^α étant les coefficients de la forme $T^\alpha = T_\beta^\alpha \theta^\beta$, introduite dans la Note citée plus haut. Le système des équations des géodésiques est

$$\frac{\overset{\omega}{\nabla}}{dt} [\Phi_\beta^\alpha v^\beta] = \lambda(t) \Phi_\beta^\alpha v^\beta,$$

$\lambda(t)$ étant un facteur de proportionnalité. On peut le ramener à une forme normale si Φ_β^α définit un automorphisme de l'espace vectoriel tangent T_x . Dans ce cas la connexion affine s'appelle régulière. On définit aussi un paramètre affine. Les géodésiques d'une connexion affine coïncident avec celle de la connexion linéaire associée, les paramètres étant ceux affines, si l'on a $\overset{\omega}{\nabla}_\gamma \Phi_\beta^\alpha + \overset{\omega}{\nabla}_\beta \Phi_\gamma^\alpha = 0$. La Note contient des applications à la théorie des trajectoires des particules en électrodynamique relativiste. *Adolf Haimovici.*

Maurer-Tison, Françoise: Les tenseurs de courbure de deux connexions linéaires associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier de type $(0,2)$. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 38—40 (1958).

Sei V_n mit einer Metrik $(g_{\alpha\beta}) = G$ und einem linearen Zusammenhang $L_{\beta\gamma}^\alpha$ ausgestattet. Verf. betrachtet den linearen Zusammenhang $\bar{L}_{\beta\gamma}^\alpha = L_{\beta\gamma}^\alpha + g^{\sigma\alpha} D_\gamma g_{\sigma\beta}$ (D ist die kovariante Differentiation bezüglich L) und zeigt, daß für die Matrizen aus den zugehörigen Krümmungsformen gilt $\bar{\Omega} = -G \Omega G^{-1}$. Im Falle der einheitlichen Feldtheorie folgt aus den Feldgleichungen ($\partial_\gamma g^{\sigma\alpha} + L_{\gamma\sigma}^\alpha g^{\sigma\alpha} + L_{\gamma\sigma}^\alpha g^{\sigma\alpha} = 0$), daß $\bar{L}_{\beta\gamma}^\alpha = L_{\beta\gamma}^\alpha$, so daß die Relation zwischen den Krümmungsformen hier in die bekannte Integrabilitätsbedingung von Bose-Schrödinger übergeht. Dies kann geometrisch durchleuchtet werden mittels der in einer früheren Note (dies. Zbl. **78**, 193) angegebenen Eigenschaften der zugehörigen Holonomiegruppen.

D. Laugwitz.

Maurer-Tison, Françoise: L'espace fibré des corepères affines et son rôle fondamental en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 240—243 (1958).

Ein corepère in V_n ist ein Paar (φ, θ) , bestehend aus einem n -Bein θ von kovarianten Vektoren, das im Endpunkt eines kovarianten Vektors φ angeheftet ist. Ein coaffiner Zusammenhang ist ein infinitesimaler Zusammenhang im Hauptfaserraum der corepères (Basis V_n , Strukturgruppe isomorph zur affinen Gruppe). Ein coaffiner Zusammenhang ist eindeutig bestimmt durch einen linearen Zusammenhang $L_{\beta\gamma}^\alpha$ und einen Tensor $g_{\alpha\beta}$. Der coaffine Zusammenhang hat die gleichen geodätischen Linien wie der lineare Zusammenhang $\bar{L}_{\beta\gamma}^\alpha$ (s. vorstehendes Referat), falls die Feldgleichungen der einheitlichen Feldtheorie erfüllt sind. *D. Laugwitz.*

Allamigeon, André-Claude: Isomorphisme des connections infinitésimales. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 220—222 (1958).

Es wird untersucht, wie sich ein differenzierbarer Isomorphismus zweier Hauptfaserräume auf infinitesimale Zusammenhänge auswirkt. Dies verallgemeinert Begriffsbildungen von Frau Maurer-Tison (s. vorstehendes Referat) und führt zugleich zu einem neuen, durchsichtigen Beweis für die dort hergeleiteten Relationen im Spezialfall des Faserraumes der corepères. *D. Laugwitz.*

Topologie:

Bruns, Günter: Zur Struktur von Filtern. Math. Ann. **134**, 205—224 (1958).

In einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. **77**, 161) hat Verf. eine (eindeutig bestimmte) „direkte“ Durchschnittszerlegung eines beliebigen Filters in einen Haupt- und einen durchschnittsleeren Filter angegeben. Hier geht es um die weitere Durchschnittszerlegung der durchschnittsleeren Filter. Ein Hauptfilter ist ja ein symmetrischer Filter, insofern er bei jeder Permutation seines eindeutig bestimmten Trägers, nämlich der erzeugenden Menge, des Durchschnitts, invariant bleibt; ein durchschnittsleerer Filter ist ein solcher, zu dem für jedes x der Grundmenge E das Komplement $E - \{x\}$ gehört (wobei man bemerkt, daß die einelementigen Mengen $\{x\}$ eine Klasseneinteilung von E bilden). In Analogie dazu, allerdings weit komplizierter, gelingt es nun, von einem durchschnittsleeren (eigentlichen) Filter \mathfrak{f} (andere Filter werden in der Arbeit nicht betrachtet) einen Filter $\mathfrak{C}_\alpha(A)$ abzuspalten, der aus allen $M \subseteq E$ mit $|A - M| < \aleph_\alpha \leq |A|$ besteht; hierbei ist zu bemerken, daß, im wesentlichen nach Banaschewski (dies. Zbl. **64**, 410), die Filter $\mathfrak{C}_\alpha(A)$ außer den Hauptfiltern die einzigen symmetrischen Filter sind: $\mathfrak{C}_\alpha(A)$ geht bei jeder Permutation seines (nicht mehr eindeutig bestimmten) Trägers A in sich selbst über. Genau lautet das (zu der oben angegebenen trivialen Zerlegung eines beliebigen Filters analoge) Hauptresultat der Arbeit so: Jeder durchschnitts-

leere Filter $\{$ von einem Schränkungsgrad (J. Schmidt, dies. Zbl. 67, 29) $\{f\} \geq \aleph_\alpha$ ist direkter Durchschnitt eines symmetrischen Filters $\mathfrak{C}_\alpha(A)$ und eines Filters \mathfrak{G} von einem Zerlegungsgrad $\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) \geq \aleph_{\alpha+1}$. Dabei ist der Zerlegungsgrad eine vom Verf. eingeführte Invariante, die ein Maß darstellt für die Möglichkeit, eine geeignete Grundmenge E des Filters \mathfrak{G} so in Klassen K von genügend großer Mächtigkeit $|K|$ einzuteilen, daß die Komplementärmengen $E - K$ zum Filter \mathfrak{G} gehören. Es werden die Invarianz des Zerlegungsgrades im Sinne der Ähnlichkeit von Filtern [Bruns-Schmidt, Math. Japonicae 4, 133—177 (1957)] bewiesen und die Beziehungen dieser Filterinvarianten zu früher eingeführten (Schränkungsgrad, Differenzschranke, Trägermächtigkeit; siehe Bruns-Schmidt loc. cit.) erschöpfend analysiert. Bei dieser Analyse erweist sich die Unterscheidung als wesentlich zwischen denjenigen Filtern, deren Differenzschranke die Trägermächtigkeit übertrifft und dann mit dem Zerlegungsgrad übereinstimmt (dazu gehören alle nicht-trivialen Ultrafilter), und denjenigen, bei denen dies nicht der Fall ist, den sog. präsymmetrischen Filtern, die eine symmetrische Verfeinerung $\mathfrak{C}_\alpha(A)$ mit zum Filter gehörigen A besitzen.

J. Schmidt.

Gál, István S.: On a generalized notion of compactness. I, II. Nederl. Akad. Wet. Proc., Ser. A 60, 421—430, 431—435 (1957).

m sei eine unendliche Kardinalzahl oder bedeute „endlich“; ebenso n . Ein topologischer Raum X heiße (m, n) -kompakt, wenn jede offene Überdeckung \mathcal{O}_i von X mit einer Mächtigkeit $\leq n$ eine Überdeckung \mathcal{O}_{ij} von X mit einer Mächtigkeit $\leq m$ enthält; X heiße vollständig (m, n) -kompakt, wenn jeder Teilraum von X (m, n) -kompakt ist. Bekannte elementare Sätze über kompakte Räume (z. B. der Dedekindsche Durchschnitts-Satz) übertragen sich in naheliegender Weise auf (m, n) -kompakte Räume. Kompliziert ist jedoch die Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano-Weierstrass. Das cartesische Produkt zweier (m, n) -kompakter Räume ist i. a. nicht (m, n) -kompakt; es werden Bedingungen dafür angegeben, daß dies der Fall ist.

G. Nöbeling.

Mrówka, S.: Some properties of Q -spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 947—950 (1957).

The author proves: Theorem 1. If X is a normal space and $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, where A_n are closed in X and A_n are Q -spaces (cf. Hewitt, this. Zbl. 32, 286) in their relative topology, then X is also a Q -space. Theorem 2. Let X be a Q -space. If $A \subset X$ is Q -closed in X then A is a Q -space. In particular, each F_σ -set $F \subset X$ is a Q -space. Here $A \subset X$ is said to be Q -closed (in X) provided that for each $p_0 \in X \setminus A$ there is a G_δ -set $G \subset X$ with $p_0 \in G$ and $A_n \cap G = \emptyset$.

A. van Heemert.

Hayashi, Yoshiaki: On Dowker's problem. Proc. Japan Acad. 33, 351—354 (1957).

Das Problem lautet: Ist jeder normale Hausdorff-Raum R abzählbar-parakompakt (d. h. besitzt jede abzählbare, offene Überdeckung von R eine lokal endliche, offene Verfeinerung)? Verf. gibt ein Gegenbeispiel an.

G. Nöbeling.

Hendriksen, Melvin and J. R. Isbell: Local connectedness in the Stone-Čech compactification. Illinois J. Math. 1, 574—582 (1957).

Die Verff. geben folgende Antwort auf die Frage, in welchen ihrer Punkte die Stone-Čechsche Kompaktifizierung βX eines vollständig regulären Raumes X lokal-zusammenhängend ist: (1) Bei lokal-zusammenhängendem X ist die vollständige Hülle $\langle aX \rangle$ von X in seiner feinsten uniformen Struktur stets wiederum lokal-zusammenhängend und βX lokal-zusammenhängend in jedem Punkt von $\langle aX \rangle$. (2) Bei beliebigem X kann βX nur in den Punkten von $\langle aX \rangle$ lokal-zusammenhängend sein. (3) Ist X lokal-zusammenhängend und pseudo-kompakt (d. h. jede stetige reelle Funktion auf X ist beschränkt), so ist jeder vollständig reguläre Raum Y , in

dem X dicht ist, ebenfalls lokal-zusammenhängend. Es folgt aus diesen Ergebnissen u. a., daß βX genau dann lokal zusammenhängend ist, wenn X pseudo-kompakt und lokal-zusammenhängend ist. Des weiteren wird bewiesen, daß ein regulärer Raum genau dann lokal-zusammenhängend und abzählbar-kompakt ist, wenn jede seiner endlichen offenen Überdeckungen eine endliche Verfeinerung aus zusammenhängenden offenen Mengen besitzt. Dies Resultat zeigt dann, daß die von den Verff. angegebene Charakterisierung des lokalen Zusammenhangs von βX einen Satz von Wallace (dies. Zbl. 42, 167) über normale Räume ausdehnt auf beliebige vollständig reguläre Räume. — Die Beweise beruhen in der Hauptsache auf Hilfsätzen und bekannten Ergebnissen über uniforme Strukturen, behandelt in der Version von J. Tukey.

B. Banaschewski.

Smirnov, Ju. (Yu.): An instance of one-dimensional normal space contained in no one-dimensional bicomact. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 939-942 (1958) [Russisch].

Every normal space S is embeddable in a bicomact space of the same covering dimension: $\dim S = \tilde{S}$ [W. Hurewicz, Monatsh. Math. Phys. 37, 199—208 (1930) for the case when S possesses a countable basis; Wallman, this Zbl. 18, 332]. An analogous embedding holds when one is dealing with capital induction dimension Ind [Vedenisov, Izvestija Akad. Nauk. SSSR 5, 211—216 (1941)]. For small induction dimension, ind, the analogous statement is holding for the case when $\text{ind } S = 0$ [Vedenisov, Učenyje Zapiski Moskov. gos. Univ. Matematika 30, 131—140 (1939)]; the case $\text{ind } S > 0$ has been open so far. In the present paper the author proves that the analog statement does not hold even for the case when $\text{ind } S = 1$: there exists a normal space Σ such that $\text{ind } \Sigma = 1$ and which is contained in no one-dimensional bicomact space. Construction of Σ : Let $\Gamma = I \omega(c) \times R[0, 1]$ be ordered alphabetically; $\omega(c)$ denotes the first ordinal number of cardinality $c = 2^{\aleph_0}$ and $R[0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Let Φ be the compact composed of points $(x, 0)$ ($x \in R[0, 1]$), $(k \cdot 2^{-n}, y)$ ($k < 2^n$, $n < \omega$, $-2^{-n} \leq y \leq 2^{-n}$). Let (x_α, y_α) ($\alpha \leq \omega(c)$) be a well-ordering of $R[0, 1] \times R(0, 1)$ and $Q_\alpha = \{(\alpha x, y), (\alpha + 1, y) \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Let Φ_α be the set of all the points of Q_α such that $(x, y - y_\alpha) \in \Phi$ and $0 < x < 1, y_\alpha \leq 2y \leq y_\alpha + 1$. Put $S = \bigcup_{\alpha} \Phi_\alpha$. S is normal. By the transformation $f_n(z, y) = (z, (y + n)/n(n + 1))$ the space $\Gamma \times R[0, 1]$ is carried onto $\Gamma \times R[1/n + 1, 1/n]$; $f_n S$ is closed; let $\Sigma' = \bigcup_n f_n S$ ($n = 1, 2, \dots$). The requested space Σ is obtained by adjoining to Σ' point ξ , with neighbourhoods $V_n \xi = \xi \cup (\Sigma' \setminus \bigcup_{i \leq n} f_i S)$.

G. Kurepa.

Nagami, Keiô: Some theorems in dimension theory for non-separable spaces. J. math. Soc. Japan 9, 80—92 (1957). Correction. Ibid. 10, 234 (1958).

Zuerst wird der Summensatz für metrische (nicht separable) Räume R verallgemeinert: Sind die Teilmengen F_α von R mit allen Ordinalzahlen, die kleiner als η sind, indiziert und ist $\bigcup \{F_\beta \mid \beta < \alpha\}$ für jedes $\alpha < \eta$ in R abgeschlossen, so gilt $\dim \bigcup \{F_\alpha \mid \alpha < \eta\} \leq \sup \{\dim F_\alpha \mid \alpha < \eta\}$, wo „dim“ die Überdeckungsdimension bedeutet. Ferner werden dimensionserniedrigende Abbildungen untersucht (wie Verf. bemerkt, sind seine diesbezüglichen Ergebnisse auch in einer Arbeit von K. Morita, dies. Zbl. 71, 385 enthalten): Ist φ eine stetige abgeschlossene Abbildung eines parakompakten Hausdorffschen Raumes R auf einen hereditär parakompakten Hausdorffschen Raum S , so gilt $\dim R \leq \sup \{\dim \varphi^{-1}(y) \mid y \in S\} + \text{Ind } S$, wo „Ind“ die Dimension bedeutet, die durch Begrenzungen von Umgebungen abgeschlossener Teilmengen definiert ist: ist R normal. S parakompakt Hausdorffsch mit $\dim S = 0$, und φ wie oben, so gilt $\dim R \leq \sup \{\dim \varphi^{-1}(y) \mid y \in S\}$. Die Arbeit schließt mit einige Bemerkungen über den Dimensionskern eines parakompakten Hausdorffschen Raumes R mit $\dim R = n < \infty$. In der Berichtigung wird ein Beispiel der Arbeit etwas abgeändert.

T. Ganea.

Williams, R. F.: The effect of maps upon the dimension of subsets of the domain space. *Proc. Amer. math. Soc.* 8, 580—583 (1957).

Es sei f eine stetige Abbildung eines n -dimensionalen, separablen, metrischen Raumes X in einen m -dimensionalen, separablen, metrischen Raum Y . I. Es existiert in X eine abgeschlossene Menge F mit $\dim F \geq (n-1)/2$ und $\dim f(F) \leq m/2$. II. Es existiert in X eine abgeschlossene Menge F mit $\dim F = 1$ und $\dim f(F) \leq 1$ oder es existiert in X eine abgeschlossene Menge F mit $\dim F = n-1$ und $\dim f(F) \leq m-2$. III. Ist X kompakt, so existiert in X eine abgeschlossene Menge F mit $\dim F \geq n-1$ und $\dim f(F) \leq m-1$. G. Nöbeling.

Nagata, Jun-iti: On imbedding theorem for non-separable metric spaces. *J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A* 8, 9—14 (1957).

Verallgemeinerung des Satzes von der Einbettbarkeit jedes separablen, metrischen, n -dimensionalen Raumes in den Euklidischen E_{2n+1} . Es sei R ein metrisierbarer, n -dimensionaler Raum mit einer Basis $\{O_{ij}\}$ ($i \in I$, $j = 1, 2, \dots$) von der Eigenschaft, daß für jedes $j = 1, 2, \dots$ jede Menge O_{ij} höchstens abzählbar viele Mengen O_{ij} nichtleer schneidet. Dann existiert ein Homöomorphismus von R in das Cartesische Produkt $N \times E_{2n+1}$, wobei N ein 0-dimensionaler, metrischer, nur von der Mächtigkeit von I abhängender Raum ist. (Verf. benutzt einen Satz von K. Morita, dessen Beweis unveröffentlicht ist.) G. Nöbeling.

Kowalsky, Hans-Joachim: Einbettung metrischer Räume. *Arch. der Math.* 8, 336—339 (1957).

Ist $\{E_i\}_{i \in I}$ ein System punktfremder Exemplare E_i des Einheitsintervalls, so sei S die aus $\cup E_i$ durch Identifizierung der Nullpunkte entstehende Menge; sind x, y Elemente von S , so sei $\delta(x, y) = |x - y|$ bzw. $= |x| + |y|$, wenn x und y in demselben E_i bzw. in verschiedenen E_i liegen; der so definierte metrische Raum heiße ein Sternraum. Verf. beweist: Ein topologischer Raum R ist genau dann metrisierbar, wenn er in ein Produkt abzählbar vieler Sternräume eingebettet werden kann. (Dies verallgemeinert den bekannten Urysohn'schen Satz, der sich nur auf Räume mit abzählbarer Basis bezieht.) G. Nöbeling.

Borsuk, K.: On the k -independent subsets of the Euclidean space and of the Hilbert space. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* 5, 351—356 (1957).

Für jede Ordinalzahl $\alpha \leq \omega$ sei E_α der α -dimensionale euklidische Raum, falls α endlich ist, und der Hilbertsche Raum, falls $\alpha = \omega$ ist. Eine Menge $A \subseteq E_\alpha$ heiße k -unabhängig (k eine natürliche Zahl), wenn je $k+2$ Punkte von A linear unabhängig sind; A heiße ω -unabhängig, wenn A k -unabhängig ist für $k = 1, 2, \dots$. Ist X ein separabler, metrischer Raum, so ist die Menge aller Homöomorphismen von X auf ω -unabhängige Teilmengen des Hilbertschen Würfels Q_ω dicht im Raum Q_ω^ω aller stetigen Abbildungen von X in Q_ω . — Ist A eine k -unabhängige, kompakte Menge des E_n , so ist für jede offene Menge U , welche mindestens k Punkte von A enthält, die Menge $A - U$ homöomorph zu einer Menge $\subseteq E_{n-k}$. — Jede k -unabhängige kompakte Menge des E_n ist homöomorph zu einer Menge $\subseteq E_{n-k+2}$. G. Nöbeling.

Bing, R. H.: Approximating surfaces with polyhedral ones. *Ann. of Math., II. Ser.* 65, 456—483 (1957).

In the principal theorem it is shown that if in a triangulated 3-manifold S , M is a 2-manifold with boundary and f is a nonnegative continuous function defined on M , then there is a manifold $M' \subset S$ and a homeomorphism h of M onto M' such that M' is locally polyhedral at $h(x)$ if $f(x) > 0$ and $\varrho(x, h(x)) \leq f(x)$. In case M is locally polyhedral at each point of a closed point set N , then M' and h can be chosen so that h is the identity on N . W. R. Utz.

Bing, R. H.: A decomposition of E^3 into points and tame arcs such that the decomposition space is topologically different from E^3 . *Ann. of Math., II. Ser.* 65, 484—500 (1957).

In Euclidean 2-space, E^2 , it is known [R. L. Moore, *Trans. Amer. math. Soc.*

27, 416—428 (1925)] that if G is an upper semicontinuous decomposition of E^2 such that the elements of G are bounded continua which do not separate E^2 , then the decomposition space is topologically equivalent to E^2 . In contrast to this theorem, the author gives an example of an upper semicontinuous decomposition G of E^3 such that the decomposition space is topologically different from E^3 even though the elements of G are points and tame arcs.

W. R. Utz.

Fort jr., M. K.: A note concerning a decomposition space defined by Bing. *Ann. of Math.*, II. Ser. 65, 501—504 (1957).

The construction of Bing (preceding review) of an upper semicontinuous decomposition of E^3 into points and tame arcs which is not homeomorphic to E^3 is modified so that each nondegenerate element of the decomposition is a broken line interval with exactly two breaks.

W. R. Utz.

Sternberg, Shlomo: On Poincaré's last geometrical theorem. *Proc. Amer. math. Soc.* 8, 787—789 (1957).

Wintner [C. r. Acad. Sci., Paris 243, 835—836 (1956)] has formulated a generalized Poincaré-Birkhoff fixed point theorem for transformations that do not necessarily preserve measure. If T is a homeomorphism of an annulus R onto itself behaving on the boundary circles as in the Poincaré-Birkhoff theorem, if $d(T) = \min_{P \in R} |T(P) - P|$ and if $\alpha = \min_{P \in R} |T(U)|/|U|$ where $|U|$ is the area of U and U varies over all open subsets of R , then there exists a functional relationship $d = d(\alpha)$ such that $d \rightarrow 0$ as $\alpha \rightarrow 1$. In this paper the author derives such a functional relationship and exhibits an example to show that the relationship can not be essentially improved.

W. R. Utz.

Conner, P. E. and E. E. Floyd: Orbit spaces of circle groups of transformations. *Ann. of Math.*, II. Ser. 67, 90—98 (1958).

It is shown that if the circle group G operates on a compact manifold X (with or without boundary), then the orbit space, X/G , is an absolute neighborhood retract. Moreover, if X is also an absolute retract, then so is X/G . In the final section the integral cohomology groups of X/G are computed for X an n -sphere and G the circle group.

W. R. Utz.

Conner, P. E.: On the action of a finite group on $S^n \times S^n$. *Ann. of Math.*, II. Ser. 66, 586—588 (1957).

A group is said to act freely on a space if the only element of the group which has a fixed point is the identity. In Cartan and Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton 1956 (p. 358), it is shown that if a finite abelian group operates freely on the sphere S_n then the group is cyclic. It is easy to see that an abelian group of type $Z_p \times Z_p$ can operate freely on the torus $S_n \times S_n$. In the present paper the author shows, using spectral sequences, that an abelian group of type $Z_p \times Z_p \times Z_p$ cannot act freely on the torus. With similar methods he verifies a conjecture of Fox which asserts that if π is the group of a polygonal knot, then no abelian subgroup of π has rank greater than 2.

S. Stein.

O'Neill, Barrett: A fixed point theorem for multi-valued functions. *Duke math. J.* 24, 61—62 (1957).

Let X be a compact, homologically trivial ANR in Euclidean space R^n . A multivalued function $F: X \rightarrow X$ has a fixed point provided that the homology of $F(x)$ changes continuously in a certain sense, and that if $x \in X$ and $0 \leq q \leq n-2$, then $H_q(F(x)) = 0$. The author deduces from this theorem a result of O. H. Hamilton (cf. this Zbl. 30, 80; 78, 153) and C. E. Capel, W. L. Strother (cf. this Zbl. 78, 153) whose proof was based on an assertion which is disproved here by an example.

I. Fary.

Weier, Joseph: Struttura dimensionale delle soluzioni di una classe di trasformazioni. *Ann. Univ. Ferrara*, n. Ser. 5, 49—58 (1957).

Let S be a sphere and Q a finite manifold in a euclidean space and let $\dim Q = (\dim S) + 1 \geq 4$. If F denotes a homotopy class of essential mappings of Q into S and $f \in F$, $a \in S$, the author studies the dimension of $f^{-1}(a)$. The following results are established: (1) for every $i \leq \dim Q$ there exists a mapping $f_i \in F$ such that $\dim f_i^{-1}(a) = i$; (2) if F_i denotes the set of all such mappings in F , $\overline{F}_i = F$; (3) under certain conditions there exists a $f_0 \in F$ such that $\dim f_0^{-1}(a) = 0$. The proofs are making use of the notions of simplicial approximation of a mapping and of the topological degree of a mapping. As may be expected they are somewhat complicated but straightforward.

C. Racine.

Weier, Josef: Über Abbildungen dreidimensionaler in zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1956, 113—123 (1957).

Sind P und Q endliche euklidische Mannigfaltigkeiten in einem euklidischen Raum mit $\dim P = 3$, $\dim Q = 2$, g eine wesentliche Abbildung von P auf Q , g' eine nullhomotope Abbildung von P in Q , so hat die Gleichung $g(p) = g'(p)$ wenigstens eine Lösung.

G. Nöbeling.

Frum-Ketkov, R. L.: The behaviour of cycles not homologous to zero when a n -dimensional manifold is mapped into n -dimensional Euclidean space. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 42—44 (1958) [Russisch].

Gegeben seien zwei Mannigfaltigkeiten M , M_1 und eine Abbildung $f: M \rightarrow M_1$ vom Grade Null [$p^s(M) \neq 0$]. Dann ist $(\dim M = \dim M_1 = n)$

$$q_j^s + q_j^{n-s} \leq \frac{1}{2} (p^s(M) + p^{n-s}(M)), \quad q_j^s \leq r_j^{n-s}, \quad q_j^{n-s} \leq r_j^s.$$

Dabei ist: q_j^s = Maximalzahl unabhängiger s -dimensionaler Zyklen von $f(M)$, die Bild von einem Zyklus in M sind. r_j^s = Maximalzahl der unabhängigen s -dimensionalen Klassen, in denen es einen Zyklus gibt, der in die Null abgebildet wird. Sei f eine stetige Abbildung von M^n in den R^n , dann gilt: $\mu_j^s + \bar{\mu}_j^{n-s} \geq p^s(M^n)$. Dabei ist: μ_j^s = Maximalzahl der Homologieklassen von M^n , zu denen ein Zyklus existiert, dessen Träger durch f in ein Polyeder abgebildet wird, welches keinen von Null verschiedenen Zyklus enthält. $\bar{\mu}_j^s$ = Maximalzahl derjenigen Elemente in $H_s(M^n)$, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Zyklus existiert, dessen Träger durch eine gewisse ε -Verschiebung in ein Polyeder übergeht, welches keinen s -dimensionalen Zyklus außer dem Nullzyklus mehr enthält. Die Ergebnisse dieser Note verallgemeinern gewisse Sätze von H. Hopf [J. reine angew. Math. 163, 71—88 (1930)].

F. W. Bauer.

Nakaoka, Minoru: Cohomology mod p of the p -fold symmetric products of spheres. J. math. Soc. Japan 9, 417—427 (1957).

The cohomology structure mod p of the p -fold symmetric product of the n -sphere is completely described, where p is an odd prime. A basis is constructed with the aid of the Bockstein homomorphism and reduced powers. Cup products and reduced powers in the symmetric product are also computed.

S. Stein.

Čogošvili, G. S.: Über die Čechschen Gruppen unendlicher Ketten und endlicher Coketten. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 19, 513—520 (1957) [Russisch].

Bekanntlich ist es ohne weiteres nicht möglich, Homologiegruppen eines beliebigen topologischen Raumes unter Zugrundelegung beliebiger unendlicher Überdeckungen zu definieren. Als Ausweg führt Verf. nun das sogenannte Homologieaggregat ein. In der Menge \mathfrak{U} aller offenen Überdeckungen eines beliebigen topologischen Raumes erklärt Verf. zunächst $O_\alpha \leq O_\beta$ wenn jedes Element von O_α in wenigstens einen Element von O_β liegt und wenn jedes Element von O_α nicht mehr als endlich viele Elemente von O_β enthält. Auf diese Weise wird \mathfrak{U} zu einer teilweise geordneten Menge, die außer den gewöhnlichen noch dem zusätzlichen Axiom genügt: (x) Wenn $\alpha \leq \beta, \gamma$ ist, dann gibt es auch ein $\delta \geq \beta, \gamma$. In \mathfrak{U} werden nun maximale Ideale τ betrachtet. Ganz \mathfrak{U} zerfällt in die Vereinigungsmenge solcher Ideale. Für jedes τ

kann man eine Čechsche Homologie bzw. Hohomologietheorie in der üblichen Weise erklären, wobei jetzt aber eben nicht mehr notwendigerweise endliche Überdeckungen für die Homologie zugrunde gelegt werden. Für festes r nennt Verf. die Menge $\{H'_{J\tau}(X, A)\}$ bzw. $\{H'_{r\tau}(X, A)\}$ (bei passenden Koeffizientenbereichen), genommen für alle maximalen Ideale τ , das Homologie-, bzw. Kohomologieaggregat von (X, A) in der Dimension r . Man kann jetzt bei einer stetigen Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von einem induzierten Ideal $f^{-1}\tau$ und entsprechend von einer induzierten Abbildung f_* bzw. f^* der Homologie bzw. Kohomologieaggregate sprechen. Außerdem kann man einen Rand- und Korandoperator definieren. Verf. zeigt nun, daß die Eilenberg-Steenrodschen Axiome für seine Aggregate erfüllt sind, sowohl Homologie-, wie auch Kohomologiesequenz erweisen sich als exakt. F. W. Bauer.

Whitehead, George W.: The homology suspension. Centre Belge Rech. math., Colloque de Topologie algébrique, Louvain les 11, 12 et 13 juin 1956, 89—95 (1957).

Soient X un espace n -connexe ($n \geq 1$), Ω l'espace des lacets de X d'origine x_0 , et e le lacet d'image x_0 . On sait que la suspension homologique $\sigma: H_q(\Omega, e) \rightarrow H_{q+1}(X, x_0)$ est un isomorphisme pour $q < 2n$. L'A. a montré antérieurement (ce Zbl. 67, 412) que σ peut s'interpréter comme l'un des homomorphismes d'une suite, exacte pour $q < 3n$, reliant les groupes d'homologie de (X, x_0) , $\bar{\Omega}, \bar{\Omega}^2$, où $\bar{\Omega}^i$ désigne la paire formée de Ω^i et de l'union des i sous-espaces de Ω^i obtenus en remplaçant un des facteurs par e . Après avoir rappelé ces résultats, il considère l'espace W des applications continues du simplexe infini $T = (\zeta_*, \zeta_0, \zeta_1, \dots)$ muni de la topologie faible, dans X , et montre qu'il existe une suite spectrale où $E_{p,q}^1 = H_q(\bar{\Omega}^p)$ et menant à l'homologie de (W, W_0) , W_0 étant le sous-espace des applications envoyant ζ_0 dans x_0 . En remarquant que $E_{p,q}^1 = 0$ pour $p \geq 3$, $q < 3n$, et que W est fibré de base X , fibre W_0 contractile, on voit que cette suite spectrale renferme la suite exacte mentionnée plus haut. Enfin, l'A. montre que si la catégorie de X (au sens de Lusternik-Schnirelman) est finie, on a $d_r E_{p,q}^r = 0$ pour certaines valeurs de p, q, r . A. Borel.

Copeland jr., Arthur H.: On H -spaces with two nontrivial homotopy groups. Proc. Amer. math. Soc. 8, 184—191 (1957).

Let Y be a locally finite connected CW complex, $e \in Y$, and $Y \vee Y$ be the join of Y with itself at e . The existence of an H -space structure on Y with unit e is equivalent to the existence of an extension to $Y \times Y$ of the natural folding map $f: Y \vee Y \rightarrow Y$. If f has an extension ψ_m to the union of $Y \vee Y$ and the m -th skeleton $(Y \times Y)^m$ of $Y \times Y$, then the space X obtained from Y by killing all homotopy groups $\pi_i(Y)$ ($i > m$) is an H -space, and the obstruction to the extension of ψ_m to $Y \vee Y \vee (Y \times Y)^{m+1}$ is described in terms of the $(m+1)$ -st Postnikov invariant $k^{m+1} \in H^{m+1}(X, \pi_m(Y))$ of Y . In particular it vanishes if and only if k^{m+1} is a primitive element of $H^*(X, \pi_m(Y))$ and consequently, a space with only two non vanishing homotopy groups π_n, π_m ($1 < n < m$) has an H -space structure with unit if and only if its Eilenberg-MacLane k -invariant is a primitive element of $H^*(\pi_n, n, \pi_m)$. A. Borel.

Malgrange, Bernard: Plongement des variétés analytiques-réelles. Bull. Soc. math. France 85, 101—112 (1957).

1937 hat S. Bochner bewiesen, daß sich jede kompakte reell-analytische Mannigfaltigkeit, die eine reell-analytische Metrik trägt, durch eine eindeutige, reguläre, eigentliche, reell-analytische Abbildung in einen euklidischen Raum R^N von genügend hoher Dimension N einbetten läßt. Der Verf. der vorliegenden Arbeit verallgemeinert diesen Satz auf reell-analytische Mannigfaltigkeiten V mit reell-analytischer Metrik ds^2 und abzählbarer Topologie. Der Beweis stützt sich auf die Theorie der bez. ds^2 harmonischen Funktionen. Da im allgemeinen V nicht kompakt ist,

entstehen größere Schwierigkeiten, die die Verwendung von Approximationssätzen und die Untersuchung von reell-analytischen Mengen erforderlich machen. Ein Teil dieser Approximationssätze wurde in einer früheren Arbeit des Verf. bewiesen (s. dies. Zbl. 71, 90). In dieser Arbeit wurden auch Approximationssätze für die Lösungen beliebiger partieller elliptischer Differentialgleichungen gewonnen. Es ist deshalb für die Gültigkeit der Hauptaussage auch hinreichend, daß an Stelle von ds^2 auf V eine elliptische Differentialgleichung mit reell-analytischen Koeffizienten existiert. Aus dem Hauptresultat ergeben sich wichtige Folgerungen, u. a., daß auf reell-analytischen Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Topologie und reell-analytischer Metrik die Cartanschen Haupttheoreme der Theorie kohärenter analytischer Garben gültig sind. — Am Ende fragt Verf., ob für seinen Einbettungssatz die Existenz einer reell-analytischen Metrik wirklich gefordert werden muß. Inzwischen wurde gezeigt, daß das nicht notwendig ist. Vgl. für den Fall kompakter Mannigfaltigkeiten: C. B. Morrey, *Ann. of. Math.*, II. Ser. 68, 159—201 (1958); für den Fall beliebiger reell-analytischer Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Topologie: H. Grauert, *ibid.* 460—472 (1958). H. Grauert.

Malgrange, Bernard: *Faisceaux sur des variétés analytiques réelles.* *Bull. Soc. math. France* 85, 231—237 (1957).

Es sei V eine reell-analytische Mannigfaltigkeit, F eine kohärente (reell-) analytische Garbe über V . Verf. zeigt: (1) Hat V abzählbare Topologie und ist für jede Garbe F die Kohomologiegruppe $H^1(V, F) = 0$, so kann man V als singularitätenfreie, abgeschlossene, reell-analytische Untermannigfaltigkeit eines euklidischen Raumes R^N realisieren. (Inzwischen wurde gezeigt, daß das für alle reell-analytischen Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Topologie möglich ist. Vgl. vorstehendes Referat.) Verf. untersucht sodann reell-analytische Mannigfaltigkeiten und komplexe Mannigfaltigkeiten V mit beliebiger Topologie. Da diese Mannigfaltigkeiten i. a. nicht parakompakt sind, müssen die Kohomologiegruppen $H^v(V, F)$ nach einem Vorschlag von A. Grothendieck definiert werden. Es folgt: (2) Ist V eine reell n -dimensionale reell-analytische Mannigfaltigkeit, F eine kohärente analytische Garbe über V , so gilt $H^v(V, F) = 0$, $v \geq 2$. (3) Für jede komplex n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit verschwinden die Kohomologiegruppen $H^v(V, F)$ für $v > n$. Der Beweis von (3) stützt sich auf ein an sich interessantes Lemma: Es sei $G \subset C^n$ ein Gebiet des n -dimensionalen komplexen Zahlenraumes C^n , F sei eine kohärente analytische Garbe über G ; dann gibt es zu jedem Punkt $x \in G$ eine offene Umgebung $V(x)$, so daß für jede offene Menge $W \subset V(x)$ gilt: $H^v(W, F) = 0$, $v \geq n$. Verf. vermutet, daß man stets $V(x) = G$ setzen kann und daß G eine beliebige zusammenhängende nicht-kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie sein darf. H. Grauert.

Sabidussi, Gert: *Graphs with given group and given graph-theoretical properties.* *Canadian J. Math.* 9, 515—525 (1957).

Let X be a finite, unoriented Graph without slings. There is not more than one edge joining any two nodes in X . The author considers the following properties P_j ($j = 1, 2, 3, 4$) of X : (P_1) The connectivity of X is $n \geq 1$, (P_2) The chromatic number of X is $n \geq 2$, (P_3) X is regular of degree $n \geq 3$, (P_4) X is spanned by a graph Y' homeomorphic to a given connected graph Y (n is an integer). The main results are contained in the following theorem: Given a finite group G of order > 1 and an integer j , $1 \leq j \leq 4$, there exist infinitely many non-homeomorphic connected fixed-point-free graphs X such that (i) the automorphism group of X is isomorphic to G , and (ii) X has property (P_j), where a graph is called fixed-point-free if there is no vertex x of X which is invariant under all automorphisms of X .

K. Čulík.

Angewandte Geometrie:

Jeger, M.: Das axonometrische Prinzip im Lichte moderner Begriffsbildungen. *Elemente Math.* 13, 1—13 (1958).

In Verfolgung einiger Anregungen von E. Stiefel werden Zusammenhänge zwischen der schiefen und zentralen Axonometrie und der Topologie beschrieben. U. a. wird gezeigt, daß zwei „stetige Projektionen“ (axon. Abbildungsverfahren, bei denen an die Stelle der drei die Achsenbilder enthaltenden Strahlbüschel ein Sechseckgewebe tritt) topologisch äquivalent sind, wenn ihre projizierenden Kongruenzen in einem bestimmten Gebiet übereinstimmen. Topologische Verallgemeinerung von linearen Abbildungen führt auf „geodätische Abbildungen“; die Geraden des Raumes werden hierbei durch quasigeodätische Kurvensysteme dargestellt. Verf. beweist, daß jede solche Abbildung des Raumes auf eine Ebene α mit einer topologischen Verzerrung eines linearen Bildes auf eine Ebene α äquivalent ist, charakterisiert die Parallelprojektionen mit Hilfe des zum Abbildungsgewebe gehörigen Doppelverhältnis-Systems usw.

H. Horninger.

Petrenko, A. I.: Interpretation of coordinates and projections of Gauß, Mercator and Soldner on a sphere as perspective-conic coordinates and projections. *Ukrain. mat. Žurn.* 10, 78—82 (1958) [Russisch].

Bottema, O.: Orientierte ebene Trigonometrie und elementare Vermessungsaufgaben. *Euclides, Groningen* 33, 286—287 (1958) [Holländisch].

Theoretische Physik.

● Planck, Max: *Physikalische Abhandlungen und Vorträge. Band I—III.* Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1958. XV, 776; XI, 716; XII, 426 S. DM 150,—

Zum hundertsten Geburtstag von Max Planck haben der Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften und die Max-Planck-Gesellschaft die gesammelten physikalischen Abhandlungen und Vorträge von Max Planck in drei Bänden veröffentlicht. Eine ausführliche Besprechung des Inhalts dieses Riesenwerkes ist hier selbstverständlich ausgeschlossen, da schon für eine Aufzählung der Titel aller Abhandlungen mehrere gedruckte Seiten nötig wären. Der Leser von heute studiert selbstverständlich mit besonderem Interesse die Reihe von Abhandlungen aus den Jahren 1900 und 1901, wo die Gesetze der Hohlraumstrahlung zuerst empirisch aufgestellt und dann nachher theoretisch analysiert wurden. Wie Planck selber in einem Vortrag 1943 erwähnt, gelang es ihm in diesem Zusammenhang auch, sehr genaue Werte der in seiner Formel auftretenden numerischen Konstanten zu erhalten. In dieser Weise fand er z. B. für die Ladung des Elektrons einen Wert, der viel genauer als die zu dieser Zeit zugänglichen, direkten Messungen war. In den folgenden Jahren bis zur Entwicklung der modernen Quantentheorie etwa um 1925 beschäftigt sich Planck u. a. damit, die Kluft zwischen seiner Theorie und der klassischen Elektrodynamik zu vermindern. Sofort nach der Entstehung der neuen Theorie hat er aber, wie besonders aus einem Vortrag in Philadelphia 1927 und aus einer Besprechung der Abhandlungen von Schrödinger 1928 zu sehen ist, seine eigenen Versuche zugunsten der neuen Theorie verlassen. Die anderen Abhandlungen dieser Sammlung beschäftigen sich mit verschiedenen Gebieten der Physik, und ein sehr großer Teil davon ist der Thermodynamik und der statistischen Physik gewidmet. Besonders hat er sich mit dem Begriff der Entropie beschäftigt, sowohl in seinen ersten Arbeiten 1879 als auch in späteren Abhandlungen von 1925. Andere Arbeiten behandeln den Zusammenhang zwischen Relativitätstheorie und Thermodynamik, sowie die relativistischen Bewegungsgleichungen. Der letzte Band enthält verschiedene Vorträge von Max Planck, die für ein größeres Auditorium geschrieben sind, und auch Beiträge von anderen Verfassern über sein Lebenswerk.

G. Källén.

Vallée, Robert: A note on algebra and macroscopic observation. Inform. and Control 1, 82—84 (1957).

● **Macke, Wilhelm:** Wellen. Ein Lehrbuch der theoretischen Physik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1958. XII, 465 S. mit 160 Abb. DM 29,50.

This volume on waves is intended as a part of a series of textbooks on particles, waves, quanta, fields, statistics and relativity. The idea is to make in this way common cross sections through the various special subjects of the usual classifications. In the present volume various aspects of chains of coupled vibrators, strings, sound (scalar waves), the electromagnetic field and light (transverse waves) are considered from the general point of view of wave theory. The complementary idea of particles can be felt at the background throughout the book, in particular in the treatment of propagation of energy and momentum, wave packets and rays. Proper quantization problems are only occasionally touched upon and fundamental differences between non-quantized and quantized theories are liable to be blurred out a little (e. g. in the treatment of reflection and refraction). The application of the general point of view to the special subjects is as a matter of fact most exhaustive for the coupled vibrators. In the other fields (although the author strongly appeals to physical insight) the method appears somewhat more „phenomenological“. For some further foundations (e. g. of the thermodynamic conditions in sound waves or the Lorentz-Lorenz form for the refraction index) the reader even has to be referred to the specialized textbooks. The phenomenology of light propagation in solids (e. g. metals, crystals) is treated quite extensively, but the statistical connection between micro and macro equations or the superposition of the partial atomic waves into the reflected and refracted waves has been mentioned hardly or not at all. The other volumes will have to show in how far they complement each other and fill each others gaps. The plan of the series entails particular problems of composition. It seems that overlappings could hardly be avoided. A whole part of the present volume already deals with special relativity. Here relativistic invariance is with the help of rod contraction and clock retardation introduced in a way, which as such is rather transparent, although it has to be handled with care. Even if it might appear after completion that the contemplated series could not entirely replace a series of textbooks specialized according to the usual division, the unified treatment, which in the present volume is very clear, might considerably contribute to the insight in the various fields in their mutual connections. The get-up of the book is excellent. There are useful problems in each chapter with solutions at the end of the volume. *H. J. Groenewold.*

Park, David: Recent advances in physics. Amer. J. Phys. 26, 210—234 (1958).

Mit diesem Artikel will das „American Journal of Physics“ eine Reihe von Arbeiten starten, die von Fachleuten für allgemein interessierte Spezialisten anderer Gebiete geschrieben sind. Damit wird in gewisser Weise eine früher vom „American Institute of Physics“ in anderen Zeitschriften gepflegte Reihe von Informationsartikeln fortgesetzt. Der vorliegende interessante Beitrag umfaßt einen Teil der Entwicklung des letzten Jahres in den Abschnitten: Schwere Isotope ($Z > 100$), Kernreaktionskatalyse durch μ -Mesonen, Paritätsfragen (sehr ausführlich und verständlich).

W. Klose.

Elastizität. Plastizität:

● **Weber, Constantin und Wilhelm Günther:** Torsionstheorie. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1958. 306 S. DM 38,—.

Eine Art von Monographie verschiedener Lösungsmethoden des Torsionsproblems der Elastizitätstheorie, welches bekanntlich in der Bestimmung der Torsionsfunktion für den Querschnitt des tordierten Stabes besteht, behandelt in 23 Kapiteln,

meistens unter üblicher Anwendung der Funktionentheorie und der konformen Abbildung, viele Fälle von Querschnitten, wie z. B. Sektoren der Ebene, Kreisringe, Rechtecke, Streifenkreuze, Polynome, usw. Besonders wurden, mit Hilfe der von dem ersten Verf. an Torsionsprobleme angepaßten Spiegelungsmethode, Querschnitte mit Kreislöchern, Einschnitten, Kerben, ausgerundeten Innenecken, u. a. berücksichtigt. Dieses inhaltsreiche und zugänglich geschriebene Buch wurde mit Recht an angewandte Mathematiker und Ingenieure adressiert.

S. Drobot.

Položij (Polozhy), G. N.: On certain overall characteristics of the stressed state when prismatic rods are acted upon by a bending force. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 45—48 (1957) [Russisch].

L'A. présente une méthode simple pour calculer les tensions maximales qui apparaissent dans les barres prismatiques actionnées par des charges transversales. On utilise les fonctions sousharmoniques. Un exemple de calcul est donné pour le cas d'une section rectangulaire à entailles circulaires.

P. P. Teodorescu.

Carter, W. J.: Torsion and flexure of slender solid sections. J. appl. Mech. 25, 115—121 (1958).

The solution of the torsion problem for a slender rectangular section has been made previously by approximate methods based on the Prandtl membrane analogy. In this paper approximate methods are employed in the solution of both the torsion and flexural shear problem for slender sections having a variety of shapes, most of them being doubly symmetric. Solutions obtained in this manner are compared with exact solutions, when these are available, and otherwise with solutions obtained by relaxation.

Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Poßner, Lothar: Ein rechnerisches Gegenstück zur zeichnerischen Methode von Mohr. Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 2, 175—184 (1957).

Das von Falk und anderen entwickelte Matrizenverfahren zur Behandlung von Biegeaufgaben wird hier zur Berechnung von Einflußgrößen benutzt und als rechnerisches Gegenstück der zeichnerischen Methode von Mohr angesehen. Das Verfahren wird an einem Zahlenbeispiel erläutert.

R. Zurmühl.

Poßner, Lothar: Berechnung der Stabbiegung mit Matrizen (Vektortransformation). Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 3, 43—52 (1957).

Eine im Ausdruck nicht überall glückliche Wiedergabe des von Falk und anderen entwickelten Verfahrens zur Behandlung statisch bestimmter und unbestimmter Aufgaben der Balkenbiegung mittels Matrizen. Erläutert durch einige Zahlenbeispiele.

R. Zurmühl.

Schwarze, G.: Allgemeine Stabilitätstheorie der Schalen. Ingenieur-Arch. 25, 278—291 (1957).

Ein Versuch, „eine allgemeine Stabilitätstheorie für Schalen aufzustellen“, in welcher mit Hilfe mancher Überlegungen der Membranspannungszustand als Grundzustand und ein geeignet vereinfachtes Elastizitätsgesetz angenommen werden, was zur Aufstellung des elastischen Potentials führt. Die Lektüre der Arbeit ist beträchtlich erschwert durch Mangel an klarer Darstellung der Hauptidee und der benutzten Begriffe (z. B. auf S. 291 schreibt der Verf., „daß es sich um eine spezielle Variation handelt“, ohne aber zu erklären, worauf diese Spezialität beruht), wohl auch durch Überfluß an Druckfehlern (z. B. wird auf S. 278—279 vermutlich eine und dieselbe Größe mit v , r und auch mit v bezeichnet; die grundlegende und einigemale zitierte Formel (26) hat überhaupt nicht die Nummer, usw.).

S. Drobot.

Fradlin, B. N. and S. M. Šachnovskij (Shakhnovsky): On obtaining integro-differential equations for the equilibrium of gently inclined shells. Dopovidi Akad. Nauk Ukraï. RSR 1958, 381—384, russ. und engl. Zusammenfassg. 385 (1958) [Ukrainisch].

Applying Kiltchevsky's method [Akad. Nauk URSS, Inst. Mat., Zbirnik Prać Inst. Mat. 4, 51, 5, 73, 6, 83 (1940), 8, 97 (1946); this Zbl. 23, 411, 24, 90, 367], the authors reduce the problem of the equilibrium of a gently inclined shell with arbitrary load to a study of

a system of functional equations

$$U_{(i)\alpha}(M, N) = V_{(j)\alpha}(M, N) - \iint_{(S)} [K_{(x)}^j(Q, M) U_{(i)j}(Q, N) + L_{(x)}^j(Q, M) \omega_{(i)j} \times \\ \times (Q, N)] dS_Q - A_{(i)\alpha}(M, N) + A'_{(i)\alpha}(M, N).$$

The method is given for constructing the nuclei $K_{(x)}^j$, $L_{(x)}^j$ and the operators $A_{(i)}$, $A'_{(i)}$ entering into the equations. In conclusion the authors discuss an example. [Engl. Zusammenfassg.]

Romiti, Ario: Sull'equilibrio limite dei materiali pesanti dotati di coesione ed attrito interno. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 23, 400—408 (1958).

On étudie, comme problème bidimensionnel, l'état de tension dans les matériaux pesants à cohésion intérieure, soutenus par des parois plans. On considère que le matériel est dans un état d'équilibre limite et vérifie la loi de Coulomb. On exemplifie les résultats pour un silos d'une longueur indéfinie, qui renferme un tel matériel.

P. P. Teodorescu.

Hardiman, N. J.: Two-dimensional problems in elasticity involving different media. Proc. London math. Soc., III. Ser. 7, 584—597 (1957).

En utilisant les méthodes du potentiel complexe, l'A. étudie le problème des plaques élastiques, isotropes, soumises à un état de tension plane généralisée, pourvues d'inclusions d'un autre matériel élastique et isotrope. On précise la solution pour une plaque infinie avec un trou circulaire, renforcée par un anneau d'un autre matériel. On considère les cas pour lesquelles (i) le contour intérieur est libre de tensions et la plaque est actionnée (a) par une tension uniforme à l'infini ou (b) par une tension simple à l'infini ou (ii) le contour intérieur est actionné par des tensions ou des déplacements connus, les tensions à l'infini étant données.

P. P. Teodorescu.

Adams, Ernst: Der ebene Spannungszustand in einer durch beliebige ebene Randlasten beanspruchten rotierenden Vollscheibe mit dem Stärkenprofil $h(r) = 1/(ar^2 + b)$. I. Drehsymmetrische ebene Randlasten an der rotierenden Scheibe. II. Beliebige ebene Randlasten an der ruhenden Scheibe. Z. Flugwiss. 5, 331—334 (1957); 6, 77—80 (1958).

En utilisant des développements en série de puissances, on détermine les fonctions d'influence pour l'état de tension dans l'intérieur d'un disque circulaire plein en rotation ou immobile, actionné sur le contour par des charges à symétrie axiale ou par des charges quelconques.

P. P. Teodorescu.

Serman (Sherman), D. I.: On a problem in the theory of elasticity with mixed homogeneous conditions. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 733—736 (1957) [Russisch].

On étudie le problème plan de la théorie de l'élasticité pour des conditions aux limites homogènes mixtes, en le réduisant à un système d'équations intégrales de Fredholm. On donne des indications pratiques pour le calcul. *P. P. Teodorescu.*

Choudhury, Pritindu: Stresses in a layer of soil resting on a smooth rigid base under surface loads. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 91, 144—151 (1957).

Per uno strato indefinito piano di terreno sabbioso di fondazione, assunto come elastico, poggianti su di una base rigida, l'A. calcola, con l'aiuto della trasformata di Hankel, la distribuzione degli sforzi in corrispondenza ad una distribuzione superficiale di carichi a simmetria cilindrica ed a legge parabolica. *T. Manacorda.*

Eshelby, J. D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 241, 376—396 (1957).

Die Spannungs- und Deformationszustände, welche durch eine gegebene spontane Formänderung eines Bereiches im Inneren eines elastischen Körpers entstehen, werden mit Hilfe von geeignet gewählten „Schnitt“-„Spannungs“- und „Schweißungsdenkoperationen“ ermittelt. Im Spezialfalle ist der Spannungszustand im Inneren eines ellipsoidalen Bereiches gleichmäßig und läßt sich durch elliptische

Integrale darstellen. Anschließend untersucht Verf. in großen Entfernungen, die Störung eines eingepprägten gleichmäßigen Spannungszustandes in einem unendlich ausgedehnten Medium. verursacht dadurch, daß die elastischen Konstanten eines ellipsoidalen Bereiches sich von denen des umgebenden Mediums unterscheiden. Es wird gezeigt, daß für die Lösung dieses, und auch verwandter technisch und physikalisch interessanter Probleme, nur die Kenntnis eines ziemlich einfachen Spannungszustandes im Inneren des Ellipsoides ausreicht. *S. Drobot.*

Hellan jr., Kåre: Rotation moments in continuous structures. Tekniske Skr. 18 N, 44 p. (engl. Zusammenfassg. 42—44) (1958).

Blackburn, W. S.: Second order effects in the flexure of isotropic incompressible elastic cylinders. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 907—921 (1957).

L'A. calcola i termini di secondo ordine della deformazione e degli sforzi nella flessione di un cilindro isotropo incompressibile di sezione arbitraria, sollecitato da sole forze agli estremi. Il metodo adoperato è quello sviluppato da Green e Spratt (v. questo Zbl. 55, 181) che consiste nello sviluppare in serie di un parametro lo spostamento, gli sforzi, le forze applicate e di considerare la soluzione dei successivi sistemi ausiliari di equazioni di equilibrio valide per ciascun grado di approssimazione. Trattandosi di trasformazioni bidimensionali, l'uso della variabile complessa si impone. L'A. perviene al suo scopo con calcoli estremamente lunghi, anche se dichiara di non voler considerare la questione della monodromia dello spostamento, né viene presa in esame la questione della compatibilità dei successivi sistemi ausiliari. Viene anche fatta una applicazione al caso di un cilindro circolare. *T. Manacorda.*

Baldacci, Riccardo F.: Sopra un principio variazionale nella teoria degli spostamenti elastici non infinitesimi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 23, 250—254 (1958).

Viene preso in esame un mezzo elastico isotropo soggetto a trasformazioni pseudoinfinitesime, per le quali, cioè, il gradiente di spostamento sia finito ma il tensore di deformazione infinitesimo. Viene adottata per la relazione sforzi deformazione la consueta legge di Hooke generalizzata, in modo da ristabilire la corrispondenza biunivoca tra deformazione e stress. In tali condizioni l'A. riesce a provare due principi variazionali, l'uno reciproco dell'altro, complessivamente equivalenti alle equazioni di equilibrio ed alle condizioni di congruenza, e che rappresentano la estensione ai mezzi in esame del principio della minima energia potenziale e di quello della minima energia complementare della teoria classica. *T. Manacorda.*

Weingarten, Victor I.: Buckling of a simply supported rectangular plate under compression reacted by shear. J. aeronaut. Sci. 25, 207—208 (1958).

The energy method was used in order to find the critical buckling load of a simply supported rectangular plate under compression reacted by shear. The plate here considered is assumed to follow the classical small-deflection theory. One point was checked by the method of finite differences. Results are presented graphically. *Zusammenfassg. des Autors.*

Scheidegger, A. E.: A survey of the mathematics available for describing fracture. Canadian J. Phys. 36, 300—308 (1958).

L'A. svolge alcune considerazioni di carattere prevalentemente geometrico sulla formazione di fratture nei solidi, nell'ambito delle deformazioni finite. Viene anche indicato quale sarebbe il problema analitico per la determinazione della propagazione di una frattura in un solido, e sottolineata l'opportunità di ulteriori ricerche sperimentali. *T. Manacorda.*

Bland, D. R.: The associated flow rule of plasticity. J. Mech. Phys. Solids 6, 71—78 (1957).

Wird der plastische Formänderungsvorgang durch ein überall reguläres Fließkriterium $f(\sigma) = F$ ($\sigma = \sigma_{ik}$: Spannungstensor; F = Fließgrenze, bei verfestigendem Werkstoff von der Verformungsvorgeschichte abhängig) beherrscht, so konnte Drucker (dies. Zbl. 35, 412) auf Grund folgender beiden Hypothesen das

Stoffgesetz (*) $d\epsilon_{ik}^p = (\partial f / \partial \sigma_{ik}) d\lambda$ ($\epsilon^p = \epsilon_{ik}^p$: Tensor der plastischen Verzerrungen) herleiten: (I) $\sum d\sigma_{ik} d\epsilon_{ik}^p > 0$ ($= 0$) für $\sum |d\epsilon_{ik}^p| > 0$, falls $dF > 0$ ($= 0$); (II) $d\epsilon_{ik}^p = \sum A_{ik}^{rs} d\sigma_{rs}$, falls $dF > 0$ sowie $df \geq 0$. Verf. beweist umgekehrt unter wesentlichen Einschränkungen für F , daß (I) und (II) aus (*) folgen. Läßt man für f Singularitäten zu derart, daß jede solche durch einen Schnitt endlich vieler regulärer Fließflächenstücke $f_r = F$ gebildet wird, so gilt dort an Stelle von (*): $d\epsilon_{ik}^p = \sum_r (\partial f_r / \partial \sigma_{ik}) d\lambda_r$. Verf. sieht $f = F$ als Grenzwert regulärer Kriterien an und beweist im Falle $dF > 0$ als Zusatzbedingung obige Forderung (I). *H. Lippmann.*

Rabotnov, G. N. and S. A. Shesterikov: Creep stability of columns and plates. *J. Mech. Phys. Solids* 6, 27—34 (1957).

Gli AA. tracciano una teoria dinamica semplificata della stabilità delle travi soggette a compressione e delle piastre. Il criterio di stabilità consiste nella determinazione delle condizioni per le quali l'equazione delle piccole vibrazioni a partire dalla configurazione di equilibrio abbia soluzioni smorzate, e nella ricerca dei valori del carico per i quali tale carattere si inverte. Per le aste si ammette valida durante tutta la trasformazione una relazione costitutiva tra deformazione plastica, stress e velocità di deformazione. Per le piastre è ammessa una relazione analoga tra opportuni invarianti. Si esaminano in parallelo i casi in cui l'equazione di stato sia di tipo incrementale o totale. *T. Manacorda.*

Ford, Hugh and George Lianis: Plastic yielding of notched strips under conditions of plane stress. *Z. angew. Math. Phys.* 8, 360—382 (1957).

Ein plastischer dünner ebener Flachstab sei an der Schmalseite gekerbt. Die Verff. betrachten seinen (an der Kerbe) kleinsten Querschnitt Q , über welchem sie homogenen Werkstoff voraussetzen, und untersuchen den sog. „Vergrößerungsfaktor“ L als Verhältnis der in Q herrschenden (vergrößerten, mittleren) Längsspannung zur Fließgrenze Y des Zugversuches. Sie konstruieren für Zug- und Biegebeanspruchung gewisse „statisch zulässige“ Spannungszustände (welche das innere Kräftegleichgewicht und das Fließkriterium erfüllen) und errechnen daraus untere Schranken L_1 von L . Obere Schranken L_u werden z. T. von Hill [*J. Mech. Phys. Solids* 1, 19—30 (1952)] gegeben, z. T. errechnen sie die Verff. mittels „statisch zulässiger“ Gleitlinienfelder. L_1 und L_u bilden eine sehr kleine Differenz, so daß L hinreichend genau bestimmt ist. Allerdings hat der Ref. Bedenken gegen die Konstruktion von L_u : „Statisch zulässige“ Spannungsfelder — also auch Gleitlinienfelder — sind i. a. unendlich vieldeutig. Das richtige erfüllt die (den Levy-Miseschen Gleichungen in gewissem Sinne äquivalente) Bedingung der maximalen Arbeit bei gegebener Formänderung, welche gelegentlich durch die Forderung nach maximaler Spannung zu ersetzen ist. Also geben „statisch zulässige“ Spannungsfelder — damit Gleitlinienfelder — bestenfalls untere Schranken für L . *H. Lippmann.*

Thomas, T. Y.: On the propagation of weak discontinuities in perfectly plastic solids. *J. Math. Mech.* 6, 67—85 (1957).

A moving surface $\Sigma(t)$ is said to be singular of order one for the plasticity problem under consideration if the density ρ , the velocity components v_i and the stress components σ_{ij} are continuous across $\Sigma(t)$ while at least one of the first partial derivatives with respect to a space coordinate, is discontinuous across $\Sigma(t)$. The corresponding „kinematical“ and „dynamical“ conditions, in the sense of Hadamard, are then obtained. The discussion is carried out in particular for the case of the problem of „plane stress“ with the aim to determine the possible singular surfaces of order one, denoted as wave surfaces, for this problem, which does not form a particular case of the general three-dimensional problem. A result, regarding the v. Mises theory of plasticity, is, that for the plane-stress problem a wave surface exists such that the derivatives of ρ and of the v_i are continuous while discontinuities

occur in the derivatives of the σ_{ij} . The problem under the assumption of the Prandtl-Reuss theory is likewise discussed.

H. Geiringer.

Osanai, Tadao: Lateral vibration of some non-uniform thin bars. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. **40**, 161—173 (1957).

Es werden die Biegeeigenfrequenzen eines dünnen Stabes von veränderlichem Querschnitt für den Fall berechnet, daß Trägheitsmoment und Querschnittsfläche gemäß einer Potenzfunktion von der längs der Stabachse gemessenen Koordinaten x abhängen. Die Frequenzgleichung, die für den eingespannt-freien Stab abgeleitet wird, enthält Besselsche Funktionen verschiedener Art und Ordnung. Die Ergebnisse werden numerisch ausgewertet, und es zeigt sich, daß man durch geeignete Formgebung der Stäbe erreichen kann, daß für das Verhältnis der Eigenfrequenzen nahezu $f_1:f_2:f_3:f_4 = 1:2:3:4$ gilt. Diese Eigenschaft zeigen Musikinstrumente des Takasago-Stammes der Insel Formosa.

A. Weigand.

Conte, S. D.: Numerical solution of vibration problems in two space variables. Pacific J. Math. **7**, 1535—1544 (1957).

Verf. behandelt das Einschaltproblem der am Rand gestützten dünnen quadratischen Platte näherungsweise mit Hilfe des Differenzenverfahrens. Setzt man dieses in seiner einfachsten Form an, so stößt man auf die Schwierigkeit, daß bei Verkleinerung der räumlichen Maschenweiten $\Delta x = \Delta y$ die zeitliche Maschenweite gemäß $\Delta t = \frac{1}{4} \Delta x^2$ verkleinert werden muß, da sonst das Differenzenverfahren nicht stabil ist. Die Zahlenrechnungen werden so umfangreich, daß sie nicht einmal mehr mit einem großen Rechenautomaten zu bewältigen sind. Verf. benutzt deshalb ein implizites Differenzenverfahren, das die Lösung eines einfach gebauten linearen Gleichungssystems erfordert und das für beliebige Maschenweiten stabil ist. Schließlich wird noch gezeigt, daß die explizit angebbare Lösung des Differenzenproblems bei abnehmender Maschenweite in die des Differentialproblems übergeht.

A. Weigand.

Schilhansl, M. J.: Bending frequency of a rotating cantilever beam. J. appl. Mech. **25**, 28—30 (1958).

The stiffening effect of the centrifugal forces on the first-mode bending frequency of a rotating cantilever beam of uniform cross section is investigated by means of the method of successive approximations. It depends upon the angle made by the minor axis of inertia with the direction of the circumferential velocity.

Zusammenfassg. des Autors.

Roseau, Maurice: Diffraction d'ondes élastiques planes dans un milieu homogène encastré suivant un demi-plan. C. r. Acad. Sci. Paris **245**, 1888—1890 (1957).

An infinite and homogeneous elastic medium is considered. The two dimensional problem (independent of z) of the diffraction of an incident plane elastic wave under the assumption that the components of the displacement $u_x(x, y)$ and $u_y(x, y)$ vanish on the half plane $y = 0, x > 0$ is reduced to the problem of the solution of an integral equation of the Wiener-Hopf type.

F. Oberhettinger.

Roseau, Maurice: Sur un théorème d'unicité applicable à certains problèmes de diffraction d'ondes élastiques. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 1780—1782 (1957).

Uniqueness theorem concerning the two dimensional (independent of z) propagation of elastic waves in an infinite and homogeneous elastic medium under the assumption that the components of the displacement $u_x(x, y)$ and $v_x(x, y)$ vanish on certain cylindrical surfaces $f(x, y) = 0$.

F. Oberhettinger.

Hanin, Meir: Propagation of an aperiodic wave in a compressible viscous medium. J. Math. Physics **36**, 234—249 (1957).

Die Fortpflanzung ebener Wellen in einem zäh-elastischen festen Körper oder einer zähen kompressiblen Flüssigkeit mit vernachlässigbarer Wärmeleitung ist durch die Differentialgleichung

$$\nu \partial^3 u / \partial x^2 \partial t + a^2 \partial^2 u / \partial x^2 - \partial^2 u / \partial t^2 = 0$$

bestimmt, in der u die Störungsamplitude und a die Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Periodische Lösungen dieser Differentialgleichung sind bereits 1860 von Stokes

untersucht worden. In der vorliegenden Arbeit wird der Fall untersucht, daß für $t < 0$ u durchweg verschwindet, während für $t \geq 0$ eine beliebige Verteilung $u = u_0(t)$ vorgegeben wird. Die Störung soll in Richtung positiver x laufen und die Amplitude für größer werdende x allmählich abklingen, so daß $u \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Durch Anwendung der Laplace-Transformation und des Mellinschen Inversionstheorems erhält man eine komplexe Integraldarstellung für die Welle. Insbesondere wird der Fall untersucht, daß die erzeugende Störung impulsartig ist und durch eine Dirac-Funktion dargestellt wird. Nach dem Faltungssatz der Laplace-Transformation kann dann die Lösung für allgemeine Fälle aus der fundamentalen Lösung der Dirac-Funktion durch eine Integration nach der Zeit gewonnen werden. Die Fundamentallösung wird als gut konvergente Reihenentwicklung sowie durch asymptotische Entwicklungen dargestellt, die ausreichen, die Funktion für jeden Wert von $\bar{x} = ax/\nu$ und $\bar{t} = a^2 t/\nu$ mit ausreichender Genauigkeit zu berechnen. Numerische Berechnungen wurden für sechs verschiedene Werte von \bar{t} ($0,25 \leq \bar{t} \leq 100$) ausgeführt. Die Diskussion der erhaltenen Lösungen zeigt, daß diese sowohl für kleine als auch für große \bar{t} in einfachere Näherungsausdrücke übergehen.

W. Wuest.

Hanin, Meir: Mathematical results related to a problem in wave propagation. J. Math. Physics **36**, 250—260 (1957).

Im Verlauf der vorstehend referierten Arbeit traten verschiedene mehr mathematische als physikalische Probleme auf, die in diesem Beitrag gesondert behandelt werden. Im einzelnen handelt es sich um Summationsformeln für gewisse Neumannsche Reihen sowie um die Eigenschaften einer Klasse von Funktionen, welche der gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung $z d^3 G_\lambda / dz^3 - \lambda d^2 G_\lambda / dz^2 - \frac{1}{2} G_\lambda = 0$ genügen. Die drei Lösungen dieser Differentialgleichung werden in Form von Integraldarstellungen gegeben. Für positiv ganzzahlige λ kann die Lösung auf Integrale Hermitescher Polynome zurückgeführt werden. Für große Werte von z wird eine asymptotische Darstellung gegeben.

W. Wuest.

Pursey, H.: The launching and propagation of elastic waves in plates. Quart. J. Mech. appl. Math. **10**, 45—62 (1957).

An infinite isotropic plate of thickness $2a$ is oriented in a Cartesian system of coordinates such that its surfaces are defined by $z = \pm a$ (i. e. the medial plane coincides with the $x y$ -plane). A stress distribution on the free surfaces of the plate varying harmonically with the time is imposed. Two types of sources are considered; (a) a field independent of y and (b) a field symmetric with respect to the z axis. The components of the displacement u_x, u_z and u_r, u_z for the case (a) and (b) respectively are given in the form of integral expressions for both types of waves; symmetric and antisymmetric with respect to the medial plane. These integrals lead to the secular equation as first obtained by Lamb. Tables, which show the velocity of propagation as a function of plate thickness for the two principal modes in materials with Poisson's ratio of $\frac{1}{4}$ and $\frac{1}{3}$ are given. Consideration is given to the complementary modes of propagation and graphs show the relation between velocity and plate thickness for propagating waves.

F. Oberhettinger.

Gazis, D. C. and R. D. Mindlin: Influence of width on velocities of long waves in plates. J. appl. Mech. **24**, 541—546 (1957).

Rayleigh (in 1889) and Lamb (in 1889) have deduced the velocities of flexural and extensional waves in an infinite elastic plate using the theory of elasticity. For the case of straight-crested waves the theory of plane strain was employed so that the results pertain to a plate of infinite width. Changing the constants of elasticity the velocities may be converted to those for generalized plane stress, applicable to a plate of small width. However, this paper contains a discussion of the velocities of propagation of long flexural and extensional waves in a plate or bar in the transi-

tion region between the states of generalized plane stress and plane strain, i. e., for arbitrary width-thickness ratios (h/a) of rectangular sections. For the case of plane strain (corresponding to h/a infinite) the velocity of the lowest flexural mode in the Rayleigh-Lamb solution is the same as that obtained from the Lagrange classical theory of low-frequency flexural vibrations of thin plates for the case of straight-crested waves in an infinite plate. The corresponding velocity of extensional waves in this solution coincides with the velocity obtained from Poisson's theory of low-frequency extensional vibrations of thin plates. At the other extreme case ($h/a \rightarrow 0$) the conditions of generalized plane stress apply. The equations of motion result from retaining the zero-order and first-order terms of an expansion of the displacements in a series of powers of the width co-ordinate (z). They are referred to in the sequel as „first equations“ (expressing the plate displacements in terms of three potentials, s. Kane and Mindlin, this Zbl. 70, 193) and are used in the investigation of both the flexural and extensional velocities. It is found that, for flexural waves, as h/a increases from zero, the velocity remains close to that for generalized plane stress until quite large values of h/a are reached, after which the velocity rises asymptotically towards that for plane strain. For extensional waves the velocity is slightly smaller than that for generalized plane stress for all $h/a > 0$. The magnitude of the phase velocity of long flexural waves, expressed as the per cent excess over the velocity for generalized plane stress, is plotted for three values of Poisson's ratio. The equation which describes the variation of the phase velocity with the wave length of the first extensional mode is deduced. The per cent decrease of the phase velocity from the limiting velocity for generalized plane stress is plotted also for two values of Poisson's ratio. It is remarked that if the dimension $2h \rightarrow \infty$ the first extensional mode degenerates to a zero mode, and a higher one becomes the mode of plane strain, width motion only in plane of x and y . Lagrange's equations are used also and the frequency equation of Voigt is deduced which yields the velocity corresponding to a given ratio of width to thickness. In this solution the velocity of long flexural waves (per cent excess over generalized plane stress) are plotted for $\nu = 0,25$ and $0,3$. It is shown that the presence of anticlastic curvature in the Lagrange theory is the cause of the difference between the curves of the two theories. *D. Rašković.*

Koga, Isaac, Masanao Aruga and Yōichirō Yoshinaka: Theory of plane elastic waves in a piezoelectric crystalline medium and determination of elastic and piezoelectric constants of quartz. Phys. Review, II. Ser. 109, 1467—1473 (1958).

Um die Elastizitätskonstanten von Quarz dynamisch zu bestimmen, entwickeln Verff. eine auf ebene Wellen beschränkte Theorie unter Einschluß des piezoelektrischen Effektes. Unter der Voraussetzung, lediglich elektrische Polarisierung in Fortpflanzungsrichtung sei von Einfluß, drücken sie einen „elektrischen“ Spannungstensor σ_{ik}^E mittels der (mechanischen) Verrückungen u, v, w aus. Andererseits bedingen diese durch das Hookesche Gesetz den „mechanischen“ Spannungstensor σ_{ik}^M . $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^E + \sigma_{ik}^M$ stelle den endgültigen Spannungszustand dar. Dann liefern die Bedingungen des (dynamischen) infinitesimalen Kräftegleichgewichtes ein System von drei Differentialgleichungen 1. Ordnung in u, v, w , welches bei Betrachtung geeigneter Schwingungsformen die Elastizitätskonstanten c_{ik} zu bestimmen gestattet. Die Verff. stellen gute Übereinstimmung mit Experimenten fest und diskutieren abschließend Temperaturabhängigkeit der c_{ik} . *H. Lippmann.*

Lessen, Martin: Thermoelastic damping at the boundary between dissimilar solids. J. appl. Phys. 28, 364—366 (1957).

Die Fortpflanzung der longitudinalen Wellen durch die Grenzschicht zwischen zwei verschiedenartigen thermoelastischen Körpern wird auf Grund einer früheren Arbeit des Verf. [s. Quart. appl. Math. 15, 105—108 (1957)] untersucht. Die Dissi-

pationsgeschwindigkeit der mechanischen Energie erweist sich der Quadratwurzel der Wellenfrequenz proportional. *S. Drobot.*

Alekseev (Alexeev), A. S. and B. Ja. (B. J.) Gel'činskij (Gelchinsky): Determination of head wave intensity by the method of rays in the theory of elasticity. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 661—664 (1958) [Russisch].

Contrary to the treatments of Friedrichs and Keller with spherical waves [J. appl. Phys. 26, 961—966 (1955)] in this paper the authors consider the problem of the determination of head waves intensity on the limit ($z = 0$) of two different elastic media in the case when on the semispace limit fall the polarized waves of arbitrary fronts. The method of rays is used supposing the continuity of the stresses and displacements and linearity of the boundary conditions.

D. Rašković.

Hydrodynamik :

Wenk, Friedrich: Bewegung und Ansammlung von Ionen und sonstigen Schwebeteilchen in Wirbelströmungen. Z. angew. Math. Phys. 9b, Festschrift Jakob Ackeret 710—720 (1958).

Sarma, L. V. K. Viswanadha: Slow motion of a paraboloid of revolution in a rotating fluid. J. Fluid Mechanics 3, 404—410 (1958).

Im Anschluß an Stewartson behandelt Verf. die langsame, translatorische Bewegung eines Rotationsparaboloides längs seiner Achse in einer unzusammen-drückbaren, reibungsfreien Flüssigkeit, die sich vor Einleitung der Körperbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Achse des Paraboloides drehte. Die mit konstanter Geschwindigkeit erfolgende Translation soll aus dem Zustand der Ruhe heraus plötzlich einsetzen. Das Problem führt auf gekoppelte, partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, die nach der Methode der Laplace-Transformation behandelt werden. Im Unterbereich werden die verbleibenden Ortsvariablen des rotationssymmetrischen Problems durch zwei passende neue unabhängige Variablen ersetzt, so daß die Oberfläche des Paraboloids Koordinatenfläche wird. Damit läßt sich das Problem im Unterbereich leicht lösen und die Rücktransformation in den Oberbereich ansetzen. Die vollständige Berechnung der komplexen Integrale für die Rücktransformation bietet Schwierigkeiten. Die Lösungen werden zunächst nur für die Oberfläche des Paraboloids und für die Rotationsachse der Flüssigkeit angegeben. Hier ergeben sich oszillatorische Flüssigkeitsbewegungen, die nicht abklingen. Schließlich wird eine in der Zeitkoordinate asymptotische Lösung für eine beliebige Stelle des Flüssigkeitsbereiches angegeben. Auch hier ergeben sich oszillatorische Flüssigkeitsbewegungen, deren Amplituden jedoch mit der Zeit gegen Null gehen.

G. Heinrich.

Mackie, A. G.: The calculation of the drag in problems solved by the hodograph method. Philos. Mag., VIII. Ser. 3, 140—142 (1958).

Explicit formulae are found for the total drag on a class of obstacles placed in a uniform stream of an inviscid fluid when the stream function is given in terms of the velocity variables. The formulae are given for incompressible flow and for the exact equation of compressible flow.

Zusammenfassg. des Autors.

Lighthill, M. J.: The fundamental solution for small steady three-dimensional disturbances to a two-dimensional parallel shear flow. J. Fluid Mechanics 3, 113—144 (1957).

Verf. geht aus von der Bewegungsgleichung (1) $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \varrho^{-1} \nabla p = 0$ für eine stationäre inkompressible reibungslose Flüssigkeit. Er nimmt an, daß die Abweichung von der zweidimensionalen Parallelströmung so klein ist [Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (V(y) + u, v, w)$], daß die Quadrate und Produkte von u, v, w und ihren Ableitungen vernachlässigt werden können, und setzt weiter voraus, daß alle Störungen weit stromaufwärts (für $x = -\infty$) verschwinden. Um eine einer Quelle der Ergiebigkeit m im Ursprung entsprechende Fundamentallösung zu erhalten,

aus der sich dann weitere Lösungen herstellen lassen, schreibt er die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$(2) \quad \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = m \delta(x) \delta(y) \delta(z),$$

unter $\delta(x)$ die Diracsche Deltafunktion verstanden. Aus (1), (2) erhält er so nach Elimination des Druckes als grundlegende Bewegungsgleichung für v

$$(3) \quad V(y) \nabla^2 v - V''(y) v = m V(0) \delta(x) \delta'(y) \delta(z).$$

Ist (3) gelöst, so lassen sich w und u leicht bestimmen. Zur Lösung von (3) wird v als Fourierintegral angesetzt

$$v(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x + \beta z)} v_0(y, \alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Damit geht (3) in eine spezielle Form der Gleichung über, die H. B. Squire [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 142, 621—628 (1933)] zur Beschreibung kleiner dreidimensionaler Störungen einer zweidimensionalen Parallelströmung aufgestellt hat. Es ergibt sich, daß v nur von y und $x^2 + z^2 = s^2$ abhängt. Daher läßt sich v als Hankel-Transformation von v_0 schreiben:

$$v = 2\pi \int_0^{\infty} v_0 k J_0(k s) dk \quad (k^2 = \alpha^2 + \beta^2).$$

Die Funktion v_0 erfüllt für $y > 0$ und $y < 0$ die einfache Gleichung $v_0'' - v_0(k^2 + V''/V) = 0$; v_0 und v_0' sind aber bei $y = 0$ unstetig derart, daß $v_0(+0) - v_0(-0) = m/4\pi^2$, $v_0'(+0) - v_0'(-0) = (m/4\pi^2) V'(0)/V(0)$ gilt. Verf. behandelt zunächst zwei Sonderfälle der ungestörten Geschwindigkeitsverteilung $V(y) = U + A y$ und $V(y) = U e^{\lambda y}$, für die verhältnismäßig einfache Lösungen existieren, nämlich im ersten Fall $v = \partial/\partial y (-m/4\pi r) - (m/4\pi r) V'(0)/V(0)$, wobei $r = \sqrt{y^2 + s^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gesetzt ist, und im zweiten Fall $v = (\partial/\partial y + \lambda) \cdot [-m e^{-\lambda r}/4\pi r]$. In dem Fall einer allgemeinen Geschwindigkeitsverteilung, bei dem die einschränkende Voraussetzung gemacht wird, daß $V(y)$ nirgends verschwindet und daß die Grenzwerte $V(\pm\infty)$ existieren und von Null verschieden sind, ergibt sich die notwendig unstetige Lösung v_0 von der Form $v_0 = A(k) \cdot v_1(y, k)$ für $y > 0$, $v_0 = B(k) \cdot v_2(y, k)$ für $y < 0$, wobei A, B Konstanten und $v_{1,2}$ die Lösungen von (4) bedeuten, die sich für $y \rightarrow +\infty$ bzw. $y \rightarrow -\infty$ asymptotisch wie e^{-ky} bzw. wie e^{ky} verhalten. Die Untersuchungen werden nun für drei Fälle getrennt durchgeführt: I. Für große k , d. h. für kleine r , ergibt sich

$$v = my/4\pi r^3 - (m/4\pi r) V'(0)/V(0) + O(1) (r \rightarrow 0).$$

II. Für kleine k , d. h. für große r , ergeben sich drei verschiedene Formen von v (d. h. asymptotische Ausdrücke für v in der Form von Gliedern mit r^{-2} und r^{-3} sowie ein Fehlerglied der Ordnung r^{-4}), je nachdem $|y|$ groß und $y > 0$ oder $y < 0$ oder $|y|$ nicht groß ausfällt. III. Im Fall eines allgemeinen k wird die Theorie unter der Einschränkung, daß die totale Variation der ungestörten Geschwindigkeit $V(y)$ klein ist im Vergleich zu ihrem absoluten Betrag, durchgeführt. Das Ergebnis lautet hier, unter V_m die halbe Summe von $\text{Max } V(y)$ und $\text{Min } V(y)$ im wesentlichen verstanden,

$$v = \frac{m y}{4\pi r^3} - \frac{V'(0) + V'(y)}{2 V_m} \frac{m}{4\pi r} - \frac{m}{8\pi V_m} \int_{|y|/2}^{\infty} \frac{V''(\frac{1}{2}y + l) - V''(\frac{1}{2}y - l)}{\sqrt{4l^2 + s^2}} dl,$$

also insbesondere für kleine r

$$v = \frac{m y}{4\pi r^3} - \frac{V'(0)}{V_m} \frac{m}{4\pi r} - \left\{ \frac{V''(0) y}{2 V_m} \frac{m}{4\pi r} + \frac{m}{16\pi V_m} \int_0^{\infty} \frac{V''(l) - V''(-l)}{l} dl \right\} + o(1)$$

und für große r

$$v = \frac{m y}{4\pi r^3} + \frac{m}{4\pi} \left(\int_{2y}^{\infty} - \int_{-\infty}^0 \right) \frac{V''(l/2)}{2 V_m} \frac{y - l}{\{(y - l)^2 + s^2\}^{3/2}} dl.$$

Schließlich wird die Theorie noch auf das vom Verf. früher schon mehrfach behandelte Problem der Verschiebung der sich aufteilenden Stromlinie in Schubströmungen um achsensymmetrische Hindernisse angewandt. *V. Garten.*

Kaškarov, V. P.: Über die Fadenströmungs-Bewegung einer zähen Flüssigkeit in einem kegelförmigen Diffusor. *Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech.* **6 (10)**, 20—26 (1957) [Russisch].

Eine partikuläre exakte Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen und der Temperatur- bzw. Konzentrationsverteilungsgleichung im axialsymmetrischen Falle wird mit dem „selbstähnlichen“ Ansatz: für die Geschwindigkeit $v_r = -v r^{-1} f(\omega)$, $v_\theta = -v r^{-1} (1 - \omega^2)^{-1/2} f(\omega)$ (v Zähigkeit, r, θ sphärische Koordinaten, $\omega = \cos \theta$) und für die Temperatur bzw. Konzentration $T = r^{-1} t(\theta)$ auf die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Funktionen $f(\omega)$ und $t(\theta)$ mit geeignet gewählten Konstanten zurückgeführt. *S. Drobot.*

Khamrui, S. R.: On the slow steady motion of an infinite viscous liquid due to the rotation of a cylinder. *Bull. Calcutta math. Soc.* **49**, 61—66 (1957).

Die Stromfunktion ψ von zweidimensionalen, stationären Strömungen einer reibenden Flüssigkeit befriedigt, genügende Langsamkeit der Bewegung vorausgesetzt, die Gleichung $\nabla^4 \psi = 0$. Für den Fall der gleichförmigen Drehung eines Zylinders mit der Winkelgeschwindigkeit Ω kann die Lösung in der Goursatschen Form $\psi \sim \varphi(z) + \bar{z} \chi(z)$; $z = x + i y$ angesetzt und die Randbedingungen an der Oberfläche des Zylinders erfüllt werden. Dadurch kann der Druck in der Flüssigkeit und das Drehmoment M berechnet werden, welches auf den Zylinder ausgeübt werden muß, um ihn in gleichförmiger Rotation zu erhalten. Für den kreisförmigen Querschnitt ergibt sich das bekannte Resultat $|M| = 4 \pi \mu \Omega a^2$, für den elliptischen Querschnitt $|M| = 4 \pi \mu \Omega R^2 (1 + m^2)$, wenn die Halbachsen der Ellipse durch $R (1 \pm m)$ gegeben sind. *Th. Sexl.*

Khamrui, S. R.: On the flow of a viscous liquid through a tube of elliptic section under the influence of a periodic pressure gradient. *Bull. Calcutta math. Soc.* **49**, 57—60 (1957).

Die Strömung einer reibenden Flüssigkeit durch ein kreiszyndrisches Rohr unter der Wirkung eines periodischen Druckgefälles wurde 1930 von Th. Sexl durchgerechnet und dabei der sog. „annular effect“ vorausgesagt, der später durch E. G. Richardson tatsächlich experimentell aufgefunden wurde. In vorliegender Arbeit werden diese Untersuchungen dahingehend verallgemeinert, daß die entsprechende Strömung durch ein Rohr mit elliptischem Querschnitt untersucht wird. Das Geschwindigkeitsfeld kann mit Hilfe von Mathieschen Funktionen ausgedrückt werden und ergibt im Grenzfall kleiner Reynoldsscher Zahlen eine mit dem Druckgefälle in Phase schwingende Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrquerschnitt, die die gleiche ist wie im Falle eines konstanten Druckgefälles. Im Grenzfall großer Reynoldsscher Zahlen hat die Strömung den Charakter einer Prandtlschen Grenzschichtströmung. Artet das elliptische Rohr in ein kreisförmiges aus, so gehen die aufgestellten Formeln in die für eine Strömung durch ein kreiszyndrisches Rohr über. *Th. Sexl.*

Aymerich, Giuseppe: Moti non permanenti di un gas perfetto con linee di corrente invarianti. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **27**, 27—34 (1957).

In Übertragung einer Prandtlschen Idee vom inkompressiblen auf den kompressiblen Fall fragt Verf. nach ebenen isentropischen Strömungen, die ein Geschwindigkeitspotential der Form $\Phi(x, y, t) = f(t) \varphi(x, y)$ besitzen. Es folgt $f(t) = (1 - \alpha t)^{-1}$, $\alpha = \text{const}$; das „reduzierte Potential“ $\varphi(x, y)$ genügt einer Differentialgleichung, die bei $\alpha = 0$ in die stationäre Potentialgleichung übergeht, die aber nicht durch Hodographentransformation linearisierbar ist. Neben der Strömungs- und Schallgeschwindigkeit (v, a) werden die zeitunabhängige reduzierte Strömungs- und Schallgeschwindigkeit $u = v/f$, $c = a/f$ eingeführt. Gemäß $u \gtrless c$ liegt hyperbolischer, parabolischer

oder elliptischer Typ vor. — Im eindimensionalen Spezialfall (d. h. $\varphi = \varphi(x)$) wird das Problem auf Quadraturen zurückgeführt und werden genauere Aussagen gemacht.

F. Wecken.

Merk, H. J.: Analysis of heat-driven oscillations of gas flows. III: Characteristic equations for flame-driven oscillations of the organ-pipe type. — IV: Discussions of the theoretical results concerning flame-driven oscillations. Appl. sci. Research, A 7, 175—191; 192—204 (1958).

(Teil I, II s. dies. Zbl. 77, 185; 78, 167). — In Fortsetzung zweier vorangegangener Arbeiten wird der Wärmeübergang laminarer Flammen auf das Gas diskutiert und die Flammenänderung in einer ersten Näherung zu berücksichtigen gesucht. Die Gleichung für das Schwingungsproblem vom „Orgelpfeifentypus“ wird aufgestellt und gezeigt, daß es ein analoges Elektrisches Netz gibt. Eine Lösung wird in dieser Arbeit nicht gegeben. — In der vierten Arbeit zum Thema wird gezeigt, daß die Schwingungen bei niedrigen Machzahlen in erster Linie auf die Flammenflächenänderung zurückgehen, was mit den Versuchen übereinzustimmen scheint. Vereinfachte Stabilitätskriterien werden aufgestellt und die Theorie wird auf einen raketenförmigen Brenner angewendet.

K. Oswatitsch.

Hedman, Sven: Method for computing the velocity distribution in a curved duct. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 36, 16 p. (1957).

Als eine Weiterentwicklung der Methode, welche Oswatitsch und Rothstein für die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung in Laval-Düsen verwendeten, wird die inkompressible Strömung in einem dreidimensionalen Rohrkrümmer sehr starker Kontraktion berechnet. Mit Rücksicht auf die Einfachheit der Methode ist die Übereinstimmung mit den Versuchen sehr zufriedenstellend. Die Berechnungen lassen sich auf kompressible Strömung erweitern.

K. Oswatitsch.

Küssner, Hans Georg: Beiträge zum Randwertproblem der elliptischen Tragfläche. Z. Flugwiss. 5, 50—56 (1958).

Die in früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 66, 206; 70, 425) mitgeteilte, in gewissen Punkten gelegentlich kritisierte Theorie wird ergänzt und verbessert. Ein Erfolg dieser Änderung ist, daß die Vorderkantensingularität jetzt vom üblichen Wurzeltypus ist und daß für den Grenzfall unendlicher Streckung die Grenzwerte der zweidimensionalen Strömung herauskommen.

J. Weissinger.

Truckenbrodt, Erich: Zum Übergang von der erweiterten zur einfachen Traglinientheorie bei schiebenden und gepfeilten Flügeln. Z. Flugwiss. 5, 259—264 (1957).

Es bezeichne $\delta(\eta)$ den mit der Halbspannweite dimensionslos gemachten Abstand zwischen dem 1/4-Punkt und dem Anstellpunkt (\approx 3/4-Punkt) in Abhängigkeit von der dimensionslosen Spannweitenkoordinate η . Verf. zeigt, daß für $\delta \rightarrow 0$ die Integralgleichung der erweiterten Traglinientheorie (3/4-Punkt-Verfahren) für den ungepfeilten Flügel (gerade tragende Linie) im Fall senkrechter Anblasung in die Prandtl'sche Tragliniengleichung im Falle schräger Anblasung im wesentlichen in die vom Rf. aufgestellte Gleichung des schiebenden Flügels (Jbuch. Deutsch. Luftfahrtforsch., Flugwerk 1940, I, 138—181) übergeht. Die Durchführung dieses Grenzüberganges beim nicht-schiebenden Pfeilflügel liefert unter gewissen weiteren plausiblen Vernachlässigungen eine relativ einfache Integralgleichung für Pfeilflügel großer Streckung, die nach einer Art Linearisierung im Pfeilwinkel in zwei Prandtl'sche Gleichungen aufgespalten werden kann. Über numerische Methoden und Ergebnisse soll später berichtet werden.

J. Weissinger.

Keune, Friedrich und Werner Schmidt: Ein Invarianzkriterium für die Unter- und Überschall-Strömung an äquivalenten Körpern, insbesondere an Flügel-Rumpf-Kombinationen. Jahrbuch 1956 der Wiss. Ges. Luftfahrt 150—155 (1957).

Unter dem Titel versteht der erste Verf. bestimmte Folgerungen, welche aus dem sogenannten Äquivalenzsatz für dicke Körper kleiner Streckung folgen. Dazu gibt die Arbeit einige Ausführungen und Erläuterungen.

K. Oswatitsch.

Woods, L. C.: Generalized aerofoil theory. Proc. roy. London, Ser. A 238, 358—388 (1957).

Grundlage der entwickelten Profiltheorie für Unterschallströmung, die insbesondere auch Profile mit Absaugung umfaßt, bildet die Annahme eines „Tangenten-Gases“ nach Kármán-Tsien. Hinsichtlich der Absaugung wird weiter angenommen, daß Geschwindigkeit und Druckgefälle normal zum Profil einander proportional sind, und vorausgesetzt, daß die Masse der abgesaugten Luft relativ klein ist. Sei (q, Θ) der Geschwindigkeitsvektor in Polarkoordinaten und φ bzw. ψ die Potential- bzw. Stromfunktion, dann wird mit $\beta = (1 - M_\infty^2)^{1/2}$, $\mu = \tanh^{-1} \beta$ und $U = q_\infty$ die neue Variable Ω durch $q/U = \sinh \mu / \sinh(\mu + \Omega)$ eingeführt. Es ist dann die Funktion $f = \Omega + i\Theta$ eine analytische Funktion der Variablen $w = \varphi + i m_\infty \psi$, wo $m_\infty = \rho_s \beta / \rho_\infty$ und ρ_s die Dichte im Staupunkt ist (vgl. L. C. Woods, dies. Zbl. 64, 198). Durch konforme Abbildung der w -Ebene auf eine Ebene ζ , in der das Profil als Schlitz erscheint, wird dann die Funktion $f = f(\zeta)$ zu einer analytischen Funktion mit Streifenperiodizität, welche die Randbedingungen am Profil und eine Integralbedingung der geschlossenen Profilkontur zu erfüllen hat. Mittels einer formalen Lösung des Randwertproblems wird für $f(\zeta)$ eine Integralgleichung gewonnen; die Bedingung der geschlossenen Profilkontur wird mittels Reihenentwicklung von $f(\zeta)$ in der Umgebung von $\zeta = -\infty$ und Residuenrechnung passend formuliert. Zur Lösung der komplizierten Integralgleichung wird Iteration empfohlen. In den Spezialfällen dünner Profile und des Profilentwurfs (vorgegebene Druckverteilung), beide ohne Absaugung, entartet die Integralgleichung und bietet keine Schwierigkeit. Die genannten Fälle sowie der Fall des dünnen Profils mit kleinem Anstellwinkel und gleichförmiger Absaugung werden ausgeführt, wobei z. T. schon bekannte Ergebnisse erhalten werden.

W. Szablewski.

Hacques, Gérard: Calcul par analogie rhéoelectrique de la courbure ou de l'épaisseur d'un profil d'aile annulaire satisfaisant à une distribution de pression imposée, lorsque l'écoulement présente la symétrie axiale. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 1700—1703 (1957).

Hacques, Gérard: Calcul de l'effet d'incidence d'une surface portante annulaire par la méthode des analogies rhéoelectriques. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 2476—2479 (1957).

Ein Kreisringflügel werde stationär umströmt von einem inkompressiblen reibungsfreien Medium. — In der ersten der beiden Arbeiten wird die axialsymmetrische Anströmung behandelt. Zu vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung auf der Flügelkontur wird im elektrolytischen Trog die Form des Flügelprofils bestimmt in den beiden Fällen a) dünnes (allein aus Ringwirbeln aufgebautes) Profil und b) dickes Profil mit derselben Geschwindigkeitsverteilung auf der Ringinnen- und Außenseite (allein aus Quell-Senken-Ringen aufgebaut). — Die zweite Arbeit beschäftigt sich mit der Anströmung eines zylindrischen Ringes verschwindender Profildicke unter einem Anstellwinkel α . Aus Messungen im elektrolytischen Trog werden örtliche Druckverteilung, Auftriebsanstieg $dc_a/d\alpha$ und Neutralpunktslage ermittelt. Vergleich mit der Theorie von Weissinger (dies. Zbl. 65, 411) gibt bei $dc_a/d\alpha$ vollkommene, bei der Neutralpunktslage gute Übereinstimmung.

K. Nickel.

Ehrich, Fredric: Circumferential inlet distortions in axial flow turbomachinery. J. aeronaut. Sci. 24, 413—417 (1957).

Abschätzung des Einflusses von Störungen, die eine Axialstufe einer Strömungsmaschine durchlaufen. Annahmen: stationäre Strömung eines reibungsfreien inkompressiblen Mediums durch ein zweidimensionales Flügelgitter mit einem Teilungsverhältnis < 1 ; sinusförmige Störung der Anströmgeschwindigkeit; Berechnung nach der Stromfadentheorie. Mitteilung der Ergebnisse in Schaubildern. K. Nickel.

Guiraud, Jean-Pierre: Gradient de pression initial à la pointe d'un profil. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 229—231 (1958).

Hobbs, Norman P.: The transient downwash resulting from the encounter of an airfoil with a moving gust field. *J. aeronaut. Sci.* **24**, 731—740, 754 (1957).

Anwendung bekannter Formeln zur Berechnung des Abwinds hinter einem zwei-dimensionalen Tragflügel, der von einer Aufwindböe getroffen wird. Näherungsweise Berücksichtigung endlicher Spannweite und vertikaler Verschiebung des Beobachtungspunktes. Vergleich mit Messungen gibt befriedigende Übereinstimmung. Anwendung zur näherungsweisen Bestimmung der Böenbeanspruchung einer Höhenflosse hinter einem Tragflügel (Rückwirkung vernachlässigt). *K. Nickel.*

Falkenheiner, Helmut: Über die praktische Durchführung von rechnerischen Flatteruntersuchungen. *Z. Flugwiss.* **6**, 52—57 (1958).

Zusammenstellung des Berechnungsganges für die Flatteruntersuchungen eines Flugzeugentwurfs, wobei die Vereinfachungen durch die Benutzung der Matrizen-schreibweise ausgenutzt werden. *K. Nickel.*

Dhawan, S. and R. Narasimha: Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion. *J. Fluid Mechanics* **3**, 418—436 (1958).

Bertotti, Bruno: Sul flusso secondario nello strato limite tridimensionale. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. maz. natur., VIII. Ser.* **22**, 455—458 (1957).

Verf. zeigt, daß bei dreidimensionalen Grenzschichten eine Sekundärströmung in jedem Falle dann vorhanden ist, wenn die vertikale Projektion der äußeren Stromlinien auf die Wand keine geodätischen Linien sind. *W. Wuest.*

Gosh, K. M.: On localized axisymmetric turbulence. *Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A* **23**, 341—353 (1957).

La notion de turbulence axisymétrique peut être considérée sous divers aspects. Batchelor et Chandrasekhar ont examiné un mouvement turbulent homogène, non stationnaire, dans lequel les divers tenseurs de corrélation sont invariants aux rotations autour de tous les axes de direction $\vec{\lambda}$, ainsi qu'aux symétries par rapport aux plans contenant $\vec{\lambda}$ ou perpendiculaires à $\vec{\lambda}$. Bassa examiné la turbulence cylindrique, stationnaire, mais non homogène dans la direction $\vec{\lambda}$. Dans les deux cas, l'écoulement occupe un domaine limité, de forme générale cylindrique. L'A. se propose d'étudier une turbulence axisymétrique autour d'un axe $\vec{\lambda}$ bien déterminé, stationnaire, longitudinalement homogène, mais non transversalement, le fluide occupant tout l'espace. C'est ce qui se passe s'il existe une source linéaire de turbulence dans un fluide au repos. Les corrélations spatiales $F_{ij} = \overline{u_i u_j}$ en deux points P et Q dépendent de 10 fonctions des produits scalaires $(\vec{\xi} \cdot \vec{\xi})$, $(\vec{\xi} \cdot \vec{\lambda})$, $(\vec{\xi} \cdot \vec{\psi})$ et $(\vec{O} \vec{P}, \vec{\psi})$, où $\vec{\xi}$ est le vecteur \vec{PQ} , $\vec{\psi}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{\lambda}$ et passant par P , et O un point de $\vec{\lambda}$. L'incompressibilité établit entre ces fonctions diverses relations assez compliquées. La forme des développements limités des F_{ij} pour les petites valeurs de la distance PQ est ensuite donnée. L'étude des surfaces et des courbes d'iso-corrélation suggère des méthodes pour mesurer les constantes dont dépendent localement les F_{ij} et comparer la théorie à l'expérience. *J. Bass.*

Truckenbrodt, Erich: Ein Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung an Tragflügeln bei Schallanströmung. *Jahrbuch 1956 der Wiss. Ges. Luftfahrt* 113—130 (1957).

Verf. gibt eine abgewandelte Darstellung der Theorie kleiner Streckung von R. T. Jones („small aspect ratio theory“ und nicht „slender-body theory“ wie Verf. mehrfach zitiert) mit Anwendungsbeispielen und praktischen Resultaten. Auf Dickeneinfluß und Genauigkeitsgrenzen wird nicht eingegangen.

K. Oswatitsch.

Ryhming, I.: Über die instationäre Überschallströmung durch Schaufelgitter mit Rückwirkung. *Z. angew. Math. Mech.* **37**, 416—431 (1957).

Überschallgitterströmungen mit Rückwirkung sind solche, bei denen die Normalkomponente der Machzahl auf das Gitter kleiner als eins ist, so daß Machlinien stromaufwärts vom Laufgitter in das Leitgitter laufen. Nachdem dieses Strömungsproblem in einer ersten Arbeit für ruhende Gitter behandelt wurde, werden hier bewegte Gitter untersucht. Es gibt ein quasistatisches Problem, welches sich auf eine stationäre Strömung mit darinnen bewegten Rändern reduzieren läßt. Ferner gibt es ein wesentlich instationäres Problem, bei denen sich ausgehend von den Gitterkanten Wellen ausbreiten. Dieser schwierigeren zweiten Aufgabe wird das Hauptaugenmerk gewidmet. Es wird gezeigt, daß sie für die normale Laufgeschwindigkeit unwesentlich ist. Eine exakte Lösung des gesamten Problems erwies sich als zu schwierig.

K. Oswatitsch.

Chang, I. D.: On optimum nose shapes for missiles in the superaerodynamic region. *J. aeronaut. Sci.* **25**, 57—58 (1958).

Eine Differentialgleichung einer Arbeit von W. J. Carter zum gleichen Thema wird exakt integriert. Dabei zeigen sich Fehler in den früheren Resultaten.

K. Oswatitsch.

Craggs, J. W.: The supersonic motion of an aerofoil through a temperature front. *J. Fluid Mechanics* **3**, 176—184 (1957).

Wenn ein Körper sich mit Überschallgeschwindigkeit durch die Grenzschicht zweier Medien bewegt, dann geht vom Durchstoßpunkt eine Störung aus, die sich mit Schallgeschwindigkeit fortpflanzt. In der vorliegenden Arbeit wird ein unendlich langer Keil untersucht, der auf eine ebene Grenzschicht auftritt. Als Spezialfall wird angenommen, daß die beiden Medien aus demselben Gas, jedoch von verschiedener Temperatur, bestehen. Es zeigt sich, daß bei kleinen Verschiebungen der einzelnen Gaspartikelchen — d. h. im Rahmen der linearisierten Theorie — die von beliebigen symmetrischen Körpern hervorgerufenen Störungen durch Superposition aus den von Keilen verursachten Störungen berechnet werden können. Für einen Doppelkeil werden numerische Resultate angegeben. Die Rechnung ergibt, daß die Störungen in der Nähe der Durchstoßstelle abgeklungen sind, wenn der Doppelkeil im zweiten Medium einen Weg zurückgelegt hat, der seiner dreifachen Länge entspricht.

M. Heckl.

Berndt, Sune B.: Theoretical aspects of the calibration of transonic test sections. *Z. angew. Math. Phys.* **9b**, Festschrift Jakob Ackeret 105—124 (1958).

Kanwal, R. P.: Propagation of curved shocks in pseudo-stationary three-dimensional gas flows. *Illinois J. Math.* **2**, 129—136 (1958).

Im Anschluß an eine frühere analoge Arbeit über stationäre Strömungen [Kanwal, Thesis, Indiana Univ. (1957)] berechnet Verf. im pseudostationären Falle für vollkommenes Gas die Ableitungen von Strömungsgrößen unmittelbar hinter einer Stoßfront aus den die Front und die Strömung davor beschreibenden Größen. Die Untersuchungen von Taub (dies. Zbl. **51**, 181) werden somit von zwei auf drei Dimensionen erweitert. Auf der Stoßfläche werden Krümmungslinien als (Gaußsche) Koordinatenlinien benutzt. Speziell wird homogener Zustand vor der Front vorausgesetzt. Notwendige und hinreichende Bedingungen für Wirbelfreiheit hinterm Stoß werden gewonnen und geometrisch interpretiert.

F. Wecken.

Greber, Isaac, Raimo J. Hakkinen and Leon Trilling: Laminar boundary layer oblique shock wave interaction on flat and curved plates. *Z. angew. Math. Phys.* **9b**, Festschrift Jakob Ackeret 312—331 (1958).

Rudinger, George: The reflection of shock waves from an orifice at the end of a duct. *Z. angew. Math. Phys.* **9b**, Festschrift Jakob Ackeret 570—585 (1958).

Dumitrescu, Lucian: Minimum length of a shock-tube, for given working times. *Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl.* **2**, Nr. 1, 61—77 (1957).

Sen, Hari K. and Arnold W. Guess: Radiation effects in shock-wave structure. Phys. Review, II. Ser. 108, 560—564 (1957).

Verf. setzt eine ebene stationäre Stoßfront in vollkommenem Gas (speziell $\gamma = \frac{5}{3}$) voraus; die Strahlung (R) möge neben der Materie (G) nur einen geringen Druck besitzen ($p_R \ll p_G$), aber einen beträchtlichen Energiestrom F_R liefern. F_R wird als Strahlungs-Diffusionsstrom angesetzt: $F_R = -\text{const } T^3 \lambda_R \partial T / \partial x$; λ = mittlere freie Weglänge. Ist $F_G = -k \partial T / \partial x$ der Wärmeleitungsstrom, so ist der Quotient $F_R / F_G \sim (c_R p_R \lambda_R) / (c_G p_G \lambda_G)$ maßgeblich für die durch Strahlung bedingte Verbreiterung der Stoßfront (c_R, c_G = Licht- bzw. mittlere gaskinetische Geschwindigkeit). Für verschiedene Zahlenbeispiele werden Stoßfrontprofile berechnet und Frontdicken mit und ohne Strahlungseinfluß angegeben. — Die Ionisation wird nicht berücksichtigt. Die gemachten Annahmen scheinen dem Ref. einer näheren Diskussion zu bedürfen.

F. Wecken.

Bond jr., John W.: Structure of a shock front in argon. Phys. Review, II. Ser. 105, 1683—1694 (1957).

Der Verlauf der thermodynamischen Funktionen im Übergangsbereich der „Unstetigkeits“-front einer eindimensionalen Stoßwelle in Argon wird kinetisch berechnet. Die gaskinetischen Rekombinationsquerschnitte werden durch Betrachtungen des detaillierten Gleichgewichts aus bekannten Strahlungsrekombinationsquerschnitten abgeleitet. Temperaturüberhöhung, Ionisation, Druck und materielle Geschwindigkeit hinter der Stoßfront sind in Abhängigkeit von der Stoßwellengeschwindigkeit graphisch dargestellt. Die Breite der Übergangszone nimmt mit wachsender Stoßwellengeschwindigkeit stark ab, gleichzeitig geht das emittierte Linienspektrum in Kontinuummmission über. Effekte von Elektronendiffusion und Verunreinigungen werden diskutiert. Die erhaltenen Ergebnisse sind mit dem experimentellen Befund in guter Übereinstimmung.

H. Rother.

Kontorovič (Kontorovich), V. M.: Reflection and refraction of sound by a shock wave. Soviet Phys., JETP 6, 1180—1181 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 33, 1527—1528 (1957).

● Hunter, Joseph L.: Acoustics. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc. 1957. XV, 407 p. 8,50 \$.

In der ersten Hälfte dieses wahrscheinlich für Studierende der Elektrotechnik gedachten Buches werden die Grundlagen der Lehre von den Schwingungen und Wellen sehr ausführlich, aber ohne großen mathematischen Aufwand behandelt. Außer den einfachen und gekoppelten Schwingern werden die Wellen auf Saiten und Schallwellen in Luft untersucht. Bei dieser Gelegenheit werden die Grundbegriffe, insbesondere der Begriff des mechanischen Widerstandes, sehr gründlich eingeführt. Der zweite Teil des Buches ist der Behandlung akustischer Meßgeräte sowie der physiologischen und der Bauakustik gewidmet. Es werden dabei, was besonders für den praktisch interessierten Leser sehr nützlich ist, mehrere Beispiele für die Konstruktion von Lautsprechern, Mikrofonen und dgl. angegeben und durchgerechnet. Leider blieb die Lärmbekämpfung, insbesondere das Problem der Schalldämmung weitgehend unberücksichtigt. Die Literaturangaben und die kurzen historischen Abrisse, die einigen Kapiteln vorangestellt sind, enthalten fast ausschließlich die Namen von Amerikanern und können bei einem unvoreingenommenen Leser leicht einen falschen Eindruck erwecken. Den Schluß des Buches bilden zwei kurze, aber inhaltsreiche Kapitel über Ultraschall und Unterwasserschall. Hier, wie in den übrigen Teilen des Buches, geht es dem Verf. nicht so sehr darum, dem Leser die neuesten Forschungsergebnisse mitzuteilen, vielmehr will er — wie im Vorwort zu lesen ist — dem Leser so viel Wissen vermitteln, daß er Veröffentlichungen in akustischen Fachzeitschriften verstehen kann. Dieses Ziel dürfte mit seinem Buch erreicht sein.

M. Heckl.

● **Friedlander, F. G.:** *Sound pulses.* (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.) Cambridge: At the University Press 1958. XI, 202 p. 40 s. net.

Das Buch behandelt die Streuung und Reflexion von Schallimpulsen an starren Körpern. Es beginnt mit einer Ableitung der Wellengleichung in inhomogenen Medien und einigen Betrachtungen über Anfangs- und Randwertprobleme. Dann wird gezeigt, wie die Eikonalgleichung, die Charakteristiken der Wellengleichung und das Fermatsche Prinzip zusammenhängen. Dabei wird auch bewiesen, daß sich Schallimpulse längs der Charakteristiken fortpflanzen. Außerdem werden bei dieser Gelegenheit die sogenannten Transportgleichungen abgeleitet. In zwei Kapiteln über geometrische Akustik wird untersucht, wie sich die Form und Stärke von Schallimpulsen bei der Reflexion ändern. Es werden die allgemeinen Formeln und einige Beispiele angegeben. In den beiden letzten Kapiteln wird die Streuung von Impulsen an Keilen, Zylindern und Kugeln untersucht. Das Buch schließt mit einem ausführlichen Literaturverzeichnis. Verf. behandelt alle Probleme mit großer mathematischer Strenge und gibt auch stets die notwendigen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise an. Auch werden die Impulse, die wegen ihrer Unstetigkeit einige Schwierigkeiten bereiten, stets nur unter Benutzung der Theorie der Distributionen in die Wellengleichung eingeführt. Aus diesem Grund ist das Buch zwar teilweise schwer lesbar, doch stets von großer Exaktheit. *M. Heckl.*

Heaps, H. S.: *The reflection coefficient of a surface of Rayleigh distributed impedance.* Quart. appl. Math. 15, 291—297 (1957).

Wenn eine ebene Schallwelle unter dem Winkel α auf eine ebene Grenzschicht auftrifft, dann ist das Verhältnis von reflektierter zu auffallender Energie gegeben durch:

$$k = |1 - \xi \cos \alpha|^2 \cdot |1 + \xi \cos \alpha|^{-2}.$$

ξ ist das Verhältnis der Wellenwiderstände vor und hinter der Grenzschicht. Verf. untersucht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von k , wenn der Wellenwiderstand der reflektierenden Schicht eine Gaußverteilung hinsichtlich des Betrages und eine gleichmäßige Verteilung hinsichtlich der Phase hat. Die Ergebnisse sind in Form von Bessel- bzw. Gamma-Funktionen angegeben. Außerdem werden für Grenzfälle auch noch Näherungsformeln abgeleitet. *M. Heckl.*

Bhattacharya, R. N.: *Wave resistance in deep water due to the accelerated motion of a pressure system.* Proc. nat. Inst. Sci. India, Part. A 23, 191—198 (1957).

In einer vorhergehenden Arbeit (s. dies. Zbl. 72, 427) ist eine Integralbeziehung für die Oberflächenerhebung des Wassers für den Fall hergeleitet worden, daß ein gleichförmig beschleunigtes Drucksystem sich über ungestörtes tiefes Wasser hinwegbewegt. In der vorliegenden Arbeit wird der Wellenwiderstand hierzu ausgerechnet, der nach Havelock (1917) als die gesamte horizontale Komponente des Druckes über die benetzte Oberfläche eines Schiffes definiert ist, wobei im vorliegenden Fall das Schiff durch das bewegte Drucksystem ersetzt ist. Der Wellenwiderstand besteht aus drei Anteilen R_1 , R_2 und R_3 . Der vorherrschende Anteil R_3 stellt dabei den direkten Beschleunigungseffekt dar, während R_1 und R_2 den Ergebnissen von Havelock für die gleichförmige Bewegung eines Drucksystems entsprechen. *W. Wuest.*

Bartholomeusz, E. F.: *The reflexion of long waves at a step.* Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 106—118 (1958).

Ein fortschreitender Wellenzug mit der Wellenlänge λ möge in einem Kanal von konstanter Tiefe h_2 auf eine Stufe auftreffen, von der an die Tiefe nur noch h_1 ($h_1 < h_2$) beträgt, so daß eine teilweise Wellenreflexion stattfindet. In der vorliegenden Arbeit wird im wesentlichen der Fall langer Wellen behandelt, für die $\lambda \gg h_1, h_2$. Es wird hierzu die linearisierte Theorie der Oberflächenwellen benutzt. Man wird auf eine singuläre Fredholmsche Integralgleichung erster Art für die Horizontalgeschwindigkeit über der Stufe geführt, die man in eine reguläre Gleichung zweiter Art über-

führen kann mit einem Kern, der gegen Null geht, wenn die Wellenlänge unendlich groß wird. Dieser Grenzfall entspricht aber der Flüssigkeitsbewegung zwischen festen Wänden, die mit der Methode der konformen Abbildung streng gelöst werden kann. Der für diesen Grenzfall erhaltene Operator wird auf die ursprüngliche Gleichung angewandt und eine Iteration für große λ -Werte vorgenommen. Lamb (1932) hat das gleiche Problem bereits mit der klassischen Methode der Seichtwasserwellen behandelt, die sicherlich die Einzelheiten der Bewegung nicht richtig wiedergeben kann, aber doch den Reflexionskoeffizienten in erster Näherung liefert. *W. Wuest.*

Moiseev (Moiseyev), N. N.: Oscillations of bodies floating in a bounded reservoir. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 1180—1183 (1957) [Russisch].

In abstrakter Form wird das System der Bewegungsgleichungen einer Anzahl von Körpern diskutiert, die an der Oberfläche einer räumlich beschränkten Flüssigkeit schwimmen; insbesondere werden in linearisierter Theorie Eigenschwingungszustände untersucht für den Fall, daß die Oberfläche der Flüssigkeit starr bleibt. Für infinitesimale Schwingungszustände wird ein Stabilitätskriterium angegeben. Die Eigenfrequenzen werden charakterisiert als Nullstellen einer meromorphen Funktion. Anwendungsmöglichkeit der Theorie auf hydrodynamische Stoßprobleme wird angedeutet.

K. Eggers.

Diprima, R. C.: On the diffusion of tides into permeable rock of finite depth. Quart. appl. Math. 15, 329—339 (1958).

It has been observed in the irrigation wells of the Hawaiian Islands that the water-level fluctuations have frequency components corresponding to those of the ocean tides. The phenomenon is analyzed, assuming the observed ground-water fluctuations to represent a diffusive transmission of the tidal disturbances through the porous volcanic structure of the island. This paper differs from earlier ones, in that it takes into account the impenetrable bounding bottom surface which limitates the permeable medium. Numerical computations are carried out for several values of the dimensionless depth of the porous medium. Also the limiting case of shallow water theory is studied. Using the results of the infinite depth, shallow depth, and finite depth theory, it is possible to estimate the amplitude and phase lag in the fluctuations of the ground-water as a function of the distant inland for various values of the dimensionless depth. It is found that for the values of the physical parameters which are probably of most concern, the infinite depth theory gives satisfactory results.

Dan Gh. Ionescu.

Širšov (Shirshov), A. N.: Motion of flow on an apron and risberme. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1958, 397—401, russ. und engl. Zusammenfassg. 401 (1958) [Ukrainisch].

The author shows that it is possible to reduce a linear equation of the motion of flow on a risberme to the heat conduction equation for a function of current. An approximate method is given for the solution of non-linear hydromechanics equations with respect to the motion of flow on a horizontal apron. A method for determining the suspended pressure on the concrete plates of an apron and a risberme is also given in this paper.

Redaktion.

Elektrodynamik. Optik:

Lenz, Hanfried: Geradlinige Potentialfelder. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 60, 2. Abt., 39 (1958).

Die Feldlinien des idealen Platten-, Zylinder- oder Kugelkondensators sind bekanntlich gerade Linien. Es wird gezeigt, daß es keine anderen Potentialfelder mit geraden Feldlinien gibt.

Aus der Einleitung.

Pekeris, C. L. and Z. Alterman: Radiation resulting from an impulsive current in a vertical antenna placed on a dielectric ground. J. appl. Phys. 28, 1317—1323 (1957).

Es wird der Einschwingvorgang untersucht, den ein Einheitsstromstoß auslöst, der auf einen vertikalen, auf der Oberfläche eines dielektrischen Halbraums ange-

ordneten Dipol gegeben wird. Die Aufgabe wird nach der Methode der Laplace-Transformation gelöst und dabei die von K. W. Wagner und van der Pol propagierte Form dieser Transformation benutzt. Die Rechnungen gehen aus von dem Hertzschen Vektor, der nach dem Übergang von $i\omega$ zu p aus dem Ausdruck für diesen Vektor im eingeschwungenen Zustand bei rein sinusförmiger Änderung entsteht. Die Anwendung des Umkehrsatzes führt auf ein außer von den Raumkoordinaten ρ und z auch noch von der Zeit t abhängendes Integral mit einer Besselschen Funktion im Integranden. Das Integral für den auch von der Zeit abhängenden Hertzschen Vektor wird mit einer elektronischen Rechenmaschine ausgewertet. Für den Fall $\varepsilon = 9$ sind die Ergebnisse graphisch dargestellt. *H. Buchholz.*

Agostinelli, Cataldo: Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un tubo cilindrico circolare con dielettrico variabile periodicamente secondo l'asse. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* **91**, 114—143 (1957).

L'A. considera un tubo cilindrico circolare con pareti perfettamente conduttrici riempito da un dielettrico con costante dielettrica ε funzione di r e z (r distanza dall'asse del tubo, z coordinata assiale) e con permeabilità costante. Dimostra come un campo elettromagnetico funzione di r e di z , che si propaga nel tubo può scindersi in una somma di (infiniti) modi TE e TM . Le componenti del campo sono, per i modi TE , prodotti fra funzioni della sola r e della sola z quando ε è una somma fra un funzione di r e una funzione di z , per i modi TM quando ε dipende dalla sola z . Se poi ε è una funzione periodica della sola z , l'A. dimostra che per valori determinati della frequenza esistono modi TM o TE con lo stesso periodo di ε ; questi risultati si ottengono discutendo una nuova equazione differenziale simile a quella di Mathieu.

D. Graffi.

Bogdankevič (Bogdankevich), L. S. and B. M. Bolotovskij (Bolotovskii): Motion of a charge parallel to the axis of a cylindrical channel in a dielectric. *Soviet Phys., JETP* **5**, 1157—1163 (1957), Übersetz. von *Žurn. éksp. teor. Fiz.* **32**, 1421—1428 (1957).

Si considera un tubo cilindrico indefinito, riempito di un mezzo isotropo di costante dielettrica ε_1 e immerso in un mezzo isotropo di costante dielettrica ε_2 . Una carica elettrica si muove con velocità costante su una retta parallela all'asse del cilindro a distanza r_0 da essa. Per il campo elettromagnetico così generato si calcolano il potenziale scalare e il potenziale vettore, facendo vedere che per $r_0 \rightarrow 0$ si trovano formule già note. Si calcola poi la perdita di energia elettromagnetica subita dalla carica in moto per effetto del campo da essa prodotto, dimostrando che, quando $r_0 = 0$ tale perdita è un massimo o minimo relativo (è senz'altro un massimo nel caso in cui il mezzo esterno ha conducibilità elettrica infinita). Si calcola poi la forza radiale a cui risulta soggetta la carica e si espone infine un'applicazione pratica dei risultati ottenuti.

R. Nardini.

● **Jenkins, Francis A. and Harvey E. White:** *Fundamentals of optics*. 3rd ed. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1957. V, 637 p. \$ 8,50.

Die Verff. teilen die „Grundlagen der Optik“ in drei Hauptteile ein, wobei die geometrische Optik ein knappes Drittel (10 Kapitel) des Umfanges umfaßt, während der restliche Teil — bis auf einen kurzen Abschnitt über Quantenoptik — die physikalische Optik (19 Kapitel) behandelt. — Die verhältnismäßig starke Betonung der geometrischen Optik ist bemerkenswert. Ausgehend von den grundlegenden Gesetzen der Strahlenbeeinflussung durch Reflexion und Brechung wird die Wirkung ebener und sphärischer Flächen, dünner und dicker Linsen sowie sphärischer Spiegel auf den Strahlenverlauf untersucht. Der Strahlenbegrenzung durch Blenden und der damit in Zusammenhang stehenden photometrischen Beziehungen bei der Abbildung ist ein weiteres Kapitel gewidmet. Für die Bestimmung des exakten Strahlenverlaufs werden eine graphische und die übliche rechnerische Methode angeführt. Die Ergeb-

nisse der Theorie der Aberrationen 3. Ordnung werden auf einige einfache Fälle (z. B. Durchbiegung einer dünnen Linse) angewendet. Ein Überblick über die wichtigsten Typen der optischen Instrumente beschließt den geometrisch-optischen Teil. — Im zweiten Teil steht der Begriff der Lichtquelle mit dem Superpositionsprinzip am Anfang. Die Zweistrahl- und Vielstrahlinterferenzen und die Fraunhoferschen Beugungserscheinungen an einer einzelnen Öffnung, einem Doppelspalt und am Gitter sowie die Fresnelschen Beugungserscheinungen werden in sehr eindringlicher Weise dadurch behandelt, daß die rechnerischen Untersuchungen durch graphische Darstellungen und typische Photographien veranschaulicht werden. Kapitel über die Lichtgeschwindigkeit und über den elektromagnetischen Charakter des Lichtes schließen sich an. Über Lichtquellen und ihre Spektren wird ebenso berichtet wie über Absorption und Streuung, Dispersion und Polarisierung des Lichtes. Auch bei den Abschnitten über die Reflexion und Doppelbrechung wird besonderer Wert auf die anschauliche Interpretation der Erscheinungen gelegt, wenn auch die theoretische Untermauerung nicht fehlt. Schließlich sei nur noch vermerkt, daß die Erläuterungen der magneto- und elektrooptischen Erscheinungen durch schöne Photographien des Zeeman- und Stark-Effektes abgerundet werden. — Dadurch, daß jedem Kapitel eine Reihe von Aufgaben mit Lösungen angegliedert ist, gewinnt dieses Lehrbuch noch an Wert.

H. Riesenberger.

● Chu, Chiao-Min, George C. Clark and Stuart W. Churchill: *Tables of angular distribution coefficients for light-scattering by spheres.* (Engineering Research Institute Publications. Tables.) Ann Arbor, Mich.: University of Michigan Press 1957. XV, 58 p. \$ 3.—.

Schon vor einem halben Jahrhundert hat der Physiker G. Mie die Reflexion einer linear polarisierten ebenen Welle an einem einfachen kugelförmigen Körper exakt berechnet. Die von ihm hergestellte Lösung gilt für eine beliebige dielektrische Kugel aus homogenem Material. Sie stellt sich in Form einer unendlichen Reihe aus komplexwertigen Funktionen dar, und zwar handelt es sich dabei um Kugelfunktionen im Produkt mit den sogenannten sphärischen Besselschen Funktionen $(\pi/2\alpha)^{1/2} \cdot J_{n+1/2}(\alpha)$. In dem vorliegenden Aufsatz werden stattdessen die Riccatischen Besselschen Funktionen $(\pi\alpha/2)^{1/2} \cdot J_{n+1/2}(\alpha)$ benutzt. Ihre zahlenmäßige Berechnung war bisher wegen des großen Arbeitsaufwandes nicht möglich. Im Forschungsinstitut der Universität Michigan sind jetzt die Reihenkoeffizienten mit Hilfe von elektronischen Rechenmaschinen auch zahlenmäßig berechnet worden. Der erste Teil der Tabelle bringt die Werte der Koeffizienten $a_n(\alpha, \beta)$ in der die Funktion

$$f(\theta) = (1/4\pi) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha, \beta) \cdot P_n(\cos \theta)$$

definierenden Reihe. Sie gibt die in Richtung des Winkels θ reflektierte und auf die Einheit des räumlichen Winkels bezogene Streustrahlung an. $f(\theta)$ hängt abgesehen vom Winkel θ noch von den beiden Parametern α und β ab. Hierin ist $\alpha = \pi D/\lambda$ mit D als dem Durchmesser des kugelförmigen Partikelchens und λ als der Wellenlänge der Strahlung. Der Parameter β ist mit α über die Gleichung $\beta = \alpha(m - jk)$, $j = \sqrt{-1}$, verbunden, worin m der Brechungsindex des Kugelmateri als bezogen auf das umgebende Medium ist und k der Dämpfungskoeffizient des Kugelmateri als. Für den Entwurf der Tabelle ist stets $k = 0$ gesetzt worden. Die Zahlenwerte von α bedecken in der Tabelle den Bereich 1(1)6(2)10(5)30. Für m werden die folgenden Zahlenwerte zugrunde gelegt:

0,9	1,15	1,33	1,55
0,93	1,20	1,40	1,60
1,05	1,25	1,44	2,00
1,10	1,30	1,50	∞

In dem Bereich $2\alpha < n < 3\alpha$ wird im allgemeinen $a_n < 10^{-5}$. Die Zahlenwerte

sind in der Tabelle mit einer Genauigkeit bis auf 5 Dezimalstellen angegeben. Eine zweite Tabelle bringt in der dafür üblichen Definition für die gleichen Werte von α und m die sogenannten totalen Streuquerschnitte. *H. Buchholz.*

Williams, W. E.: Reflection and refraction of electromagnetic waves at plane interfaces. J. Math. Physics **36**, 26—35 (1957).

Die Behandlung der Reflexion und Brechung erfolgt — im Anschluß an Copson [J. appl. Phys. **22**, 405 (1951)], indem die Komponenten des elektrischen Feldes tangential zu den ebenen Trennflächen zwischen den Medien als stetig bei dem Übergang vom einen zum folgenden Medium vorausgesetzt werden. Die Komponenten des magnetischen Feldes werden mit Benutzung Greenscher Funktionen als Funktion der tangentialen elektrischen Komponenten an den Flächen ausgedrückt. Man erhält so Integralgleichungen für jene Komponenten, indem man die Stetigkeit der tangentialen Komponenten des magnetischen Feldes durch die ebenen Trennflächen berücksichtigt. Die Integralgleichungen werden mittels doppelter Fouriertransformationen gelöst. — Die Methode wird ausgedehnt auf den Fall einer Trennfläche, die geringe Abweichung von einer Ebene besitzt, so daß die Grenzbedingungen hier komplizierter werden. Verf. nähert sie an, indem er die Grenzbedingungen für solche ebenen Flächen benutzt, die von der wirklichen Fläche möglichst wenig abweichen. Dies hat zur Folge, daß die tangentialen Komponenten dieser Ersatzebene bestimmte angebbare Diskontinuitäten längs der Ersatzebene besitzen. *J. Picht.*

Bromilow, N. S.: Geometrical-optical calculation of frequency response for systems with spherical aberration. Proc. phys. Soc. **71**, 231—237 (1958).

Verf. zeigt — zunächst durch allgemeine, mathematisch begründete Überlegungen, dann aber auch durch Vergleich zahlenmäßig gewonnener Ergebnisse —, daß es in der Mehrzahl der praktisch wichtigen Fälle genügt, die Berechnung der „frequency response“ für optische Systeme mit sphärischer Aberration in geometrisch-optischer Näherung durchzuführen. Diese Näherung erfordert — wie zu erwarten — wesentlich geringere Zeit als eine Berechnung jener Gütefunktion auf beugungsoptischer Grundlage. *J. Picht.*

Black, G. and E. H. Linfoot: Spherical aberration and the information content of optical images. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **239**, 522—540 (1957).

Die Verff. geben zunächst einen Überblick über den Formalismus der Übertragungstheorie, wobei außer der Wirkung des abbildenden optischen Systems auf den Übertragungsfaktor $\tau(u, v)$ auch der Einfluß der photographischen Emulsion berücksichtigt wird. Darüberhinaus werden Formeln zur Berechnung der statistischen mittleren Informationsdichte in einem Bild angeführt. — In einem wesentlichen Teil der Arbeit wird die Kontrast-Übertragungsfunktion τ in Abhängigkeit von der Raumfrequenz für ein monochromatisches optisches System mit primärer sphärischer Aberration (Fehler 3. Ordnung) für verschiedene Einstellebenen und verschiedene Beträge der Aberration angegeben. Die Berechnungen erfolgten durch numerische Integration mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine. Es ergibt sich u. a., daß der Maximalkontrast für verschiedene Linienfrequenzen bei verschiedenen Einstellebenen auftritt. — In Anlehnung an frühere experimentelle Ergebnisse von Higgins und Jones (1952) wird die Wirkung zweier photographischer Prozesse idealisiert, und als Fouriertransformierte einer äquivalenten Verteilungsfunktion wird der „Übertragungsfaktor“ (acceptance factor) τ_1 einer äquivalenten Aufangfläche erhalten. Schließlich wird die Informationsdichte in den photographischen Bildern — ausgedrückt in bits pro Beugungsscheibchen (Airy disk) — einmal bei verschiedenen Fokussierungen eines aberrationsfreien Systems sowie aberrationsbehafteter Systeme und zum anderen bei der besten Einstellung in Abhängigkeit von der Größe der primären Aberration graphisch dargestellt. Verschiedene Werte des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses dienen als Kurvenparameter. *H. Riesenberg.*

Lenz, Friedrich: Berechnung der Orts- und Winkelverteilung des Teilchenstroms bei Vielfachstreuung. *Z. angew. Phys.* 10, 31—34 (1958).

Die von Fermi unter Vernachlässigung von Geschwindigkeitsverlusten und Absorption in Kleinwinkel-Näherung berechnete Verteilungsfunktion für Vielfachstreuung wird auf den Fall verallgemeinert, daß der Absorptionskoeffizient α_0 und der Quotient ϑ_m^2/l aus mittlerem quadratischem Streuwinkel ϑ_m^2 und mittlerer freier Weglänge l als empirische Funktionen $f(z)$ der Schichtdicke z vorgegeben sind. Für ϑ_m^2/l und α_0 können so die empirischen oder theoretischen Werte eingesetzt werden, die dem mittleren Geschwindigkeitsverlust der Teilchen nach Durchlaufen der Schichtdicke z entsprechen. Am Beispiel der Botheschen Formel für ϑ_m^2 bei der Elektronenvielfachstreuung als Funktion der Elektronengeschwindigkeit U in Verbindung mit dem Thomson-Whiddingtonschen Gesetz, das U als Funktion von z gibt, werden die Ergebnisse näher erläutert. Schließlich wird auf eine Diskussion der durch Elektronenstrahlen bewirkten Intensitätsverteilung in Leuchtschirmen und Photoplatten auf Grund der gefundenen Formeln eingegangen und gezeigt, daß mit den vorliegenden Messungen befriedigende Übereinstimmung besteht.

W. Glaser.

Lippert, Werner: Über den Einfluß der unelastisch gestreuten Elektronen auf den Kontrast flächenförmiger Objekte im Elektronenmikroskop. *Z. Naturforsch.* 13a, 274—287 (1958).

Die Abschätzung des elektronenmikroskopischen Kontrastes flächenhafter Objekte aus den elastischen Wirkungsquerschnitten für Elektronenstreuung kann insbesondere dann zu relativ großen Fehlern führen, wenn das Objekt vorwiegend aus leichten Atomen besteht und wenn kleine Objektivaperturen verwandt werden. Die Übereinstimmung zwischen experimentellem und berechnetem Kontrast wird wesentlich besser, wenn man bei der Rechnung auch die unelastische Streuung mit berücksichtigt.

F. Lenz.

Waters, William E.: Rippling of thin electron ribbons. *J. appl. Phys.* 29, 100—104 (1958).

Der Verlauf, insbesondere die Dicke von bandförmigen Elektronenstrahlbündeln mit gekrümmter „Achse“ wird unter Berücksichtigung von Raumladungseinflüssen berechnet. Von rechnerischem Interesse sind insbesondere Lösungen, für die die Dicke des Bandstrahls konstant bleibt. Anstatt die vorhandene, dem Verf. aber anscheinend unbekannte Theorie der Ausbreitung von Elektronenstrahlbündeln mit beliebiger gekrümmter Achse zu verwenden, wird das Problem hier auf die Lösung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung für die Abweichung einer Randbahn von der Achse zurückgeführt, in welche nur die auf der „Achse“ genommenen Werte des elektrischen Potentials V und seiner ersten und zweiten Ableitung V' und V'' nach der Bogenlänge der Achsenbahn eingehen. Dies erscheint dem Referenten bedenklich, weil die Feldverteilung in der Umgebung der Achse und damit der Verlauf der achsennahen Nachbarbahnen selbst in ebenen Feldern nicht eindeutig aus V , V' und V'' folgt.

F. Lenz.

Hintenberger, H. und L. A. König: Über die Bildfehler in doppelfokussierenden Massenspektrometern und Massenspektrographen. *Z. Naturforsch.* 12a, 140—147 (1957).

Die Koeffizienten der drei Aberrationen von zweiter Ordnung im Öffnungswinkel und der relativen Geschwindigkeitsabweichung werden für eben begrenzte elektrische Radialfelder und magnetische Sektorfelder in Abhängigkeit von der Geometrie der Ablenkfelder und dem Ort des Eintrittsspalts berechnet. Bedingungen für das gleichzeitige Verschwinden der drei Aberrationskoeffizienten werden angegeben. Die Wirkung von Streufeldern wird vernachlässigt, offenbar weil die Verff. die dadurch hervorgerufenen zusätzlichen Aberrationen als sehr klein ansehen. Die Erfahrungen an rotationssymmetrischen Abbildungslinsen, in denen sehr geringe Ab-

weichungen von der idealen Feldsymmetrie zwar kaum eine Änderung der Brennweiten, wohl aber erhebliche zusätzliche Aberrationen hervorrufen, lassen den Referenten um die Berechtigung dieses Optimismus fürchten. *F. Lenz.*

Wende, H.: Linsengleichung und Bildkurve des Zylinder-Kondensators bei schiefem Ein- und Austritt der Ionenbündel an den Feldgrenzen. Z. Naturforsch. **12a**, 967—970 (1957).

Theorie der Fokussierung von Bündeln geladener Teilchen durch das elektrische Feld eines in Sektorform begrenzten Zylinderkondensators. Für den Fall eines unter einem beliebigen Winkel in das Ablenkkfeld einfallenden Bündels mit kleinem Öffnungswinkel wird der geometrische Ort der zu verschiedenen Werten der Teilchenenergie gehörigen „Bildpunkte“ (die „Bildkurve“) berechnet. Formeln für das Energie-Auflösungsvermögen und die Energie-Dispersion werden abgeleitet. Die den Verlauf der „Bildkurve“ beschreibenden Größen hängen sehr empfindlich von der Einschubrichtung des Bündels ab. *F. Lenz.*

Sokolov, A. A., D. D. Ivanenko and I. M. Ternov: The excitation of macroscopic oscillations by quantum fluctuations. Soviet Phys., Doklady **1**, 658—661 (1957), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 334—337 (1956).

Das Ergebnis zahlreicher im Zitat angegebener Arbeiten über die Anregung von Quantenschwingungen durch die klassische Ausstrahlung eines im Magnetfeld eines Kreisbeschleunigers umlaufenden Elektrons wird diskutiert. Mit Hilfe der Unschärferelation für Impuls und Amplitude der Elektronenschwingung um die Sollbahn (die als Makrotom aufgefaßt werden kann), soll der grundsätzliche Mechanismus der Wechselwirkung zwischen einer klassischen Bewegung und dem quantenmechanischen Verhalten des Teilchens aufgezeigt werden. Es wird diskutiert, inwieweit die vorliegenden Formeln für kleine Energien korrespondenzmäßig in einen rein klassischen Formalismus übergehen. *C. Passow.*

Sitenko, A. G.: Bremsstrahlung of ultra-relativistic particles in a central field. Soviet Phys., JETP **5**, 1223—1226 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **32**, 1505—1508 (1957).

The author considers the bremsstrahlung of an ultrarelativistic charged particle with spin-one-half in an arbitrary field with central symmetry. He makes use of the fact that this process occurs principally at large distances from the nucleus, and that the cross-section is therefore determined by the asymptotic behaviour of the wave function of the particle in the nuclear field. In this case it is possible to establish a general relationship between bremsstrahlung and elastic scattering cross-sections, which does not depend on the nature of the interaction between the particle and the scattering nuclear field. To find the scattering amplitude he uses the Huygens principle as formulated by Akhiezer for spinor waves and then, averaging the square of the modulus of the elastic scattering amplitude over initial polarizations and summing over the final polarizations, he obtains the expression for the elastic scattering cross-section $d\sigma_e$ for particles of spin one-half. The cross-section $d\sigma_r$ for scattering of a particle of spin one-half with emission of a photon in an external central field is now calculated, under the assumption that the interaction between the charge of the particle and the electromagnetic field of the photon is small. Taking into account the fact that in the ultrarelativistic case the main role is played by small angles both for scattering and for emission of photons, a relation between σ_e and $d\sigma_r$ is deduced. Integrating $d\sigma_r$ over the angles, the spectral distribution of the radiation is obtained. As an illustration, the formulae obtained in this way are applied to the case of scattering of fast protons by nuclei. *G. Martelli.*

Crupi, Giovanni: Sulle onde piane magneto-indrocinamiche propagantisi in una generica direzione. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **12**, 604—609 (1957).

Dalle equazioni di Maxwell-Minkowski, accoppiate con le equazioni dell'idrodi-

namica, l'A. deduce l'esistenza di onde magneto-idrodinamiche piane che si propagano in direzione diversa dalla direzione del campo magnetico impresso. *D. Graffi.*

Agostinelli, Cataldo: Figure di equilibrio ellissoidali per una massa fluida elettricamente conduttrice uniformemente rotante, con campi magnetici variabili col tempo. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis mat. natur., VIII. Ser. 23, 409—414 (1958).*

Si considera una massa fluida omogenea, incompressibile, elettricamente conduttrice, ruotante intorno all'asse z di un sistema di coordinate $Oxyz$ con velocità angolare costante ω ; trascurando la corrente di spostamento ma tenendo conto delle forze gravitazionali, si scrivono le equazioni che forniscono la distribuzione del campo magnetico e la pressione. Si dimostra che per tali equazioni sono possibili soluzioni particolari, nelle quali le componenti del campo magnetico risultano indipendenti dalla coordinata z e lineari nelle coordinate x, y , mentre rispetto al tempo sono di tipo sinusoidale con termini di pulsazione ω e termini di pulsazione 2ω ; si calcola anche il valore della pressione in ogni punto interno alla massa fluida. Ricercando configurazioni di equilibrio relativo ad un sistema solidale con la massa ruotante, si mostra che sono possibili figure ellissoidali a tre assi (essendo minima l'asse di rotazione) che, in assenza di campo magnetico, si riducono alle note ellissoidi di Jacobi: però la presenza del campo magnetico innalza il limite superiore di ω in confronto di quello che si ha nel caso classico.

R. Nardini.

Taniuti, Tosiya: On the propagation of the hydromagnetic waves in compressible ionized fluid. *Progress theor. Phys. 19, 69—76 (1958).*

Für ein ionisiertes Medium unendlich hoher Leitfähigkeit können unter Vernachlässigung des Verschiebungsstroms die magneto-hydrodynamischen Gleichungen als ein System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit der magnetischen Feldstärke, der Strömungsgeschwindigkeit und der Dichte als Variablen angegeben werden. In dem Grenzfall kleiner Alfvén-Geschwindigkeit lassen sich die kanonischen Bewegungsgleichungen anschaulich deuten. An Hand der Charakteristiken-Methode wird der eindimensionale Fall im Hinblick auf die Entstehung von Stoßwellen ausführlich diskutiert. Wegen der oben aufgeführten Voraussetzungen kann die unmittelbare Umgebung einer Stoßwelle mit den hier verwendeten Gleichungen nicht mehr beschrieben werden.

K. G. Müller.

Landau, L. D. and E. M. Lifšic: Hydrodynamic fluctuations. *Soviet Phys., JETP 5, 512—513 (1957)*, Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **32, 618—619 (1957).**

Durch Einführung eines äußeren Spannungstensors in die Navier-Stokesschen Gleichungen und eines äußeren Wärmestroms in die Wärmeleitungsgleichung wird ein System hydrodynamischer Gleichungen gewonnen, mit dem man die allgemeine Theorie der hydrodynamischen Schwankungen beschreiben kann.

G. Wallis.

Kippenhahn, R.: Plasma-Konfigurationen mit Oberflächenströmen, die von einem Magnetfeld im Gleichgewicht gehalten werden. *Z. Naturforsch. 13a, 260—267 (1958).*

Un plasma di conducibilità elettrica infinita e a pressione p costante, è contenuto in una regione G . In G può sussistere un campo magnetico dotato di potenziale assegnato (con vettore induzione B_i), mentre all'esterno agisce un campo magnetico non nullo da determinarsi (con vettore induzione—grad Φ). Si dimostra: affinché G rappresenti una configurazione di equilibrio per il plasma, è necessario che la superficie F , contorno di G , sia ovunque tangente a B_i e a grad Φ , per cui, detta n la normale esterna, ivi sarà $\bar{n} \cdot \text{grad } \Phi = 0$; su F deve essere anche

$$\frac{1}{8} \pi^{-1} \text{grad}^2 \Phi = \frac{1}{8} \pi^{-1} B_i^2 + p.$$

All'esterno di G vale naturalmente $\Delta \Phi = 0$. Per l'esistenza di una tale Φ , definita a meno di una costante additiva e per la quale si richieda la regolarità solo in vicinanza di F , occorre e basta che F sia moltiplicemente connessa e che le curve intersezione

di essa con le superfici $\Phi = \text{cost.}$ soddisfino certe proprietà differenziali. Tale risultato viene approfondito nel caso di un toro a sezione circolare, dove B_i ha solamente componente azimutale; si calcolano su F le componenti di $-\text{grad } \Phi$ e del vettore densità di corrente. Si considera anche il caso di F a simmetria assiale con diametro variabile e, in via approssimata, il caso di un toro a sezione variabile.

R. Nardini.

Relativitätstheorie:

Eftimiu, C. et S. Klarsfeld: Sur l'oscillateur linéaire relativiste. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 13, 53—57, russ. und französ. Zusammenfassg. 57 (1957) [Rumänisch].

L'équation du mouvement de l'oscillateur linéaire classique relativiste

$$\frac{d}{dt} \left(m_0 \dot{x} \right) \left[1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right] = -k_0 x$$

a été intégrée la solution s'exprimant à l'aide des intégrales elliptiques

$$[2E(\text{arc sin } x/a, k) - k'^2 F(\text{arc sin } x/a, k)]/k' = \omega_0(t - t_0).$$

On a obtenu aussi la fréquence relativiste

$$\omega/\omega_0 = \frac{1}{2} \pi [\pi k' / \{2E(k) - k'^2 F(k)\}]$$

ou

$$\omega/\omega_0 = \frac{1}{2} \pi \sqrt{(1-k)/(1+k)} [E(2\sqrt{k}/1+k)^{-1}].$$

En première approximation on retrouve un résultat antérieur [S. Gheorghită, Rev. Univ. Parhon și a Polit. 2, 19 (1953)]. L'amplitude de l'oscillation étant donnée, la fréquence relativiste ne peut pas surpasser la valeur r maxime $\pi c/2a$.

Zusammenfassung des Autors.

Totaro, Carmelo: Una osservazione sulle condizioni al contorno dell'elettrodinamica dei corpi in moto. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 609—611 (1957).

L'A. indica un'estensione all'elettrodinamica dei corpi in moto del teorema che permette di dedurre le proprietà delle componenti normali del vettore spostamento e del vettore induzione, alla superficie che separa due mezzi diversi, dalla continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e del campo magnetico.

D. Graffi.

Popović (Popovici), A.: Nonlinearity of the field in conformal reciprocity theory. Soviet Phys., JETP 5, 642—651 (1957), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 32, 781—793 (1957).

This is a formal paper which formulates new conformally covariant gravitational equations, describing the gravitational and electromagnetic fields respectively. From these equations the first version of nonlinear electrodynamics of Born-Infeld is deduced as also the variability of the gravitational constant.

L. Infeld.

Gupta, Suraj N.: Einstein's and other theories of gravitation. Reviews modern Phys. 29, 334—336 (1957).

Synge, J. L.: How stands the theory of gravitation today? Advancement Sci. 14, 207—214 (1957).

This is a witty and intelligent lecture on the subject stated in the title although rather controversial in its contents.

L. Infeld.

Kursunoglu, Behram: Correspondence in the generalized theory of gravitation. Reviews modern Phys. 29, 412—416 (1957).

In die vom Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 47, 446) vorgeschlagene modifizierte Form der einheitlichen Feldtheorie Einsteins geht eine universelle Konstante r_0 ein, die die Bedeutung einer Elementarlänge besitzt. Der Verf. zeigt, daß, wenn man r_0 gegen Null gehen läßt, seine einheitlichen Feldgleichungen in das System der allgemein-relativistischen Einstein-Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum übergehen. Hingegen existiert für nicht verschwindendes r_0 eine nicht notwendig verschwindende Stromdichte, wenn diese wie bei Einstein definiert wird. Die Nichtlinearität der bei $r_0 \neq 0$ für das elektromagnetische Feld gültigen Gleichun-

gen wird in den Gebieten wesentlich, in denen die elektromagnetische Feldstärke von der Größenordnung einer kritischen Feldstärke $\sim r_0^{-1}$ ist. — Ferner wird gezeigt, daß bei der vom Verf. vorgeschlagenen Definition des metrischen Tensors $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (-\text{Det } g^{\mu\nu})^{-1/2}$ für nicht verschwindendes r_0 die Metrik von der lokalen elektromagnetischen Feldstärke abhängig ist und für $r_0 \rightarrow 0$ in die Riemannsche Metrik der allgemeinen Relativitätstheorie übergeht.

H. Treder.

Sciama, D. W.: On a non-symmetrie theory of the pure gravitational field. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 72—80 (1958).

Der Verf. geht von der Bemerkung aus, daß Materie mit Spin durch ein Materiefeld mit unsymmetrischem Impuls-Energie-Tensor $T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}$ beschrieben werden kann. Wird nun gefordert, daß zwischen der Materie-Tensordichte $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ und dem Gravitationspotential $g_{\mu\nu}$ die Hilbertsche Beziehung $\mathfrak{T}_{\mu\nu} = \partial\mathfrak{L}/\partial g_{\mu\nu}$ besteht, so ergibt sich die Notwendigkeit, ein unsymmetrisches Gravitationspotential anzuführen. Vom Verf. wird Rosenfelds Form der allgemein-relativistischen Identitäten für $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ auf unsymmetrische $g_{\mu\nu}$ verallgemeinert. Die Identitäten bekommen dieselbe Form wie bei symmetrischen $g_{\mu\nu}$, nur das an Stelle von \mathfrak{T}_ν^μ jetzt Schrödingers Ausdruck $\frac{1}{2}(g^{\mu\lambda} T_{\nu\lambda} + g^{\lambda\mu} T_{\lambda\nu})$ zu setzen ist. Der Drehmomentenfluß wird im Anschluß an Bergmann und Thomson (s. dies. Zbl. 50, 215) definiert. Es gilt dann für ihn ein Erhaltungssatz, der eine Verallgemeinerung des entsprechenden speziell-relativistischen Satzes ist. — Als Feldgleichungen benutzt der Verf. die unitären Feldgleichungen von Einstein und Straus mit dem Unterschied, daß der Tensor $T_{\mu\nu}$ in die Feldgleichungen eingeht:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\tau} R_{\sigma\tau} + \Gamma_{\mu,\nu} - \Gamma_{\nu,\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\tau} (\Gamma_{\sigma,\tau} - \Gamma_{\tau,\sigma}) = T_{\mu\nu}.$$

— Aus der Forderung, daß wie in der allgemeinen Relativitätstheorie aus dem Impuls-Energie-Satz für ein spinloses Probeteilchen ($T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$) die geodätische Bewegung folgt, ergibt sich, daß der zu $g^{\mu\nu}$ reziproke Tensor der metrische Tensor ist.

H. Treder.

Regge, Tullio and John. A. Wheeler: Stability of a Schwarzschild singularity. Phys. Review, II. Ser. 108, 1063—1069 (1957).

In der allgemeinen Relativitätstheorie stellen infinitesimale Störungen $\delta g_{\mu\nu}$ der Metrik $g_{\mu\nu}$ ein sehr schwaches Gravitationswellenfeld dar, das sich in einem Hintergrundgravitationsfeld mit dem Potential $g_{\mu\nu}$ ausbreitet. Die Feldgleichungen für das Störungsfeld $\delta g_{\mu\nu}$ sind somit die linearisierten Einsteinschen Gravitationsgleichungen in den durch die Metrik $g_{\mu\nu}$ definierten krummlinigen Koordinaten. — Die Verf. lösen diese Gleichungen für den Fall, daß das Hintergrundfeld $g_{\mu\nu}$ die Form der Schwarzschildschen Metrik hat. Sie zeigen, daß für alle physikalisch vernünftigen Anfangs- und Grenzbedingungen das Störungsfeld $\delta g_{\mu\nu}$ periodisch von der Zeit abhängt. Ursprünglich kleine Störungen der Schwarzschildschen Metrik bleiben also zu jeder Zeit klein.

H. Treder.

Ó Raifeartaigh, L.: A static generalization of the Einstein universe. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 245, 202—212 (1958).

Die statischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen mit kosmologischem Term $-\lambda g_{\mu\nu}$ werden für eine Materieverteilung gefunden, bei der eine Kugel mit der konstanten Massendichte μ von einer den ganzen Außenraum erfüllenden Materie mit der konstanten Massendichte ν umgeben ist. An der Grenzfläche der Innenkugel wird Stetigkeit der $g_{\mu\nu}$ nebst ihren ersten Ableitungen gefordert, woraus von selbst die Stetigkeit des Drucks resultiert. — Es wird gezeigt, daß, wenn das Verhältnis von μ zu ν angenähert 1 ist (und vermutlich auch für alle anderen Verhältnisse von μ und ν), bei geeigneter Wahl von $\lambda > 0$ singularitätsfreie Lösungen existieren, die einen geschlossenen Außenraum darstellen. Diese Lösungen sind eine Verallgemeinerung des Einstein-Universums mit $\mu = \nu$. Ein

offener Außenraum ist nur dann möglich, wenn $\lambda = \nu = 0$ ist; in diesem Fall hat die Metrik des Außenraums ersichtlich die Schwarzschildsche Form. *H. Treder.*

Bondi, H.: Negative mass in general relativity. Reviews modern Phys. 29, 423—428 (1957).

Bekanntlich gibt es keine zeitunabhängigen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, die das Feld zweier diskreter Massen darstellen, wenn die Dichten dieser beiden Massen dasselbe (positive) Vorzeichen besitzen. Dies folgt entweder mit Hilfe der E.-I.-H.-Methode oder auch direkt daraus, daß für diese Massenverteilung eine Integrabilitätsbedingung von Levi-Civita nicht erfüllbar ist. Diese Integrabilitätsbedingung ist physikalisch als Gleichgewichtsbedingung zu deuten. — Der Verf. zeigt nun an Hand der Diskussion dieser Gleichgewichtsbedingung, daß zeitunabhängige Lösungen für zwei Massen dann konstruiert werden können, wenn ihre Dichten entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Bei derartigen Lösungen ist die Metrik im Unendlichen euklidisch, hat jedoch (im gewählten Bezugssystem) nicht die Minkowskische Form, sondern ist asymptotisch die Metrik eines gleichförmig beschleunigten ebenen Bezugssystems. Das Massenpaar befindet sich also im Zustand gleichförmig beschleunigter Bewegung. — Der Verf. zeigt ferner, daß mit Hilfe zweier solcher Massenpaare, die entgegengesetzt gleichförmig beschleunigt sind, eine Metrik konstruierbar ist, die — abgesehen von den Weltpunkten der Massen — im ganzen Raum singularitätsfrei ist. *H. Treder.*

Takeno, Hyôitirô: On plane wave solutions of field equations in general relativity. Tensor, n. Ser. 7, 97—102 (1957).

Spezielle exakte Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, $K_{ij} = -8\pi E_{ij}$ (E_{ij} elektromagnetischer Energietensor), für spezielle g_{ik} ($ds^2 = -A(dx^2 + dy^2) - B(dz^2 - dt^2)$). Die gefundenen Lösungen können als ebene Wellen bezeichnet werden. *D. Laugwitz.*

Cahen, Michel: Trajectoires de Schwarzschild et trajectoires de Newton. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 386—388 (1958).

Man kann die Keplerschen Bahnkurven der Newtonschen Mechanik als geodätische Linien eines symmetrischen affinen Zusammenhangs auffassen (E. Cartan, 1924). Verf. zeigt, daß es keine Einsteinräume mit den gleichen geodätischen Linien gibt. Es wird erwähnt, daß projektive Äquivalenz mit einem Einsteinraum auch für andere skalare Potentiale nicht erreicht werden könne. *D. Laugwitz.*

Das, A.: On the perihelion shift in conformally flat space-time. Nuovo Cimento, X. Ser. 6, 1489—1490 (1957).

Gürsey (vgl. dies. Zbl. 53, 168) und Pirani (vgl. dies. Zbl. 67, 204) bestimmten die Perihelbewegung in einer konform ebenen Raum-Zeit-Welt nach den Littlewoodschen Gleichungen — allerdings mit verschiedenen Resultaten. Verf. bestätigt das Ergebnis von Pirani, welches $1/6$ des Schwarzschildschen Wertes mit entgegengesetztem Vorzeichen lieferte. Ferner erweitert er die Littlewoodschen Gleichungen, so daß Übereinstimmung mit den Werten der Merkur-Periheldrehung erreicht wird, und diskutiert die neuen Gleichungen vom kosmologischen Gesichtspunkt. *W. Barthel.*

Raychaudhuri, Amalkumar: An anisotropic cosmological solution in general relativity. Proc. phys. Soc. 72, 263—264 (1958).

Schöpf, Hans-Georg: Über den Energie-Impulstensor Dirac-ähnlicher Felder. Ann. der Physik, VII. F. 1, 16—22 (1958).

An Hand von Modellbetrachtungen versucht Verf. plausibel zu machen, daß bei Dirac-ähnlichen Feldern die Benutzung des kanonischen Energie-Impuls-Tensors als eigentlicher Energie-Impuls-Tensor angebracht ist. Insbesondere wird eingehend das Modell des klassischen Spinteilchens nach Papapetrou-Hönl analysiert und der Übergang zur feldmäßigen Beschreibung vollzogen, wodurch allgemeine Gleichungen für Dirac-ähnliche Felder gefunden werden. Als wesentliches Argument

wird u. a. die Gültigkeit des Einsteinschen Additionstheorems der Geschwindigkeiten für die Energiestömungsgeschwindigkeit dieser Feldtypen gefordert. *E. Schmutzer.*

Souriau, Jean-Marie: Un schéma général pour la physique relativiste. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2779—2781 (1957).

Der Verf. gibt ein allgemeines Schema für die Aufstellung von Variationsprinzipien an, die zu kovarianten Feldgleichungen führen. Das Variationsprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie ist ein Spezialfall dieses Schemas, wenn die $g_{\mu\nu}$ und die $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ unabhängig voneinander variiert werden. *H. Treder.*

Trautman, A.: Discontinuities of field derivatives and radiation in covariant theories. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **5**, 273—277 (1957).

Lanczos, Cornelius: Electricity and general relativity. Reviews modern Phys. **29**, 337—350 (1957).

Es wird untersucht, wie sich eine einheitliche Feldtheorie des Gravitationsfeldes und des elektromagnetischen Feldes — im Gegensatz zu den üblichen Methoden — durch unmittelbare Verallgemeinerung der Einsteinschen Gravitationstheorie ohne die Einbeziehung einer Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie begründen läßt. Um die erwünschte Verallgemeinerung zu vervollständigen, wird die Abhängigkeit der Lagrangeschen Funktion der Theorie von Komponenten des kontrahierten Krümmungstensors des Riemannschen Raumes quadratisch vorausgesetzt. In letzter Instanz wurde ein ähnlicher Versuch erst von H. Weyl [Math. Z. **2**, 384—411 (1918); Ann. der Physik, IV. F. **59**, 101—133 (1919); Z. Phys. **22**, 473—480 (1921)] durchgeführt, seine Theorie wurde aber auf einer verallgemeinerten Infinitesimalgeometrie (der sogenannten Weylschen Geometrie) des Raumes aufgebaut, die sich durch Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie entwickeln ließ. — Die Ableitung der Feldgleichungen der vorgeschlagenen Theorie wird mit Hilfe der Legendreschen Transformation durch eine verallgemeinerte Hamiltonsche Methode (s. z. B. C. Lanczos, The Variational Principles of Mechanics, dies. Zbl. **37**, 399) durchgeführt. Hinsichtlich der expliziten Form der Lagrangeschen Funktion, die von der Lagrangeschen Funktion $L_0 = \frac{1}{2} \{R_{ik} R^{ik} + \beta R^2\}$ ausgehend sehr übersichtlich und instruktiv begründet wird, können wir jetzt wegen ihrer Kompliziertheit nur auf den originalen Text hinweisen, aber, die wichtigsten Resultate der Theorie lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: (1) Die abgeleiteten Feldgleichungen enthalten in reinem Gravitationsfeld sowohl die Einsteinschen Feldgleichungen $R_{ik} = 0$, als auch ihre „kosmologische Verallgemeinerung“ $R_{ik} = \lambda g_{ik}$. Es wird durch λ in die Theorie ein Parameter mit der Dimension einer Länge eingeführt. Dieser Parameter wird aber jetzt nicht mit Hilfe von kosmologischen Überlegungen bestimmt, wie das in den früheren Theorien üblich war, sondern auf die natürliche Längeneinheit der subatomaren Dimensionen zurückgeführt. — (2) Die Weylsche einheitliche Feldtheorie wurde damals auf die Idee gegründet, daß die Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie durch einen kovarianten Vektor erzeugt werden kann, welcher sich als das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes interpretieren läßt. Jetzt, in der vorgeschlagenen Theorie wird auch ein solcher kovarianter Vektor φ_i eingeführt, dadurch wird aber nicht die Geometrie des Raumes verallgemeinert, sondern φ_i wird bei der Legendreschen Transformation der Lagrangeschen Funktion ohne irgendeine Willkür auftreten. Durch eingehende Behandlung der abgeleiteten Feldgleichungen läßt sich beweisen, daß φ_i vielmehr als Komponente der Viererstromstärke denn als Komponente des Viererpotentials gedeutet werden soll, wodurch z. B. auch ein statistisches und stabiles Modell des Elektrons angegeben werden kann. — (3) Der Materietensor des Feldes reduziert sich auf ein kleines Gebiet des Raumes, und die dynamischen Wechselwirkungen zwischen Partikeln werden unmittelbar durch die Metrik des Raumes übermittelt. Dadurch geht aber die a priori Rolle der Lorentzschen Kraftwirkung verloren und die Glieder der Bewegungsgleichung — die üblicherweise den Komponenten der

Lorentz'schen Kraft entsprechen — werden durch geeignete Wechselwirkungsglieder ersetzt. — (4) Endlich wird ein instruktives Modell für die Deutung zwischen der Strahlungswechselwirkung und der Struktur des Raumes kurz behandelt.

J. I. Horváth.

Rindler, W.: On the coordination of the Riemannian and kinematic techniques in theoretical cosmology, with particular reference to the shift-distance law. *Monthly Not. roy. astron. Soc.* **116**, 335—350 (1957).

Verf. behandelt homogene und isotrope Weltmodelle und unterscheidet dabei zwischen den im Titel genannten zwei Modellen (Raum-Zeit-Modell der Relativitätstheorie mit einer Metrik nach Robertson-Walker gegenübergestellt einem kinematischen Modell nach Milne und Whitrow). Beide Vorstellungen können nicht den Anspruch auf die Bezeichnung „Theorie“ erheben, sondern sind mehr technischer Art. Das beobachtete Gesetz der Nebelflucht wird im Anschluß an Heckmann (1942) und im Hinblick auf die relativistische Kinematik — unter Heranziehung auch der neueren Beobachtungen — diskutiert; entsprechende Formeln sind abgeleitet.

W. Strohmeier.

Quantentheorie:

Brogie, Louis de: Tentative de raccord entre l'équation de Heisenberg et l'équation de l'onde u en théorie de la double solution. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 2077—2079 (1958).

L'A. cherche à rattacher à une équation non linéaire du type de Heisenberg, l'équation d'ondes non linéaire envisagée par la théorie de la double solution à l'aide d'une hypothèse faisant intervenir le milieu subquantique entièrement chaotique de M. M. Bohm et Vigier.

Zusammenfass. des Autors.

Potier, Robert: Sur la mécanique ondulatoire du photon de masse nulle. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 2106—2113 (1958).

La présente Note décrit une théorie du photon de masse nulle qui rend compte du champ coulombien. Une interprétation de l'invariance de jauge est proposée.

Zusammenfass. des Autors.

● **Edmonds, A. R.:** Angular momentum in quantum mechanics. (Investigations in Physics, No. 4.) Princeton, New Jersey: Princeton University Press 1957. VIII, 146 p. \$ 3,75.

Das Buch ist eine schöne Einführung in ein Gebiet der mathematischen Physik, das in den letzten Jahren stark an Bedeutung, Umfang und Komplikationen zugenommen hat. Bekanntlich hängt in der Quantenmechanik der Drehimpuls mit den (infinitesimalen) Drehungen im dreidimensionalen euklidischen Raum und ihren Darstellungen aufs engste zusammen. Daher spielt die Darstellungstheorie der dreidimensionalen Drehgruppe in der Atom- und Kernphysik eine große Rolle. Jedem, dem es auf diese Anwendungen der Gruppentheorie ankommt, aber auch jedem, der sich rein theoretisch für die Drehgruppe interessiert, kann dieses Buch warm empfohlen werden. Es ist übersichtlicher und angenehmer zu lesen als das entsprechende Buch von M. E. Rose (dies. Zbl. **79**, 201), und außerdem ist es bedeutend billiger. Nach einem einleitenden 1. Kapitel, das eine kurze Einführung in die Drehgruppe und die Darstellungstheorie gibt, werden im 2. Kapitel die Drehoperatoren und ihre Eigenfunktionen behandelt, im 3. Kapitel die Addition der Drehimpulse und die Clebsch-Gordan-Reduktion mit den Wigner-Koeffizienten, im 4. Kapitel die Darstellung endlicher Drehungen und die Kreiselfunktionen (mit dem Spezialfall der gewöhnlichen Kugelfunktionen), im 5. Kapitel die sphärischen Tensoren mit dem Wigner-Eckart-Theorem, der Gradient-Formel und den Vektor-Kugelfunktionen, im 6. Kapitel die Racah-Koeffizienten und schließlich im 7. Kapitel einige wichtige physikalische Anwendungen. Der Anhang enthält Tabellen und eine ausführliche Bibliographie.

G. Süßmann.

Kerner, Edward H.: Note on the forced and damped oscillator in quantum mechanics. *Canadian J. Phys.* **36**, 371—377 (1958).

Zunächst wird der Oszillator bei vorgegebener erregender Kraft behandelt, die in der Schrödingergleichung ein zeitabhängiges Potential liefert. Durch eine zeitabhängige Verschiebung der Lagekoordinate gewinnt die Gleichung die gewohnte Form für den kräftefreien Oszillator und kann so gelöst werden. — Weiter wird der gedämpfte Oszillator betrachtet. Eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft führt in der klassischen Mechanik zu exponentiellen Zeitfaktoren in der Hamiltonfunktion. Ohne daß die Quantentheorie zunächst ein Fundament dafür liefert, wird diese Hamiltonfunktion als Hamiltonoperator einer Schrödingergleichung gedeutet. Durch eine zeitabhängige Transformation auf neue „Lage-“ und „Impulskoordinaten“ erhält man eine Differentialgleichung, die formal einer Schrödingergleichung mit zeitabhängigem Potential entspricht und sich lösen läßt. Die gewonnenen Lösungen geben den Erwartungswerten für Lage und Energie die klassische Zeitabhängigkeit. Dabei verschwinden die Energie-Erwartungswerte mit wachsender Zeit exponentiell und können somit die Nullpunktsenergie des ungedämpften Oszillators unterschreiten. Dies ist mit der Tatsache verträglich, daß geschwindigkeitsproportionale Dämpfungen phänomenologisch nur bei Systemen auftreten, bei denen die Nullpunktsenergie noch keine Rolle spielt. — Nach den gleichen Methoden wird noch der Fall behandelt, daß Dämpfung und erregende Kraft gleichzeitig auftreten.

F. Schlögl.

Zel'dovič, Ja. B. (Zel'dovich, Ia. B.): Perturbation theory for the one dimensional quantum mechanical problem and the Lagrange method. *Soviet Phys., JETP* **4**, 942—944 (1957), Übersetz. von *Zurn. éksper. teor. Fiz.* **31**, 1101—1103 (1956).

Die radiale Schrödingergleichung für ein Teilchen in einem Zentralkraftfeld wird durch ein Näherungsverfahren gelöst, das auf der Lagrangeschen Methode der Variation der Konstanten beruht. Bei Aufteilung des Potentials in ein ungestörtes Potential und eine Strömung werden die im Nullpunkt reguläre und die im Nullpunkt irreguläre Lösung der ungestörten Schrödingergleichung als bekannt vorausgesetzt. Im Gegensatz zu der gewohnten Störungsrechnung wird die exakte Lösung hier nicht nach ungestörten Lösungen zu verschiedenen Energie-Eigenwerten entwickelt, sondern sie wird aus der regulären und irregulären Lösung zum gleichen Energiewert linear superponiert, wobei die Koeffizienten Funktionen des Radius r bleiben. Diese lassen sich im Prinzip durch eine Quadratur gewinnen. Der Energiewert zu den verwendeten ungestörten Lösungen wird im kontinuierlichen Teil des Spektrums gleich dem zur exakten Lösung. Bei diskreten Eigenwerten wird eine zunächst unbekannte Termverschiebung angesetzt, die sich dann iterativ berechnen läßt. Die Methode wird im Vergleich mit der gewohnten Störungsrechnung diskutiert.

F. Schlögl.

Abe, Ryuzo: On the many-body pseudopotential for a system of hard-spheres. *Progress theor. Phys.* **18**, 324—326 (1957).

By generalization of the Huang and Yang method (cf. this Zbl. **77**, 209) for describing many-particle systems a new pseudopotential is derived. It includes the boundary condition of the wave-function and, therefore, makes the mathematical problem for many hard spheres more easy. Calculations are approximately carried through up to fourth' order in the hard sphere diameter.

W. Klose.

Kiržnie (Kirzhnits), D. A.: Quantum corrections to the Thomas-Fermi equation. *Soviet Phys., JETP* **5**, 64—71 (1957), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **32**, 115—123 (1957).

Von den Hartree-Fockschen Gleichungen ausgehend gibt der Verf. eine Herleitung der statistischen Thomas-Fermischen und Thomas-Fermi-Diracschen Gleichungen. Die im Laufe dieser Herleitung vernachlässigten Glieder können zur Kor-

rektur der soeben erwähnten statistischen Modelle verwendet werden. Das Korrekturglied zweiter Ordnung ist das durch $1/9$ multiplizierte Weizsäckersche Inhomogenitätskorrekturglied. Was das Korrekturglied vierter Ordnung betrifft, so wird vom Autor gezeigt, daß dieses vernachlässigt werden kann. — Mit Hilfe des somit eingeführten statistischen Modelles wird nunmehr die Gesamtenergie der Atome berechnet, wobei der Fehler lediglich 6% beträgt, zum Unterschied von den erwähnten älteren Modellen, welche einen Fehler von 20%—30% aufzuweisen haben.

R. Gáspár.

Szépfalusy, P.: On a new exchange potential. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 7, 357—364 (1957).

Der Verf. weist auf den Grund der Verschiedenheit des Diracschen [Proc. Cambridge philos. Soc. 26, 376—385 (1930)] und des Fockschen [Z. Phys. 61, 126—148 (1930)] Austauschpotentials hin. Sodann gibt er unter Verallgemeinerung der Fockschen Methode die Herleitung eines komplizierteren aber allgemeineren Austauschpotentials. Die Rechnungen werden für den Fall der Coulombschen Wechselwirkung durchgeführt, obwohl die Methode auch die Behandlung eines allgemeineren Potentials ermöglichen würde.

R. Gáspár.

Martin, P. C. and R. J. Glauber: Relativistic theory of radiative orbital electron capture. Phys. Review, II. Ser. 109, 1307—1325 (1958).

Les AA. étudient d'une façon complètement en accord avec la mécanique ondulatoire relativiste l'intensité et la polarisation du rayonnement γ émis dans la capture par le noyau des électrons K . Les AA. introduisent et développent un nouveau mode de calcul des fonctions d'ondes coulombiennes de l'électron et des fonctions de Green correspondantes en partant des solutions d'une équation du second ordre déduite de l'équation de Dirac. L'élément de matrice correspondant à la capture radiative des électrons K est calculé au moyen de la fonction de Green et on en déduit l'intensité et la polarisation du rayonnement γ associé. L'importance des corrections de relativité est mise en évidence et l'effet d'écran des électrons atomiques dans les captures K et L est évalué. L'analyse des résultats expérimentaux montre un bon accord entre ceux-ci et les résultats théoriques obtenus.

G. Petiau.

Bincer, Adam M.: Scattering of longitudinally polarized fermions. Phys. Review, II. Ser. 107, 1434—1438 (1957).

Die Wirkungsquerschnitte für die Streuung von longitudinal polarisierten Diracpartikeln werden berechnet, wobei die Resultate in Termen von Φ_p/Φ_a dargestellt werden. Φ_p bedeutet den Wirkungsquerschnitt, wenn die Spins der Partikeln vor der Streuung parallel sind, Φ_a wenn sie antiparallel sind. Im Falle der Streuung von ununterscheidbaren Partikeln wird dieser Quotient für alle Energien und Streuwinkel von eins verschieden und kann als klein aufgefaßt werden. Für Partikel-Antipartikelstreuung wird der Quotient nahezu eins bei nichtrelativistischen Energien, nähert sich aber für relativistische Energien dem Wert bei ununterscheidbaren Partikeln. Diese Streuprozesse stellen eine Methode zur Messung der longitudinalen Polarisation dar. Auch der Fall der Streuung von zwei Partikeln verschiedener Masse wird untersucht und kann zu Polarisationsmessungen herangezogen werden.

P. Urban.

Ford, G. W. and C. J. Mullin: Scattering of polarized Dirac particles on electrons. Phys. Review, II. Ser. 108, 477—481 (1957); Errata. Ibid. 110, 1485 (1958).

Berechnet wird 1. der Wirkungsquerschnitt für die Streuung polarisierter (positiver oder negativer) Elektronen an Elektronen, 2. die Depolarisierung eines polarisierten Elektrons oder μ -Mesons bei der Streuung an einem unpolarisierten Elektron.

K. Baumann.

Capps, Richard H.: Form of scattering amplitude for two systems of arbitrary spins. Phys. Review, II. Ser. 109, 1823—1829 (1958).

L'A. établit une expression générale pour l'amplitude de diffusion de deux systèmes de spins quelconques et examine les restrictions imposées par l'invariance

par rapport aux retournements du temps ou de l'espace. Il examine plus particulièrement le cas de la diffusion en avant et en arrière et le cas de la diffusion d'une particule de masse nulle et de spin quelconque par un système de masse finie. *G. Petiau.*

Fradkin, É. E.: On the Rarita-Schwinger method in the theory of particles of half-integral spin. Soviet Phys., JETP 5, 1203—1205 (1957), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 32, 1479—1482 (1957).

L'A. montre que le lagrangien et l'équation d'ondes de P. A. Moldauer et K. M. Case (ce Zbl. 70, 219) ne sont valables que dans le cas des particules de spin $3/2$ et ne s'étendent pas aux cas de spin supérieur. De même la méthode de W. Rarita et J. Schwinger (ce Zbl. 26, 287) ne s'applique pas au cas des particules de spin $5/2$. *G. Petiau.*

Destouches, Jean-Louis: Le graviton et la gravitation en théorie fonctionnelle des corpuscules. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 1518—1520 (1957).

L'A. propose de compléter la théorie linéaire du corpuscule de spin 2 par des termes non linéaires non précisés introduits d'une façon additive. Les potentiels de gravitation $g_{(\mu\nu)}$ peuvent alors être rattachés aux fonctions d'ondes et permettent d'obtenir une théorie unitaire microscopique de la gravitation et de l'électromagnétisme non linéaire. *G. Petiau.*

Khuri, N. N.: Analyticity of the Schrödinger scattering amplitude and non-relativistic dispersion relations. Phys. Review, II. Ser. 107, 1148—1156 (1957).

Der Verf. gibt einen strengen Beweis, daß die gewöhnliche nichtrelativistische Streuamplitude für einen bestimmten Impulstransfer analytisch und beschränkt ist. Dabei benützt er die Fredholmsche Theorie der Integralgleichungen und verwendet die gewöhnliche Quantenmechanik sowie gewisse Bedingungen für die Potentiale. Diese Bedingungen werden explizit angenommen und die gebundenen Zustände in Strenge behandelt. Der Verf. zeigt, daß die Amplitude im Grenzfall großer Impulse verschwindet und leitet einfache Dispersionsrelationen ab. Zum Abschluß wird bewiesen, daß die Entwicklung nach Partialwellen im unphysikalischen Bereich konvergent ist, vorausgesetzt, daß die Potentiale die erwähnten Bedingungen erfüllen. *P. Urban.*

Feenberg, E. and P. Goldhammer: Further refinements on the Brillouin-Wigner perturbation procedure. Phys. Review, II. Ser. 105, 750—755 (1957).

Dans un article précédent (voir ce Zbl. 70, 221) les AA. ont indiqué une modification de la méthode de perturbation de Brillouin-Wigner. Les résultats obtenus peuvent être encore améliorés dans le cas où l'opérateur de perturbation est une combinaison linéaire de potentiels de types distincts. Dans ce cas les AA. calculent les corrections du premier ordre à apporter à l'énergie et à la fonction d'onde, d'une part quand la fonction d'onde décrivant l'état d'ordre zéro n'est pas dégénéré et d'autre part quand celui-ci est dégénéré. La méthode est appliquée à titre d'exemple au cas du deutéron. *G. Petiau.*

Wu, Tai Tsun: High energy potential scattering. Phys. Review, II. Ser. 108, 466—469 (1957).

Es wird das Problem der Potentialstreuung im Falle hoher Energien behandelt, wobei die Phasenverschiebungen durch das Potential als nicht zu klein angenommen werden. Dabei wird nur die Schrödinger-Gleichung zugrunde gelegt und eine sukzessive Approximation für den Grenzfall hoher Energien angegeben. Zuerst wird die Methode der stationären Phase auf die Integralgleichung angewendet, dann die hierdurch gewonnene Gleichung durch Iteration gelöst, um das asymptotische Verhalten des Feldes abzuleiten. Im besonderen erhält man einige Auskünfte über das Strahlungsfeld. *P. Urban.*

Fabre de la Ripelle, Michel: Amélioration de l'approximation de Born pour la diffusion par un puit de potentiel à symétrie sphérique. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1511—1513 (1958).

Die Bornsche Näherung zur quantenmechanischen Behandlung der Streuung eines Teilchens an einem Potential versagt, wenn die Phasenverschiebungen der Streuwelle klein bleiben. Deshalb wird hier für den Fall, daß das Streupotential kugelsymmetrisch und nicht allzu verschieden von einem Kastenpotential ist, eine Näherungsmethode zur Berechnung der Streuphasen entwickelt. Dabei werden die Lösungen der radialen Schrödingergleichung zu einem geeignet angepaßten, von Energie und Drehimpuls der Partialwelle abhängigen Kastenpotential als Ausgang einer Näherungsentwicklung gewählt, die im ersten Schritt durchgeführt wird.

F. Schlögl.

Hack, M. N.: Modified plane waves and rearrangement collisions. Phys. Review, II. Ser. 108, 1636—1641 (1957).

Der Verf. benutzt modifizierte ebene Wellen als Anfangs- oder Endzustandsbasisvektoren zur Berechnung der Übergangsamplituden für Streuprobleme in allgemeiner Weise. Dabei legt er zeitabhängige und zeitunabhängige Methoden zugrunde und gibt Ausdrücke der S -Matrix für Umordnungsstöße an. Ein Äquivalenztheorem gestattet es, die S -Matrix in verschiedenen Formen auszudrücken.

P. Urban.

Mitra, A. N. and R. P. Saxena: Meson-meson interaction in the Bethe-Salpeter approximation. Phys. Review, II. Ser. 108, 1083—1089 (1957).

Diese Arbeit behandelt nicht, wie man es dem Titel nach vermuten könnte, eine vierdimensionale, kovariante Bethe-Salpeter-Gleichung für die Meson-Meson-Streuung. Es wird dagegen aus dem ersten S -Matrixelement der Meson-Meson-Streuung (Nukleonenviereck) ein effektives, nichtlokales Potential abgeleitet, das die Meson-Meson-Wechselwirkung beschreiben soll. Dieses Potential wird dann in eine nichtrelativistische Schrödingergleichung eingesetzt. Die Verff. geben eine numerische Abschätzung der, aus dieser Gleichung resultierenden, S -Streuung an. Für totalen Isotopenspin $I = 2$ ergibt sich eine Resonanz für einen Schwerpunktsimpuls von $\sim 93 \text{ Me V/c}$, wenn die pseudoskalare Kopplungskonstante $G^2/4\pi = 15,5$ gesetzt wird. Dagegen gibt es im Falle $I = 0$ keine Resonanz, und dieser Umstand wird dadurch erklärt, daß die Wechselwirkung in diesem Zustande zu stark anziehend sei, um eine Resonanz zu ermöglichen.

G. Wanders.

Nardi, V.: On a method of covariant quantization. Nuovo Cimento, X. Ser. 8, 174—178 (1958).

Für Fermiteilchen in lokaler Wechselwirkung mit neutralen Skalarmesonen wird gezeigt, daß die Peierlsschen verallgemeinerten Poissonklammern (R. E. Peierls, dies. Zbl. 48, 446) zur kanonischen Quantisierung führen.

M. R. Schafroth.

Touschek, B.: The symmetry properties of Fermi Dirac fields. Nuovo Cimento, X. Ser. 8, 181—182 (1958).

Für ein System von n Majoranafeldern, die durch n reelle Feldoperatoren $\psi^a(x)$ mit jeweils 4 Komponenten beschrieben werden, lautet die allgemeinste kanonische Transformation:

$$\psi'(x) = \exp [A + i S \gamma_5] \psi(x).$$

wobei A eine antimetrische, S eine symmetrische $n \times n$ -Matrix ist. Im Falle $n = 2$ erhält man die Pauli-Pursey-Gruppe (W. Pauli, dies. Zbl. 77, 431). Ein Massenoperator $M = \psi \gamma_4 (1 + \varepsilon \gamma_5) X \psi$ — mit einer nichtsingulären $n \times n$ -Matrix X (ε : eine beliebige Zahl) — kann nur für $n > 2$ eingeführt werden. In diesem Fall gibt es nämlich Untergruppen, die M invariant lassen. Im Falle von zwei komplexen Spinorfeldern ($n = 4$) und $X^2 = 1$ sind dies zwei vertauschbare unitäre Transformationen in zwei Dimensionen. Physikalisch könnte man diesen beiden Gruppen die Erhaltung des Isospins und der Baryonenzahl zuordnen.

H. Rollnik.

Bogolubov, N. N., S. M. Bilenky and A. A. Logunov: Dispersion relations for weak interactions. Nuclear Phys. 5, 383—389 (1958).

In der Arbeit werden Dispersionsrelationen für Prozesse mit schwachen Wechselwirkungen

abgeleitet. Es wird gezeigt, daß bei Prozessen, an denen nicht nur schwach wechselwirkende, sondern auch stark wechselwirkende Teilchen beteiligt sind, die Dispersionsbeziehungen gleichbedeutend sind mit der Feststellung, daß die unbekannten Amplitudenfunktionen, welche durch starke Wechselwirkungen bestimmt werden, nur von der Impulsübertragung zwischen den stark wechselwirkenden Teilchen abhängen. (Zusammenfassung des Autors.) *K. Baumann.*

Aramaki, Seiya: On the cut-off theory in quantum field theory. *Progress theor. Phys.* **18**, 320—322 (1957).

Der Verf. untersucht mit Hilfe des Leeschen Modells die Konsistenz des Abschneideverfahrens von Gell-Mann und Low (vgl. dies. Zbl. **57**, 214). Die sogenannte Fortpflanzungsfunktion $S'_V(P_0)$ des V -Teilchens erfüllt ursprünglich im Modell die Gleichung

$$[P_0 - m_V - \Sigma(P_0) - \Sigma(m_V)] S'_V(P_0) = 1.$$

Nach der Einführung des oben erwähnten Abschneideverfahrens wird diese Gleichung zu

$$[P_0 - m_V - \Sigma(P_0) - \Sigma(m_V) + (P_0 - m_V)(\Sigma(\Lambda) - \Sigma(m_V)/(\Lambda - m_V))] S'_V(P_0) = 1$$

modifiziert. Damit die ursprüngliche Theorie im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ wieder erhalten wird, verlangt der Verf. die Bedingung $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Sigma(\Lambda) - \Sigma(m_V)}{\Lambda - m_V} = 0$ und zeigt mit Hilfe

der expliziten Lösung des Modells, daß diese Bedingung nicht erfüllt ist, wenigstens nicht, wenn die unrenormierte Kopplungskonstante im Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ festgehalten wird. Der entsprechende Grenzübergang, bei dem die renormierte Kopplungskonstante festgehalten wird, wird nicht diskutiert. Schließlich wird auch erwähnt, daß ähnliche Überlegungen in der Quantenelektrodynamik zu ähnlichen Schwierigkeiten führen.

G. Källén.

Galanin, A. G. and Ju. N. (Ju. N.) Lochov (Lokhov): Convergence of the perturbation-theory series for a non-relativistic nucleon. *Soviet Phys., JETP* **6**, 221—222 (1958), Übersetz. von *Žurn. éksp. teor. Fiz.* **33**, 285—286 (1957).

Friman, Alf: The third approximation of the eigenphase for the Yukawa potential. *Acta Acad. Aboensis, Math. Phys.* **21**, Nr. 4, 7 p. (1957).

Mit Hilfe einer früher von K. G. Fogel angegebenen Technik (dies. Zbl. **46**, 211) wird die dritte Näherung der Streuphase in einer Entwicklung nach der Kopplungskonstante für ein Yukawasches Potential ausgewertet. Das Ergebnis wird mit den Ergebnissen von L. Hulthén (s. dies. Zbl. **31**, 401) und mit der zweiten Näherung in derselben Entwicklung verglichen. (In seiner Arbeit hat Hulthén die Streuphase mit Hilfe eines Variationsprinzips berechnet). Es zeigt sich, daß die Ergebnisse des Verf. ein wenig besser als die der zweiten Näherung mit den Hulthénschen übereinstimmen.

G. Källén.

Kamefuchi, Susumu: A comment on Landau's method of integration in quantum electrodynamics. *Mat.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk.* **31**, Nr. 6, 12 p. (1957).

Es wird gezeigt, daß die Anwendung des Landauschen Näherungsverfahrens in der Quantenelektrodynamik zu einer Inkonsistenz führt. Die Fragestellung, die von Källén stammt, ist die folgende. Man versucht zuerst das asymptotische Verhalten des Kernes $\Pi_F(p)$, der im Ausdruck $D'_F(p)_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} D_F(p) + D_F(p) \Pi_F(p)_{\mu\nu} D_F(p)$ des Photonenpropagators $D'_F(p)_{\mu\nu}$ vorkommt, direkt abzuschätzen. Andererseits läßt sich $\Pi_F(p)$ aus dem Källénschen Kern

$$\Pi_K(p) = \frac{V}{-3 p^2} \sum_{p(z)=p} \langle 0 | \dot{j}_\nu | z \rangle \langle z | \dot{j}_\nu | 0 \rangle$$

ausrechnen; gelingt es nun, das asymptotische Verhalten von $\Pi_K(p)$ unabhängig abzuschätzen, so kann man daraus eine zweite asymptotische Form für $\Pi_F(p)$ ableiten, die mit der ersten konsistent sein sollte. Das Landausche Verfahren [siehe z. B. L. D. Landau, A. A. Abrikosov und I. M. Chalatnikov, *Doklady Akad. Nauk SSSR* **95**, 497—500, 773—776, 1177—1180; **96**, 261—264 (1954)] gibt die nötigen

Abschätzungen von $\Pi_F(p)$ und $\Pi_K(p)$, insofern man einen cut-off einführt. Das Verfahren besteht im wesentlichen darin, daß in der störungstheoretischen Entwicklung einer Größe jeder Term durch seine asymptotische Form ersetzt wird, und die asymptotische Form der Größe selbst gleich der Summe dieser Formen gesetzt wird. Landau hat mit dieser Methode die direkte Abschätzung von $\Pi_F(p)$ durchgeführt und Verf. untersucht $\Pi_K(p)$. Indem die Summe über Zwischenzustände, die in der Definition von $\Pi_K(p)$ vorkommt, nur über Zustände, die ausschließlich aus Photonen bestehen, erstreckt wird, erhält man eine untere Grenze für die asymptotische Form von $\Pi_K(p)$. Diese gibt eine untere Grenze für den Modulus von $\Pi_F(p)$, die viel größer als das Landausche Resultat ist. Daraus folgt die Alternative: entweder ist die Landausche Methode, die an sich fragwürdig ist, in der Quantenelektrodynamik nicht anwendbar, oder die Quantenelektrodynamik (mit cut-off!) selbst ist inkonsistent.

G. Wanders.

Tevikjan (Tevikian), R. V.: Two-electron green function in the Bloch-Nordsieck approximation. Soviet Phys., JETP 5, 1282—1284 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 32, 1573—1574 (1957).

Wie allgemein bekannt, gestattet die Methode von Bloch-Nordsieck die Wechselwirkung eines Elektrons mit langwelligen Photonen zu behandeln. Der Verf. betrachtet die Greensche Funktion für das Zweielektronenproblem in dieser Näherung und geht dabei von der Schwingerschen Gleichung aus. Die vorliegende Methode gestattet auch eine Verallgemeinerung der Greenschen Funktionen auf den Fall von 3 und mehr Elektronen, wenngleich natürlich das Verfahren dann recht kompliziert werden dürfte.

P. Urban.

Reyntjens, Jacques: Étude théorique de la création de paires dans le champ d'un électron. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 71, 189—203 (1957).

Der Wirkungsquerschnitt für Paarerzeugung im Feld eines Elektrons wird mittels der Methoden von Feynman und Dyson neu berechnet. Die Integration zum totalen Wirkungsquerschnitt wird für verschiedene Spezialfälle ausgeführt: 1. Die drei Teilchen sind sehr schnell, die Photonenergie ist sehr hoch. 2. Zwei der Teilchen sind sehr schnell, die Photonenergie ist sehr hoch. 3. Die Photonenergie ist nahe der Schwelle.

K. Baumann.

Harris, Isadore and Laurie M. Brown: Radiative corrections to pair annihilation. Phys. Review, II. Ser. 105, 1656—1661 (1957).

Die strahlungstheoretischen Korrekturen zum Wirkungsquerschnitt für Paarvernichtung werden ausgewertet. Als Anwendung ergibt sich eine Zunahme der Lebensdauer des Singulettzustandes von Positronium um 0,59%. *M. R. Schafroth.*

Böbel, G.: Polarization effects in bremsstrahlung. Nuovo Cimento, X. Ser. 6, 1241—1251 (1957).

Eine von Lipps und Tolhoek angegebene Methode zur Berechnung und Diskussion von Polarisierungseffekten — basierend auf der Beschreibung der Polarisierung durch Stokesche Parameter — wird auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt für Bremsstrahlung angewendet. Die Formeln von May und von Gluckstern, Hull und Breit (nur das Photon polarisiert) sowie die Bethe-Heitler-Formel (keine Polarisierung) ergeben sich als Spezialfälle. Die Emission zirkular polarisierter Photonen von Elektronen mit longitudinalem bzw. transversalem Spin wird diskutiert.

K. Baumann.

Bayet, Michel: Une démonstration „classique“ de la formule de ralentissement de Bethe dans le cas non-relativiste. J. Phys. Radium 18, 361 (1957).

Klassische Herleitung einer nichtrelativistischen Näherung zur Betheschen Bremsformel.

K. Baumann.

Sudakov, V. V. and K. A. Ter-Martirosjan (Ter-Martirosian): Consequences of renormalizability of pseudoscalar meson theory with two interaction constants.

Soviet Phys., JETP 4, 763—764 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 31, 899—901 (1956).

Aus den Funktionalgleichungen, die aus der Renormierbarkeit der pseudoskalaren Mesonentheorie mit zwei Wechselwirkungskonstanten folgen (D. V. Shirkov, dies. Zbl. 65, 439; V. V. Sudakov, dies. Zbl. 78, 204), werden asymptotische Formeln für die Meson-Meson-Streu-Amplitude abgeleitet, welche im Grenzfall $\lambda = 0$ mit den früher erhaltenen Formeln von Djatlov und Ter-Martirosjan (dies. Zbl. 72, 449) übereinstimmen. *M. E. Mayer.*

Hara, Osamu, Yasunori Fujii and Yoshio Ohnuki: An attempt at reformulating pion-nucleon interaction. I. Introduction of K -space. Progress theor. Phys. 19, 129—145 (1958).

An attempt is made at reformulating pion-nucleon interaction in such a form that the large annihilation cross section of antiproton or the recent experiments at Stanford could be understood better. For this purpose, a new space which we name K -space is introduced. In terms of K -space, charge conjugation can be expressed as a rotation through π around its second axis multiplied by a rotation through π around the second axis in the usual isotopic space. It is shown that if pion-nucleon interaction is assumed as invariant under rotations in K -space (it is already invariant under rotations in the usual isotopic space if we assume charge independence), it can not be local, especially the part responsible for the creation and the annihilation of nucleon pairs. Possibilities of checking this assumption experimentally are discussed, and among these the annihilation of antinucleon by nucleon is discussed in some detail. *Zusammenfassg. des Verfassers.*

Novožilov (Novozhilov), Ju. V. (Ju. V.): Reduction of the two-nucleon problem to a single-nucleon problem in the nonrelativistic range. Soviet Phys., JETP 5, 1030—1032 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 32, 1262—1264 (1957).

Betrachtet wird das Problem der Wechselwirkung zweier Nukleonen im statischen Modell, wo die Nukleonen durch feste Quellen beschrieben werden, die an das Mesonenfeld gekoppelt sind. Verf. schlägt ein Näherungsverfahren vor, in welchem Matrixelement beliebiger Operatoren zwischen Zuständen mit zwei Nukleonen durch Produkte von Matrixelementen zwischen Zuständen des Ein-Nukleon-Problems ausgedrückt werden. Es werden keine Anwendungen des Verfahrens angegeben.

G. Wanders.

Bell, J. S. and R. J. Blin-Stoyle: Mesonic effects in beta-decay. Nuclear Phys. 6, 87—99 (1958).

The authors consider whether there is at present any indication of mesonic effects in the beta decay of nuclei. They recall that, in the same way as the difference between the magnetic moments of H^3 and He^3 from those predicted by any reasonable picture, can be ascribed to meson exchange currents (i. e. the effective magnetic moment operator for these nuclei is not just a sum of single particle operators, but contains also two and three body terms), it can also be expected that similar „exchange“ terms will occur in the effective beta-decay interaction. If this be the case, the attempts which have been made to deduce this interaction from considerations of the lifetimes of various simple nuclei, will be invalidated, since they are based on the assumption that no exchange terms appear in the beta-decay Hamiltonian. In order to investigate this point, the authors make a critical survey of the relevant experimental data and of the discrepancies which seem to be implied and consider, first, possible explanations other than mesonic. The possible deficiencies are considered to be: a) the assumption of no Fierz interference; b) the approximate treatment of the lepton wave function; c) the neglect of relativistic effects of nucleon motion. Each of these points is discussed separately. None of them, when taken individually, seems capable of giving a consistent account of beta-decay, but the possibility cannot be excluded that, if they are suitably combined, the discrepancies might be accounted for, although this would require a most liberal interpretation of orders of magnitude and signs of the effects. Next, the possibility of substantial contributions from mesonic effects is investigated in general terms and, although no detailed application has yet been made, some general features are anticipated

and some cases are considered. From this analysis it is concluded that there is some evidence for mesonic effects of an exchange character: in particular it seems very difficult to give a consistent picture of mirror transitions involving nuclei with LS closed core plus or minus one particle in terms of conventional beta-decay theory and using shell model wave functions. In the two appendices the exchange contribution from Coulomb forces and the relativistic effect are calculated.

G. Martelli.

Behr, J. v.: Die Berechnung der Kern-Quadrupol-Streuung positiver Myonen im schwach relativistischen Energiebereich. Z. Phys. 150, 311—324 (1958).

Die große Empfindlichkeit der Streuverteilung positiv geladener Myonen im schwach relativistischen Energiebereich gegenüber Änderungen der Ladungsverteilung $\varrho(r)$ eines schweren Kerns beruht auf der starken Änderung des elektronenoptischen Brechungsindex $n^2 = 1 - (eV)/E$ mit der von $\varrho(r)$ herrührenden potentiellen Energie $eV(r)$ bei geeignet gewählter Gesamtenergie E . Unter der Voraussetzung, daß das zur kugelsymmetrischen Wechselwirkung hinzutretende Quadrupolpotential $2^{-1} eQW(r)P_2(\cos\vartheta)$ mit $\lim w(x) \rightarrow 1/r^3$ und $\vartheta =$ Winkel zwischen Kernachse und Radiusvektor als Störung betrachtet werden kann, wird die Diracsche Gleichung durch ein Näherungsverfahren gelöst, das dem Bornschen Näherungsverfahren nachgebildet ist. Dabei wird das zur kugelsymmetrischen Wechselwirkung gehörende Wellenfeld als Ausgangslösung benützt. Ein Vergleich der auf Grund der neuen Methode erhaltenen Streuverteilung mit der nach Marschall und Meyer berechneten Streuverteilung an schweren kugelsymmetrischen Kernen und mit der nach der üblichen Bornschen Methode berechneten bei der Myonenenergie von 27 MeV zeigt ein beträchtliches Anwachsen des Einflusses des Quadrupolmomentes auf die Streuverteilung mit wachsendem Streuwinkel. Die Bornsche Näherung erweist sich für das vorliegende Problem als gänzlich ungeeignet. *T. Seixl.*

Kurdgelaidze, D. F.: On the nonlinear generalization of the meson and spinor field equations. Soviet Phys., JETP 5, 941—946 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 32, 1156—1162 (1957).

L'A. étudie les solutions du type ondes planes pour divers types d'équations d'ondes non linéaires. D'une part il exprime au moyen de fonctions elliptiques les solutions ondes planes des équations de la forme

$$(1) \quad \square \varphi + F(\varphi) = 0$$

avec $F(\varphi) = k_0^2 \varphi + \alpha \varphi^2$ ou $F(\varphi) = k_0^2 \varphi + \beta \varphi^3$, d'autre part il donne une solution particulière de

$$(\gamma_\mu \partial/\partial x_\mu + a \bar{\psi} \psi) \psi = 0$$

et examine la réduction au premier ordre de l'équation (1).

G. Petiau.

Furuchi, S., S. Sawada and M. Yonezawa: The study of polarizations of secondary muons in K -meson decay processes. Nuovo Cimento, X. Ser. 6, 1416—1429 (1957).

Es wird untersucht, welche Schlüsse man auf die universelle Vierfermionenwechselwirkung ziehen kann, wenn man die Polarisierung der μ -Mesonen kennt, die bei Zerfall der K -Mesonen entstehen. Zur gleichen Zeit wurde eine ähnliche Diskussion von J. Werle (dies. Zbl. 77, 429) durchgeführt. Die Ergebnisse sind sehr unübersichtlich und schwer mit dem Experiment zu vergleichen. Qualitative Schlüsse: a) Beim Dreikörperzerfall ($K \rightarrow \pi + \mu + \nu$) sollte man die longitudinale Polarisierung von μ -Mesonen niedriger Energie untersuchen. b) Beim Zweikörperzerfall ($K \rightarrow \mu + \nu$) können Polarisationsmessungen zwischen Spin 0 oder 1 der K -Mesonen unterscheiden. Beim Spin 0 sind die μ -Mesonen bei Zweikomponententheorie der Neutrinos vollständig polarisiert. Im Falle von Spin 1 im allgemeinen nicht, und falls überdies die Invarianz gegen Zeitumkehr verletzt ist, ist die Polarisierung niemals vollständig.

H. Rollnik.

Werle, J.: Polarization of μ -mesons and electrons in K -meson decays: A correction. Nuclear Phys. 4, 693 (1957).

In einer früheren Veröffentlichung des Verf. (dies. Zbl. 77, 429) müssen zwei Korrekturen angebracht werden: Einmal beziehen sich die Rechnungen auf K -Mesonenzerfälle, bei denen zusammen mit den negativen μ -Mesonen (bzw. Elektronen) Zweikomponenten-Neutrinos und nicht Antineutrinos emittiert werden. Zum anderen ist die $C P$ -Invarianz falsch ausgewertet worden. Die richtigen Ergebnisse
H. Rollnik.

Naito, Kunio: On the theory of the unstable particle. II. Progress theor. Phys. 18, 614—620 (1957).

Der Verf. führt ein neues Modell ein, um das Problem eines zerfallenden Teilchens zu studieren. Das Modell enthält vier Arten von nicht-relativistischen Fermiteilchen N_1, N_2, N_3 und N_4 und drei Arten von Bosonen θ_1, θ_2 und θ_3 . Die Wechselwirkung wird so eingeführt, daß die Übergänge $N_2 \rightleftharpoons N_1 + \theta_1$, $N_2 \rightleftharpoons N_3 + \theta_2$ und $N_3 \rightleftharpoons N_4 + \theta_3$ erlaubt sind, während alle anderen Übergänge verboten sind. Dies Modell hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Verallgemeinerung des Leeschen Modells, das von Ruijgrok und Van Hove gemacht worden ist (dies. Zbl. 71, 429), aber unterscheidet sich davon u. a. dadurch, daß mehrere Arten von Bosonen eingeführt worden sind. Die Massen der Teilchen werden so gewählt, daß das N_3 -Teilchen instabil wird und in $N_4 + \theta_3$ zerfallen kann, während alle anderen Teilchen stabil sind. In diesem Modell wird das N_3 -Teilchen aus einem N_2 - und einem θ_2 -Teilchen erzeugt, weshalb die Zerfallsprodukte des Teilchens nicht mit den erzeugenden Teilchen identisch sind. Dies Verhalten erlaubt eine scharfe Unterscheidung der Erzeugung und des Zerfalls des N_3 -Teilchen und wird vom Verf. ausgenützt, um gewisse formale Interpretationsfragen der Theorie zu diskutieren. G. Källén.

Finkelstein, R.: Permutation symmetries of generalized beta interactions. Phys. Review, II. Ser. 109, 1842—1845 (1958).

Die Symmetrien der geraden Betakopplungen wurden von vielen Autoren diskutiert und Caianiello hat die entsprechenden Formeln für die ungeraden Kopplungen angegeben. Verf. dehnt diese Ergebnisse auf 8-reihige Spinoren aus in der Hoffnung, daß diese Erweiterung jetzt anläßlich der Nichterhaltung der Parität von Interesse sein könnte.
W. Kofink.

Kernphysik:

Wildermuth, K.: Kerneigenschaften und Zweikörperkräfte. II. Beziehungen zwischen Kerneigenschaften und Zweikörperkräften. Fortschr. Phys. 5, 469—516 (1957).

L'A. présente une vue d'ensemble de l'état actuel des recherches théoriques sur la représentation des interactions nucléaires notamment dans le cas du problème des deux corps. Il expose successivement le formalisme du spin isotopique appliqué aux particules nucléaires, le problème de la description de la saturation des forces nucléaires, la description des noyaux légers par le modèle en couche, le modèle collectif et ses applications, la théorie des forces nucléaires de Brueckner. G. Petiau.

Biedenbarn, L. C., J. M. Blatt and M. H. Kalos: Phenomenological neutron proton potentials. Nuclear Phys. 6, 359—403 (1958).

This paper presents in tabular form, and discusses some of the features of a number of phenomenological neutron-proton potentials all of which fit the low energy neutron-proton data in the triplet spin state. Special attention has been paid to the influence of different well shapes for the central and tensor forces, and to the effect of an infinite repulsive core.

Author's abstract.

Srinivasan, S. K.: A note on charge independence and nucleon-antinucleon interactions. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 47, 365—368 (1958).

Phillips, R. J. N.: On time-irreversible nucleon-nucleon scattering. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 8, 265—270 (1958).

The S -matrix for time-irreversible nucleon-nucleon scattering is parametrized by a simple extension of the phase-shift method. Zusammenfassg. des Autors.

Foley, H. M.: Nuclear moments of inertia. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 7, 244—245 (1958).

Es wird gezeigt, daß sich der vereinfachte von Skyrme angegebene Ausdruck für das Trägheitsmoment als eine Näherung für den entsprechenden Ausdruck nach dem Inglisschen Modell deuten läßt, welche auf der Approximation der verschiedenen Energienenner in der zweiten Näherung der Störungstheorie durch eine geeignete mittlere Anregungsenergie beruht. Da im Inglisschen Modell Übergänge innerhalb einer Schale sowie zwischen verschiedenen Schalen, also mit sehr unterschiedlichen Anregungsenergien vorkommen, erklärt sich der Umstand, daß die Skyrmesche Formel wesentlich andere Werte für die Trägheitsmomente liefert als die Inglissche.

H. Stolz.

Hayakawa, Satio and Toshio Marumori: A remark on the moments of inertia of rotating nuclei. *Progress theor. Phys.* 18, 396—404 (1957).

In Anlehnung an entsprechende Betrachtungen von Tomonaga und Tamura wird die quantenmechanische Beschreibung der kollektiven und individuellen Bewegung eines zweidimensionalen Systems von Teilchen gegeben. Durch Aussonderung der Rotationsenergie in kanonischer Form aus dem Gesamthamiltonoperator ergibt sich die Definition des Trägheitsmomentes des Systems. Dieses Trägheitsmoment entspricht wirbelfreier Strömung. Durch korrespondenzmäßige Definition einer Winkelgeschwindigkeit ergibt sich der Übergang zum Inglisschen Modell, mit dem Unterschied, daß hier die Rotation nicht phänomenologisch eingeführt sondern quantenmechanisch aus der Bewegung des Teilchensystems begründet wird. Wie beim Inglis-Modell führt die Coriolis-Kraft auf einen zusätzlichen Beitrag zum Trägheitsmoment, welcher sich durch geeignete Spezialisierungen auf die bereits von Villars und Lüders gewonnene Form bringen läßt.

H. Stolz.

Davydov, A. S. and G. F. Filippov: Moment of inertia of a system of interacting particles. *Soviet Phys., JETP* 5, 676—684 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 32, 826—836 (1957).

Es wird zunächst für ein System von drei Teilchen gleicher Masse ein „mitbewegtes“ Koordinatensystem eingeführt, dessen Orientierung im Raume in eindeutiger Weise die Lage des von den drei Teilchen aufgespannten Dreiecks charakterisiert. Die entsprechenden Eulerschen Winkel bilden die äußeren oder kollektiven Variablen des Systems. Zur vollständigen Beschreibung im Massenmittelpunktsystem sind drei weitere innere Variable erforderlich. Im Falle, daß das System axialsymmetrisch in bezug auf eine Achse des mitbewegten Koordinatensystems ist, läßt sich die Gesamtenergie in guter Näherung darstellen als Summe aus Rotationsenergie und Energie der inneren Bewegung und es kann ein Trägheitsmoment definiert werden. Die Methode wird verallgemeinert auf Systeme von N Teilchen und auf den Fall, daß im Dreiteilchensystem nur zwei Teilchen massengleich sind.

H. Stolz.

Gribov, V. N.: Excitation of rotational states in the interaction between neutrons and nuclei. *Soviet Phys., JETP* 5, 688—696 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 32, 842—851 (1957).

Es wird die Anregung von Rotationszuständen deformierter Kerne durch Neutronen mit Energien bis zu 1,5—2 MeV untersucht an Hand eines optischen Modells, welches die Wechselwirkung des Neutrons mit dem deformierten Kern durch ein axialsymmetrisches rotierendes komplexes Potential beschreibt. Der Anregungsquerschnitt des ersten Rotationsniveaus eines $g\ g$ -Kernes wird berechnet im Bereich 0,1—2,1 MeV.

H. Stolz.

Wildermuth, Karl und Hans Wittern: Kernhydrodynamik und Deutung der Energiebreite der Kern- γ -Resonanzen. Z. Naturforsch. 12a, 39—59 (1957).

Die Arbeit gründet sich auf die von W. Wild entwickelte hydrodynamische Beschreibung der Kernmaterie [S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1955, 371—452 (1956)]. Es wird angenommen, daß der Energieerwartungswert $\langle \Phi, H \Phi \rangle$, worin H den Hamiltonoperator und Φ eine Eigenfunktion des gegebenen Atomkerns bedeuten, durch die Dichten und Strömungsgeschwindigkeiten der einzelnen Nukleonensorten (Protonen und Neutronen mit je zwei möglichen Spinrichtungen) ausgedrückt werden kann. Φ ist als Determinante von Einteilchenwellenfunktionen angesetzt, die Einteilchenfunktionen sind ebene Wellen, versehen mit Korrekturfaktoren, welche die lokale Veränderlichkeit von Wellenzahl, Strömungsgeschwindigkeit und Dichte beschreiben. Für die durch die einfallende γ -Strahlung angeregte Schwingung der Protonengesamtheit gegen die Neutronengesamtheit wird die Strömungsgeschwindigkeit aus einem zeitabhängigen Potential $U = A(t) \cdot (2/L^3)^{1/2} \sin(\pi x/L)$ hergeleitet. L ist die Kantenlänge des als würfelförmig angenommenen Kerns, x die Richtung der elektrischen Feldstärke der γ -Strahlung. Dieser Ansatz legt die Einteilchenfunktionen fest. Die Energiebreite der γ -Resonanz wird dadurch erklärt, daß die Schwingung durch Stöße zwischen den einzelnen Nukleonen gedämpft werde. Diese führen die Energie der Schwingung allmählich in die Energie einer ungeordneten Bewegung der Nukleonen im Kern über. Die Energieunschärfe ΔE des Schwingungszustandes hängt nach der Heisenbergschen Unschärferelation mit der mittleren Lebensdauer des Zustandes, diese wiederum mit der Übergangswahrscheinlichkeit W des Schwingungszustandes in andere Zustände zusammen: $\Delta E = \hbar \cdot W$. Zur Berechnung von W hat man sich die Fourierzerlegung der Einteilchenwellenfunktionen und daraus eine Entwicklung von Φ nach antisymmetrischen Produkten von ebenen Wellen zu verschaffen und die Matrixelemente des Operators der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung zu berechnen. Für die Wechselwirkung wird der von Serber zur Erklärung der Neutron-Proton-Streuung vorgeschlagene Ansatz verwendet. Um zu numerischen Resultaten zu gelangen, sind zahlreiche Zusatzannahmen und Approximationen notwendig. Für einen Kern vom Atomgewicht 260 erhält man $\Delta E = 5,55$ MeV. Auch die Abhängigkeit vom Atomgewicht wird kurz diskutiert.

M. Kretzschmar.

Wild, Wolfgang: Dreifach-Winkelkorrelationen bei der Coulombanregung von Atomkernen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1957, 191—212 (1958).

Wenn bei Coulomb-Anregung nicht nur die Richtungen von einfallendem Teilchen und auslaufendem δ -Quant, sondern auch die Ausfallsrichtung des anregenden Teilchens gemessen werden, so läßt sich aus der Dreifach-Korrelation die Zuordnung des Spins auf die beteiligten Niveaus mit größerer Bestimmtheit durchführen als dies aus der Zweifach-Korrelation Einfallsrichtung- γ -Strahl möglich wäre. Der Formalismus der Coulomb-Anregung wird in vereinfachter Weise (keine retardierenden Anteile der Wechselwirkung, nichtrelativistische Näherung, unendlich schwerer Kern) bis zur allgemeinen Formulierung der Dreifach-Winkelkorrelation wiedergegeben. Anschließend wird die halbklassische Näherung mit Rutherford-Streuung des einfallenden (klassischen) Teilchens durchgeführt.

O. Hittmair.

Arima, Akito: Nuclear binding energies and low-lying energy levels in the $2s_{1/2}$ and $1d_{3/2}$ shells. Progress theor. Phys. 19, 421—450 (1958).

On the basis of the j - j coupling shell model, the nuclear energies in the $2s_{1/2}$ and $1d_{3/2}$ shells are given by linear combinations of the parameters expressing the nuclear and Coulomb interaction energies in two-nucleon states, the single nucleon energies in $2s_{1/2}$ and $1d_{3/2}$ shells and the Coulomb interaction energies of a single proton in $2s_{1/2}$ and $1d_{3/2}$ shells with the closed shells. The best values of these parameters are determined by a least squares fit to the experimental binding energy data. The mean deviations are very small, and this shows the adequacy of the shell model in the ground states of these nuclei. By using these values of parameters the excitation

energies are calculated, and it is shown that in some excited states configuration interactions seem to be important. The two-body force required to give the best fit with the interaction energies in two-nucleon states is discussed. Zusammenfassg. des Verff.

Bassompierre, A.: Le gradient de champ électrique dans la molécule d'acide cyanhydrique et la détermination du moment quadripolaire de N^{14} . Ann. de Physique, XIII. Sér. 2, 676—713 (1957).

Der Verf. behandelt in seiner Doktorarbeit die mit der Bestimmung des Quadrupolmomentes des Atomkerns N^{14} zusammenhängenden theoretischen Fragen. Aus der gemessenen Quadrupol-Kopplungskonstante läßt sich das Quadrupolmoment nur dann bestimmen, wenn der Wert der Feldstärke an der Stelle des Kernes bekannt ist. Dieser Wert läßt sich nun lediglich auf theoretischem Wege bestimmen. Der Verf. wählt das Molekül HCN, für dessen N^{14} -Kern die Kopplungskonstante durch Simon, Anderson und Gordy [Phys. Review 77, 77 (1950)] gleich $-4,58$ Megahertz ermittelt worden ist. Der Verf. bestimmt die Wellenfunktion des HCN-Moleküls mit der Methode der „self-consistent“ Molekülbahnen. Die verwendeten atomaren Einelektronenbahnen sind vom Slaterschen Typus. Die Berechnung von Ein-, Zwei- und Dreizentrenintegralen sowie die Reduktion mittels gruppentheoretischer Methoden der zur Bestimmung der Energie dienenden Säkulargleichungen werden eingehend erörtert. Die für „vertikale“ Ionisationsenergien gewonnenen Werte stimmen mit den experimentellen Werten gut überein. Der auf diese Weise berechnete Gradient des Feldes der Elektronen beträgt $-3,9076$, während der entsprechende Wert für die Kerne gleich $+1,1781$ ausfällt. Das mit Hilfe dieser Werte bestimmte Quadrupolmoment des Kernes N^{14} beträgt $+0,0071 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. Der Verf. unterzieht den von ihm berechneten Wert des Quadrupolmomentes auf Grund des Schalenmodells und des Rainwaterschen Modells der Kerne einer eingehenden Diskussion.

R. Gáspar.

Kawai, Mitsuji and Masayuki Nagasaki: Note on the collision matrix for the nuclear reactions. I. Progress theor. Phys. 19, 77—92 (1958).

Der Zusammenhang zwischen den formalen Theorien der Kernreaktionen von Wigner und Eisenbud einerseits und von Kapur und Peierls andererseits wird untersucht. Es wird nicht nur gezeigt, daß, wie zu erwarten, beide Formulierungen äquivalent sind, sondern daß darüber hinaus die Anwendung des von Wigner und Thomas vorgeschlagenen Verfahrens zur Berechnung der Streumatrix aus der R -Matrix auf eine Darstellung der Streumatrix durch eine Summe aus unendlich vielen Gliedern führt, deren jedes mit einem Glied der Summendarstellung für die Streumatrix in der Formulierung von Kapur und Peierls übereinstimmt.

H.-A. Weidenmüller.

Prosser jr., F. W.: and L. C. Biedenharn: Some properties of the shift and penetration factors in nuclear reactions. Phys. Review, II. Ser. 109, 413—417 (1958).

Es wird für den speziellen Fall des Coulombfeldes gezeigt, daß Shiftfaktor und Penetrationfaktor in der Wigner-Eisenbudschen Theorie der Kernreaktionen gewisse Monotonieeigenschaften in ihrer Abhängigkeit vom Kanalradius, der Energie, dem Bahndrehimpuls und der Kernladung aufweisen. Das gilt für Energien oberhalb und unterhalb der Schwelle. Insbesondere wird das Verhalten des Shiftfaktors in der Nähe der Schwelle diskutiert.

H.-A. Weidenmüller.

Hart, Robert W., Ernest P. Gray and William H. Guier: Energy dependence of cross sections near threshold: One neutral and two charged reaction products. Phys. Review, II. Ser. 108, 1512—1523 (1957).

Die Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte für die in Rede stehenden Reaktionen wird in der Nähe der Schwelle bestimmt. Die Methode ist eine Erweiterung einer vorausgegangenen Arbeit auf den Fall geladener Teilchen. Sie benutzt nur allgemeine Eigenschaften der Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für drei Teilchen, die außerhalb eines endlichen Gebietes gelten. Als Beispiele

werden Elektronenablösung von H^- durch Beschuß mit geladenen Teilchen und Kernreaktionen der Art $(m, p\ n)$ betrachtet.

H.-A. Weidenmüller.

Kikuchi, Ken: Deuteron production by nucleons bombarding atomic nuclei. Progress theor. Phys. **18**, 503—540 (1957).

Diese Prozesse werden in einer ausführlichen Untersuchung mit Hilfe des von U i aufgestellten Formalismus behandelt. Das Matrixelement für die Reaktion ist eine Summe aus zwei Termen, denen die über den Compoundkern und die direkt verlaufenden Prozesse entsprechen. Bei den ersteren gibt unter Umständen Nukleonenverdampfung mit anschließendem pickup-Prozeß einen wesentlich größeren Beitrag zur Deuteronenausbeute als die direkte Verdampfung von Deuteronen. — Im Matrixelement für die direkte Reaktion wird besonders der Einfluß der Coulombkräfte bei kleinen Energien untersucht. Es wird gezeigt, daß sie eine Abflachung des Butler-Maximums der Winkelverteilung sowie eine Verlagerung desselben zu größeren Winkeln bewirken. Indem die Wellenfunktion des aufgepickten Teilchens im Außenraum nach der Chew-Goldberger-Methode bestimmt wird, wird eine Aussage über die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts bei hohen Energien gemacht. Die Reaktion $(p, p\ n)$ wird kurz diskutiert, und es wird ein Vergleich zwischen Experiment und Theorie durchgeführt.

H.-A. Weidenmüller.

Sawicki, J. and W. Czyż: Note on the (γ, d) reactions: An addendum. Nuclear Phys. **4**, 695 (1957).

Eine vorausgegangene Arbeit der Autoren (dies. Zbl. **77**, 438) versuchte das große beobachtete Verhältnis der Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen (γ, d) und (γ, p) durch einen Zweistufenmechanismus zu erklären. Danach sollte der (γ, d) -Prozeß so erfolgen, daß das γ -Quant erst ein Nukleon in einen Zwischenzustand anregt und dieses dann einen Pickupprozeß auslöst. Für die Pickupreaktion wurde der gesamte Raum als Reaktionsvolumen zugelassen. Es ergab sich gegenüber den beobachteten Daten ein zu großer Wert für das in Rede stehende Verhältnis. In der vorliegenden Arbeit wird angenommen, daß die Pickupreaktion nur an der Oberfläche verläuft. Dadurch wird das Verhältnis stark reduziert und in qualitative Übereinstimmung mit den beobachteten Werten gebracht.

H.-A. Weidenmüller.

Sawicki, J.: Polarization of nucleons from the break-up of the deuteron in the electromagnetic field of a nucleus. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **5**, 283—289 (1957).

Die Polarisierung der Nukleonen durch die elektromagnetische Spaltung von Deuteronen im Feld eines Kerns (im Gegensatz zur Stripping-Reaktion und zum Oppenheimer-Philipps-Prozeß) wird in erster störungstheoretischer Näherung untersucht. Es werden elektrische und magnetische Dipolübergänge in Betracht gezogen. Die Wellenfunktionen des Grund- und des Endzustandes des Neutron-Proton-Systems sollen einer Schrödingergleichung mit spinabhängiger Zentralkraft der Reichweite Null genügen. Die Polarisierung kommt zustande durch Interferenz zwischen elektrischem und magnetischem Dipolübergang. Sie wird für Deuteronenergien von 100 MeV und für eine Apparatur, in der Neutronen und Protonen in Koinzidenz nachgewiesen werden, abgeschätzt. Es ergibt sich ein Wert von etwa 20%.

H.-A. Weidenmüller.

Rohrlich, F.: Coulomb corrections to Delbrück scattering. Phys. Review, II. Ser. **108**, 169—170 (1957).

Die Delbrückstreuung für ein Coulombpotential ist bisher nur in Bornscher Näherung und nur für Vorwärtsstreuung untersucht worden. Der Verf. berechnet nun die Coulomb-Korrekturen zur Streuamplitude durch Vergleich mit dem bekannten totalen Wirkungsquerschnitt für Paarerzeugung mit Hilfe der Dispersionsrelationen. Die Rechnung bezieht sich auf den Fall eines Blei-Targets. Es zeigt sich, daß die Abweichungen kleiner als erwartet sind. Im Energiebereich zwischen 1 und 3 MeV beträgt die Korrektur zur Streuamplitude nur wenige Prozent, während bei der Ab-

sorption gerade dort die größten Abweichungen auftreten, wo sie gegenüber der Streuung zu vernachlässigen ist.

P. Urban.

Prange, R. E. and R. H. Pratt: Applications of a high-energy Coulomb wave function. Phys. Review, II. Ser. 108, 139—143 (1957).

Es wird gezeigt, daß die angenäherten Coulombwellenfunktionen zur Berechnung von hochenergetischen Streuprozessen geeignet sind, falls man sich auf kleine Winkel beschränkt. Außerdem wird eine Berechnung des photoelektrischen Effektes mit diesen Funktionen durchgeführt und gezeigt, daß die Resultate in sehr übersichtlicher Form angegeben werden können. Im Falle der Bremsstrahlung und H -Produktion sind die Ergebnisse den gewöhnlich angegebenen nicht gleichwertig, aber trotzdem sehr verwendbar. Auch die Coulombstreuung kann ermittelt werden, allerdings unter Verwendung gewisser Vorsicht.

P. Urban.

Gribov, V. N.: Angular distribution in reactions involving the formation of three low energy particles, with application to τ^+ meson decay. Nuclear Phys. 5, 653—668 (1958).

Die Winkelverteilung von Reaktionen, bei denen 3 leichte Teilchen niedriger Energie als Endprodukt erscheinen, wird nach der Methode der Reihenentwicklung nach Drehimpulseigenfunktionen behandelt. Für den Fall, daß keine Resonanzwechselwirkung zwischen den Teilchen im Endzustand vorhanden ist, kann die Winkelverteilung auf die Bestimmung der Streuamplituden je zweier Teilchen zurückgeführt werden. So kann aus der Winkelverteilung der Zerfallsprodukte in den beiden Reaktionen $\tau^+ \rightarrow 2\pi^+ + \pi^-$; $\tau^+ \rightarrow 2\pi^0 + \pi^-$ zwar prinzipiell die Streuamplitude für die Streuung von Mesonen an Mesonen bestimmt werden, doch reichen die experimentellen Daten für die tatsächliche Berechnung noch nicht aus.

Th. Seel.

Solntseff, N.: On the theory of scattering measurements in nuclear emulsion. I. The distribution functions of the coordinate differences. Nuclear Phys. 4, 337—362 (1957).

In der Kernphysik beruhen gewisse Methoden der Identifikation von Korpuskeln auf der mehrfachen Streuung derselben auf den Körnern einer Fotoemulsion. Der „track“ eines Korpuskels in einer solchen Emulsion sei in Zellen von gleicher Länge zerlegt (sie werden von 0 an numeriert); y_j bedeute die Ordinate des „track“ beim Anfang der j -ten Zelle (diese wird durch ein Meßmikroskop abgelesen). Es wurde gezeigt [siehe z. B. P. H. Fowler, Philos. Mag., VII. Ser. 41, 169 (1950)], daß die Streuung bei der i -ten Zelle durch die höhere Differenz $x_i = \sum_{j=i-1}^{i=1+\tau} c_{ij} y_j$ ($r = 2, 3, \dots$) charakterisiert werden kann (die c_{ij} sind die Konstanten der benutzten Differenzenformel). — In diesem I. Teil der Arbeit werden die y_j als Zufallsveränderliche von der Form $y_j = y_{sj} + y_{ej} + y_{dj}$ aufgefaßt, wobei die Komponente y_{sj} dem Effekt der sog. „wahren Streuung“, y_{ej} dem Fehler, welcher bei der Messung von y_j durch die Granulation der Emulsion, durch die subjektive Ablesungskorrektur des Beobachters, sowie auch durch die seitwärtigen Verschiebungen des bewegten Meßmikroskops insgesamt verursacht wird, entspricht; y_{dj} entspricht dem Fehler, welchen die Scherung der Emulsion, die Krümmung der Bahn des Mikroskops und die thermische Ausdehnung der Teile desselben verursachen. Dementsprechend wird auch x_i als $x_{si} + x_{ei} + x_{di}$ aufgefaßt. Zuerst wird $y_{sj} = y_{dj} = 0$ angenommen: die $y_j = y_{sj}$ seien normalverteilte Zufallsveränderliche, $E(y_j) = 0$. Auf dessen Grund werden die Korrelationskoeffizienten $E(x_{ei} x_{ek})/E(x_{ek}^2)$ berechnet. Verf. gibt auch für den Fall $y_j = y_{sj}$ ($y_{ej} = y_{dj} = 0$) die Korrelationskoeffizienten $E(x_{si} x_{sk})/E(x_{sk}^2)$ an, angenommen, daß die x_i durch Differenzen 2, 3, 4-ter Ordnung dargestellt wurden. — Im folgenden werden die Dichtefunktionen des Vektors (x_{e1}, x_{e2}, \dots) ($x_{si} = x_{di} = 0$) sowie auch diejenige von (x_{s1}, x_{s2}, \dots) ($x_{ei} = x_{di} = 0$) abgeleitet. Dazu werden gewisse Resultate der Theorie der atomaren Zusammen-

stöße benutzt. Ferner zeigt Verf., daß die Dichtefunktionen der x_{si} und diejenige von (x_{s1}, x_{s2}, \dots) welche schon früher u. a. von G. Molière (s. dies. Zbl. 41. 576) berechnet wurden, durch die normale Dichtefunktion gut approximiert werden können, auf Grund dessen auch Momente usw. ausgewertet werden. Zuletzt wird die Dichtefunktion des Vektors $(x_{s1} + x_{e1}, x_{s2} + x_{e2}, \dots)$ und eine Approximation für diejenige von $x_{si} + x_{ei}$ berechnet. — Die Resultate werden im allgemeinen als Weiterführungen derselben von G. Molière vorgestellt; Verf. erhält daraus auch Schlußfolgerungen für die Genauigkeit der betreffenden Messungen. Gewisse Konstante, welche die Streuung charakterisieren, können aus den Formeln des Verf. berechnet werden; sie stehen in besserer Übereinstimmung mit den experimentellen Werten, als diejenige, die bisher von verschiedenen Verff. mitgeteilt wurden.

P. Medgyessy.

Achiezer (Akhiezer), A. I. and A. G. Sitenko: Diffraction scattering of fast deuterons by nuclei. Soviet Phys., JETP 5, 652—660 (1957), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 32, 794—805 (1957).

Die Verff. veröffentlichten dieselbe Arbeit in Phys. Review, II. Ser. 106, 1236—1246 (1957); (dies. Zbl. 78, 217).

O. Hiltmair.

Nosov, V. G.: α -decay fine structure of even-even nuclei. Soviet Phys., Doklady 2, 48—53 (1957), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 414—417 (1957).

Für ein System, bestehend aus einem α -Teilchen und einem deformierten g - g -Kern, wird die Schrödingergleichung angegeben und für den Spezialfall, daß der Gesamtdrehimpuls null ist mit einer Art W - K - B -Methode näherungsweise gelöst. Die dabei auftretenden Größen werden zusätzlich nach Potenzen der Kerndeformation entwickelt. Die Ergebnisse unterscheiden sich etwas von denen, die man mit der adiabatischen Näherung erhält.

H. J. Mang.

Kahana, S. and D. L. Pursey: Coupling constant invariants in β -decay. Nuovo Cimento, X. Ser. 6, 1469—1479 (1957).

Das Pauli-Purseysche Prinzip wird in erweiterter Form („Der Mittelwert, über Anfangs- und Endzustände, eines S -Matrix-Elements für einen beliebigen Prozeß ist gegenüber jeder unitären Transformation invariant, die die Anfangs- und Endzustände invariant läßt“) auf β -Zerfall mit Nichterhaltung der Leptonenzahl, oder nichtverschwindender Neutrinomasse angewandt. Dabei werden Identitäten zwischen den Paulischen Invarianten aufgestellt und Bedingungen für Invarianz gegenüber P , T , C angegeben.

M. E. Mayer.

Mau, Vinh: Constantes de couplage de l'interaction β et polarisation des électrons émis. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 713—716 (1958).

En postulant la seule hypothèse que la polarisation des particules β^\pm est $\pm v/c$ quel que soit le type de transitions, nous montrons certaines relations simples entre les constantes de couplage de l'hamiltonien d'interaction β le plus général. Admettant la conservation des leptons, nous retrouvons la théorie proposée par Nataf.

Zusammenfsg. des Autors.

Srivastav, R. P.: Die hochangeregten Zustände und β -Übergänge einiger mittel-leichter Kerne. Z. Naturforsch. 12a, 679—693 (1957).

Im Rahmen des Schalenmodells werden die angeregten Zustände der Kerne O^{16} , N^{16} , F^{16} , die dem Übergang eines Nukleons aus der 2. Schale ($p_{3/2}$, $p_{1/2}$) in die 3. Schale ($d_{5/2}$, $d_{3/2}$, $s_{1/2}$) entsprechen, berechnet. Als Wechselwirkungspotential wird eine Überlagerung von gewöhnlichen Austauschpotentialen (Wigner-, Heisenberg-, Bartlett-, Majorana-Potentiale) und einer Zweikörper-Spin-Bahn-Kopplung nach Gauß angesetzt. Die Kerneigenfunktionen sind Linearkombinationen von Slaterdeterminanten, gebildet aus Oszillator-Wellenfunktionen für die Nukleonen. Ein Teil der Mischungskoeffizienten wird durch die Erhaltungssätze für Spin und Isotopenspin festgelegt, der Rest mit Hilfe des Energievariationsverfahrens. Mit den so gewonnenen Zustandsfunktionen werden auch einige Fälle erlaubter β -Über-

gänge berechnet: $O^{15}(\beta^+) N^{15}$, $N^{16}(\beta^-) O^{16}$, $F^{17}(\beta^+) O^{17}$, $F^{18}(\beta^+) O^{18}$. Die Übereinstimmung mit dem Experiment liegt im Bereich von etwa 10%. *D. Emendörfer.*

Guier, William H. and Robert W. Hart: Energy dependence of cross sections near threshold: Neutral particles. Phys. Review, II. Ser. **106**, 296—299 (1957).

Die Verf. leiten für Kernreaktoren, bei denen neutrale Teilchen emittiert werden, die Abhängigkeit des Reaktionsquerschnittes von der Überschußenergie (über die Reaktionsschwelle) ab. In Analogie zur Methode von Wigner wird eine asymptotische Lösung der Schrödingergleichung verwendet, doch ist die Anwendung auf das Mehrkörperproblem einfacher. Im speziellen werden eine Reaktion mit Emission von zwei gleichartigen neutralen Teilchen mit beliebigem Drall und von einer beliebigen Anzahl von gleichartigen Partikeln mit verschwindendem Drall behandelt. *F. Cap.*

Davidson, B.: Spherical-harmonics method for neutron transport theory problems with incomplete symmetry. Canadian J. Phys. **36**, 462—475 (1958).

Die Arbeit ist der Anwendung der Methode der Kugelfunktionen auf Neutronen-Transportprobleme gewidmet, bei welchen die geometrischen Verhältnisse sphärische oder zylindrische Symmetrie besitzen, während die Quellverteilung oder die Randbedingungen solche Symmetrie entbehren. In diesem Falle ergeben sich allgemein partielle Differentialgleichungen. Es wird gezeigt, daß es in speziellen Fällen möglich ist, diese zu vermeiden und die Lösung durch Bessel-Funktionen auszudrücken in ähnlicher Weise wie bei Problemen mit vollständiger Symmetrie. *H. Stolz.*

Gužavin (Guzhavin), V. V. and I. P. Ivanenko: The angular and lateral distribution functions of particles in a cascade shower maximum. Soviet Phys., Doklady **2**, 131—134 (1958), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR **113**, 533—536 (1957).

Überlegungen über mögliche Methoden der Berechnung der lateralen Verteilung von Teilchen in Kaskadenschauern werden ausgeführt. *L. Janossy.*

Mitra, A. N.: The fluctuation problem in μ -meson bursts. Nuclear Phys. **3**, 262—272 (1957).

Die Schwankung der durch μ -Mesonen ausgelösten Ionisationsschauer berechnet der Verf. unter der Voraussetzung, daß das Schwankungsgesetz einer Polya-Verteilung folgt. Es wird auf die großen Effekte hingewiesen, die diese Schwankungen hervorrufen, diese Schwankungseffekte lassen frühere Schlußfolgerungen über den Spin des μ -Mesons unsicher erscheinen. *L. Janossy.*

Gupta, M. R.: Analysis of bursts produced by mesons. Nuovo Cimento, X. Ser. **7**, 39—52 (1958).

The contribution made by fast μ and π^0 mesons to the frequency of bursts produced under a thick shield of material are calculated separately. Although the contribution to large bursts (containing more than about 100 particles) from knock-on electrons produced by μ mesons is negligible, the μ -mesons may radiate high energy photons in the field of the atomic nucleus. The contribution of these events to the total rate of bursts is calculated, after averaging over the differential energy spectrum of the μ mesons, by using recent results of the soft cascade shower theory. The contribution of knock-on electrons to small bursts is also obtained. Because of the lack of direct observational data, the contribution of high energy γ -quanta from π^0 mesons cannot be averaged over an experimental differential spectrum. In order to overcome this difficulty and to obtain the differential energy spectrum at different heights above sea level, the author makes use of the spectrum of the primary cosmic ray component and of the results of the nucleonic cascade based on the hypothesis of plural production of mesons. The theoretical results obtained in this way have been compared with the observational data given by various authors. Satisfactory agreement between theoretical and observational results are found for high altitude, sea level and also underground data, using Poisson's distribution for the fluctuations and

taking $\bar{N}(E = 2 m c^2, t)$ as the average number of particles in a shower. Further it is seen that the bursts calculations made with the above modifications unambiguously favour the one-half spin theory of the μ meson. The effects of taking $N(E = 0, t)$ for the average number of particles in a shower or of using a Furry distribution for the fluctuations have also been estimated. *G. Martelli.*

Jánosy, L.: On the determination of the energy of a particle from its track in an emulsion. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* 7, 385—401 u. russ. Zusammenfassg. 401 (1957).

Mathematisch gesehen werden die einmal integrierten Funktionen Y des Wiener'schen Prozesses X behandelt und der unbekannte Parameter nach dem Verfahren der Maximum-Likelyhood-Methode aus den beobachteten zweiten Differenzen der Werte Y an äquidistanten Stellen geschätzt. Für die benützte und durch Rekursionsformeln dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichte der zweiten Differenzen werden mehrere Näherungsformeln aufgestellt und die Genauigkeit der entsprechenden Schätzfunktionen (gemessen an deren Streuung) verglichen. Die praktische Anregung und Bedeutung dieser Fragestellung liegt u. a. in der Bestimmung von Ablenkungskoeffizienten (scattering factors) von Partikeln in ablenkenden Stoffen.

D. Morgenstern.

Bau der Materie:

Hartree, D. R.: Representation of the exchange terms in Fock's equations by a quasi-potential. *Phys. Review, II. Ser.* 109, 840—841 (1958).

Der Verf. gibt den Fock'schen Gleichungen die Gestalt von Einteilchen-Schrödinger-Gleichungen, wobei die potentielle Energie in zwei Teile zerlegt wird. Der erste Teil ist die totale potentielle Energie des Atoms bzw. des Ions, welche nur von dem Kernabstand abhängig ist, der zweite Teil hingegen ist die Quasiaustauschenergie, welche als Summe der Austauschenergie und der Selbstenergie des betreffenden Elektrons entsteht. Der Autor vergleicht diese letztere mit dem statistischen Austauschpotential von Slater und mit einem von Slater vorgeschlagenen durchschnittlichen Austauschpotential. Die numerischen Resultate beziehen sich auf das Cu^+ -Ion. Den getroffenen Vereinbarungen gemäß kann die Quasiaustauschenergie auch an derselben Stelle für die Elektronen mit differierenden Quantenzahlen sehr verschieden sein, so daß ihre Darstellung durch ein universelles Potential nur eine recht grobe Berücksichtigung der Austauschenergie bedeutet. *R. Gáspár.*

Araki, Gentaro: Excited states of helium. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* 30, Nr. 25, 158—164 (1958).

Numerische Berechnung der $1P$ - und $3P$ -Zustände des Heliums. *W. Klose.*

Ožkur (Ochkur), V. I.: Collisions of slow electrons with hydrogen atoms. *Vestnik Leningradsk. Univ.* 13, Nr. 4 (Ser. Fiz. Chim. 1) 53—68, engl. Zusammenfassg. 68 (1958) [Russisch].

The excitation of the hydrogen atoms by slow electrons is considered. The equations, describing the excitation are obtained from the variational principle and are solved numerically for the excitations to $2s$, $2p$, $3s$, $3p$, $3d$, $4s$ and $4f$ states for the energy range from 13,5 to 65 eV. The results show that for this energy range the shape of the excitation function may differ appreciably from the usual one. This must be attributed to the influence of exchange terms taken into account in the equations. S -phases for the elastic scattering on the atom in the ground state and the excited states have been calculated. It is shown that for the calculation of the elastic scattering the higher the excitation of the state considered the smaller is the role of the exchange terms. *Engl. Zusammenfassg.*

Čžan Li (Chang Lee): Annihilation of free positrons on helium atom and hydrogen molecule. *Vestnik Leningradsk. Univ.* 13, Nr. 4 (Ser. Fiz. Chim. 1) 160—167, engl. Zusammenfassg. 167 (1958) [Russisch].

Lifetime of free positrons and angular correlation of emitted photons have been calculated in the following cases: for helium atom using plane wave positron function, positron wave function in the averaged field of the unpolarized atom, and positron wave function in the averaged field of the polarized atom; for hydrogen molecule, using plane wave positron function.

Engl. Zusammenfassg.

Firsov, O. B.: Interaction energy of atoms for small nuclear separations. Soviet Phys., JETP 5, 1192—1196 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 32, 1464—1469 (1957).

Man kann die Thomas-Fermische Gleichung des statistischen Atommodells aus dem Prinzip des Energieminimums herleiten, in welchem die Elektronendichte als die zu variierende Funktion auftritt. Der Verf. stellt ein Extremalprinzip auf, in welchem die zu variierende Funktion mit dem Potential der Elektronen zusammenhängt. Die auf Grund der beiden Prinzipien erzielten Resultate stimmen an den Stellen der Extremalwerte überein. Gelingt es nicht, die Stelle der exakten Extremalwerte zu erreichen, so werden sich verschiedene Resultate ergeben, da aber diese den exakten Wert von verschiedener Seite approximieren, kann die Abweichung als Maß der Güte der Approximation dienen. Die Methode wird an dem Beispiel zweier einander überlappender Atome illustriert.

R. Gáspár.

Dalgarno, A. and R. McCarroll: Adiabatic coupling between nuclear and electronic motion in molecules. II. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 239, 413—419 (1957).

Die Verff. zeigten in einem ersten Teil zu dieser Arbeit [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 237, 383—394 (1956)], daß bei Betrachtung der Kernbewegung im zweiatomigen Molekül die adiabatische Kopplung zwischen Elektronen- und Kernbewegung im allgemeinen vernachlässigbar ist, wenn das Molekül bei adiabatischer Trennung in zwei Atome in S -Zuständen übergeht. Hier wird die adiabatische Kopplung behandelt, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Speziell wird der ungerade $2p\pi$ -Zustand des H_2^- betrachtet. Der Kopplungsanteil in der Wechselwirkungsenergie wird berechnet. Mit wachsendem Kernabstand R bleibt asymptotisch eine Wechselwirkungsenergie proportional R^{-2} . Die mögliche prüfbare Auswirkung auf Streuexperimente neutraler Atome bei kleinen Winkeln, sowie auf den zweiten Virialkoeffizient werden diskutiert.

F. Schlögl.

Schirmer, H. und J. Friedrich: Die elektrische Leitfähigkeit eines Plasmas. I. Z. Phys. 151, 174—186 (1958).

Die eindimensionale Form der Boltzmann-Gleichung für ein stationäres Plasma wird mit Hilfe einer Entwicklung nach Sonineschen Polynomen vollständig gelöst. Aus dieser Lösung läßt sich für den Fall eines schwachen elektrischen Feldes die elektrische Leitfähigkeit berechnen, wobei die Glieder der Elektronenwechselwirkung bis zur 4. Näherung mitberücksichtigt werden. Die Untersuchungen erstrecken sich auch auf Gase beliebigen Ionisierungsgrades und führen zu Integralausdrücken, die anschaulich als Querschnitte der Atome und Ionen gedeutet werden können.

K. G. Müller.

Gold, Louis: Plasma approach to metallic conduction. Nature 181, 1316—1317 (1958).

In a very simple manner an approach to metallic conduction including the transition to superconductivity is tried on the basis of a plasma-theory similar that of true gases. The influence of the lattice is neglected here.

W. Klose.

Margenau, Henry: Conductivity of plasmas to microwaves. Phys. Review. II. Ser. 109, 6—9 (1958).

Die Leitfähigkeit eines neutralen Plasmas bei Mikrowellen wird unter der Voraussetzung ermittelt, daß sich die Verteilung der Elektronen im Phasenraum während der Dauer von vielen Perioden der Mikrowelle nicht ändert. Unter dieser Bedingung erweist sich die Leitfähigkeit als eine Funktion der Elektronendichte, der Frequenz der Mikrowellen, des isotropen Anteiles der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Elektronen und der Stoßfrequenz. Für einige spezielle Verteilungsfunktionen (Diracfunktion, Sprungfunktion, Maxwellverteilung) und verschiedene Beschreibungen der Stoßfrequenz als Funktion der Elektronengeschwindigkeit wird die komplexe Leitfähigkeit berechnet. Die sich ergebenden Integrale können nach der Sattelpunktmethode ausgewertet werden.

K. G. Müller.

Šafranov (Šhafranov), V. D.: The structure of shock waves in a plasma. Soviet Phys., JETP 5, 1183—1188 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 32, 1453 (1957).

Unter Berücksichtigung des Einflusses von unterschiedlichen Ionen- und Elektronentemperaturen wird die Struktur von Stoßwellen untersucht. Folgende Fälle werden diskutiert: a) eine nichtstationäre Stoßwelle ohne Energieaustausch zwischen Ionen und Elektronen, b) eine stationäre Stoßwelle, c) eine stationäre Stoßwelle in einem starken Magnetfeld, dessen Richtung parallel zu der Stoßwellenfront verläuft. Die Fälle a) und b) zeigen vor dem üblichen Dichtesprung in der Front der Stoßwelle ein Gebiet, in dem die Elektronentemperatur stetig auf den hohen Wert hinter der Stoßfront ansteigt. Hinter der Stoßfront existiert ein ausgedehntes Gebiet, in dem sich Ionen- und Elektronentemperatur angleichen. In einem Magnetfeld (c) wird die Wärmeleitfähigkeit der Elektronen wesentlich herabgesetzt, und das aufgeheizte Gebiet vor der Stoßfront fehlt. Nur das Gebiet der Temperaturangleichung hinter der Stoßfront ist vorhanden. *K. G. Müller.*

Bernstein, Ira B.: Waves in a plasma in a magnetic field. Phys. Review, II. Ser. 109, 10—21 (1958).

Die Schwingungen kleiner Amplitude eines völlig ionisierten, quasineutralen Plasmas in einem äußeren Magnetfeld werden untersucht. Die linearisierte Boltzmann-Gleichung für kleine Abweichungen von der Gleichgewichtsverteilung wird unter Vernachlässigung des Stoßterms mit Hilfe einer Fouriertransformation der räumlichen Koordinaten und einer Laplace-Transformation der Zeitvariablen ausgewertet. Das Problem läßt sich mit den Maxwell'schen Gleichungen, den Bewegungsgleichungen der Ionen und der Lösung der Boltzmann-Gleichung beschreiben. Verschiedene Grenzfälle können diskutiert werden. Die Entstehung von selbstangeregten Schwingungen um die thermische Gleichgewichtsverteilung erweist sich als unmöglich. Bei longitudinalen Elektronenschwingungen, die sich senkrecht zum Magnetfeld ausbreiten, zeigen sich Lücken im Spektrum der erlaubten Frequenzen bei ganzzahligen Vielfachen der Zyklotronfrequenz der Elektronen. Für diese Elektronenschwingungen errechnet sich im Grenzfall verschwindenden Magnetfelds ein anomales Verhalten, dem aber keine physikalische Bedeutung zukommt. Unter Berücksichtigung der Ionenbewegung werden zwei Arten von niederfrequenten Schwingungen — die longitudinale Ionenschwingung und die transversale hydromagnetische Schwingung — gefunden, deren Existenz durch die Hydrodynamik vorausgesagt wird. Ebenso lassen sich die bekannten Ergebnisse über die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in einem ionisierten Medium herleiten. Die Rechnung begründet die Anwendbarkeit der Transportgleichung zur Beschreibung einer umfassenden Gruppe von Schwingungen in einem stoßfreien Plasma. *K. G. Müller.*

Rosenbluth, M. N. and A. N. Kaufman: Plasma diffusion in a magnetic field. Phys. Review, II. Ser. 109, 1—5 (1958).

Aus der Boltzmann-Gleichung wird ein Gleichungssystem für die Plasmadiffusion im Magnetfeld abgeleitet. Die Untersuchungen berücksichtigen auch den Einfluß eines Temperaturgradienten, der in der Richtung des Dichtegradienten und damit senkrecht zum Magnetfeld verläuft. Es wird vorausgesetzt, daß sich die makroskopischen Größen im Bereich einer kreisförmigen Ionenbahn nur wenig ändern, und daß die Stoßfrequenz wesentlich kleiner ist als die Zyklotronfrequenz. Unter dieser Annahme können die Transportkoeffizienten — der spezifische elektrische Widerstand, die Wärmeleitfähigkeit und der thermoelektrische Koeffizient — abgeleitet werden. Einige spezielle Lösungen werden maschinell ausgewertet.

K. G. Müller.

Redhead, P. A.: The Townsend discharge in a coaxial diode with axial magnetic field. Canadian J. Phys. 36, 255—270 (1958).

Aus der Townsendschen Zündbedingung wird die Durchbruchcharakteristik

für eine koaxiale Diode in einem axialen Magnetfeld hergeleitet. Der erste Townsendsche Koeffizient wird hierzu unter Mitberücksichtigung der elastischen Stöße für den Fall von gekreuzten, homogenen magnetischen und elektrischen Feldern ermittelt. Diese Berechnung beschränkt die Anwendung auf solche Bereiche des Drucks und des Magnetfeldes, in denen die Höhe eines Zykloidenbogens der kathodischen Elektronenbahn den Radius der zylindrischen Kathode wesentlich überwiegt. Für die beiden Fälle, daß die maximale Elektronenenergie auf einem Zykloidenbogen größer bzw. kleiner als die Ionisierungsspannung ist, kann die Charakteristik durch zwei unterschiedliche Funktionen angenähert werden. Die wesentlichen Züge dieser Charakteristik werden durch experimentelle Untersuchungen bestätigt. Außerdem können an Hand der Flugdauer für Ionen und Elektronen die Raumladungsverhältnisse in der Diode abgeschätzt werden.

K. G. Müller.

Kulikovskij (Kulikovskii), A. G.: On the pulsations of a plasma filament. Soviet Phys., Doklady 2, 269—272 (1958), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 984—987 (1957).

Eine bestimmte Klasse von Lösungen der magneto-hydrodynamischen Gleichungen einschließlich periodischer Lösungen werden im Hinblick auf die Untersuchung von langen Funken beschrieben. Für eine eindimensionale, axial-symmetrische Bewegung eines Gases unendlich hoher Leitfähigkeit ergeben sich die Bewegungsgleichung und die Erhaltungssätze für Masse, Entropie und magnetischen Fluß. Unter der Annahme einer homogenen Deformation [$r/r_0 = \mu(t)$] läßt sich die Lösung des Gleichungssystems auf eine Differentialgleichung erster Ordnung für $\mu(t)$ zurückführen. In einer Fallunterscheidung werden die verschiedenen Möglichkeiten in der Wahl der einzelnen Konstanten dieser Differentialgleichung diskutiert. Auf einen Plasmazyylinder endlicher Länge und endlichen Durchmessers lassen sich diese Ergebnisse nur anwenden, wenn das Plasma axial durch metallisch leitende Wände begrenzt wird und radial eine äußere Kraft erfährt. Eine Energiebilanz zeigt, daß die Arbeit der äußeren Kräfte bei der Kontraktion des Plasmas nur im periodischen Fall endlich bleibt.

K. G. Müller.

Javorskaja (Iavorskaia), I. M.: Oscillations of an infinite cylinder of gas acted on by its own gravity and a magnetic field. Soviet Phys., Doklady 2, 273—276 (1958), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 988—990 (1957).

Für die radiale, nichtstationäre Bewegung eines ausgedehnten Plasmazyinders werden die Bewegungsgleichungen und die Erhaltungssätze unter Berücksichtigung der eigenen Gravitation aufgestellt. Voraussetzung dabei ist eine extrem hohe Leitfähigkeit des Plasmas, so daß die magnetischen Kraftlinien praktisch als eingefroren betrachtet werden können. Mit dem Ansatz einer homogenen Deformation (s. a. A. G. Kulikovskij, vorstehendes Referat) ergibt sich eine exakte, partikuläre Lösung, die in einer Fallunterscheidung für unterschiedliche Wahl der Randbedingungen untersucht wird. Die Ergebnisse werden mit den Resultaten von Kulikovskij verglichen.

K. G. Müller.

Taylor, R. J.: The influence of an axial magnetic field on the stability of a constricted gas discharge. Proc. phys. Soc., Sect. B 70, 1049—1063 (1957).

Eine kontrahierte Gasentladung soll durch ein axiales Magnetfeld stabilisiert werden, welches aus dem Plasmaschlauch und dem umgebenden Gebiet geringer Dichte stammt oder aber durch Wirbelströme in den metallischen Wänden erzeugt wird. Hierbei werden zwei Grenzfälle einer kontrahierten Entladung unterschieden. Im ersten Fall fließt der gesamte Entladungsstrom innerhalb einer dünnen Oberflächenschicht und das axiale Magnetfeld ist im wesentlichen im Plasma eingefroren. Dieser Typ ist nur stabil in Anwesenheit einer metallisch leitenden, zylindrischen Wand mit einem Radius, der günstigstenfalls den 5-fachen Wert des Entladungsradius einnehmen darf. Im anderen Grenzfall, bei dem die axiale Stromdichte und das axiale Magnetfeld innerhalb des Plasmaschlauches konstant sind, existiert keine

vollständig stabile Konfiguration. Die Stabilitätsuntersuchung für einen allgemeinen Fall ergibt zwei Differentialgleichungen erster Ordnung und eine Dispersionsgleichung, die ausführlich diskutiert werden.

K. G. Müller.

Rosenbluth, M. N. and C. L. Longmire: *Stability of plasmas confined by magnetic fields.* *Ann. of Phys.* **1**, 120—140 (1957).

Die Stabilität magnetisch kontrahierter Plasmen wird untersucht. Als Grundlage zur Ableitung der Stabilitätskriterien dienen, in Erweiterung der bisherigen rein magnetohydrodynamischen Betrachtungen (mit isotropem Drucktensor), die individuelle Teilchenbewegung mit den adiabatischen Invarianten $\mu = E_{\perp}/B$ und $\int v_{\parallel} dl$. Ein Variationsprinzip, dessen Anwendung begründet wird, gibt mit der Bedingung minimaler potentieller Energie die Voraussetzungen an, unter denen stabile Konfigurationen zu erhalten sind. Die kritischen Wellenlängen für maximales Wachstum kleiner Störungen werden angegeben, der Einfluß nichtlinearer Effekte auf die Wachstumsgeschwindigkeit der Störungsamplitude berechnet. (Eine Berechnung stabilisierter „Pinches“ auf der Grundlage dieser Betrachtungen siehe: M. N. Rosenbluth, *Soc. Ital. Fiz., Terzo Congr. internaz. fenomeni d'ionizzazione nei gas*, *Rend., Milano* 1957, 903—908).

H. Rother.

Lighthill, M. J.: *Dynamics of a dissociating gas. I: Equilibrium flow.* *J. Fluid Mechanics* **3**, 1—32 (1957).

Die Thermodynamik eines „ideal“ dissoziierenden zweiatomigen Gases (der Dissoziationsgrad hängt von der Temperatur nur über den Boltzmannfaktor $e^{-D/kT}$ ab, Spez. Wärme = const) wird für die spezielle Anwendung auf Stoßwellenprobleme entwickelt. Die idealisierende Voraussetzung stellt für Temperaturen zwischen 3000° K und von 7000° K bei Drucken von 10^{-3} —1 Atm. in Stickstoff und Sauerstoff eine brauchbare Näherung dar. Eingehende Behandlung findet der Einfluß der Dissoziation auf die Strömung um Überschallprojekte. Im vorliegenden I. Teil werden nur Gleichgewichtszustände untersucht, die den Strömungszustand außerhalb der Grenzfläche approximieren, solange die charakteristische Zeit der Strömung um den Körper groß ist gegen Dissoziations- und Rekombinationszeiten. (Transportphänomene und Nichtgleichgewichtszustände sollen in zwei folgenden Artikeln behandelt werden.) Graphische Darstellungen von Gestalt, Abstand und Verteilung der Transversalgeschwindigkeit der Wellenfront vor sphärischen Projektilen werden gegeben. Bemerkenswerte Übereinstimmung im Druckverlauf entlang der Oberfläche wird erhalten mit Rechnungen von Ivey, Klunker und Bowen [Technical Note 1613, Nat. Advisory Committee Aeronaut., Washington (1948)], trotz stark abweichender Voraussetzungen (große Dichteüberhöhung, aber variabler Dichteverlauf). Der Fall der durch große Druckgradienten stark vergrößerten Strömungsröhre bleibt ungelöst.

H. Rother.

Broyles, A. A.: *Calculation of fields on plasma ions by collective coordinates.* *Z. Phys.* **151**, 187—201 (1958).

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des elektrischen Feldes auf ein Ion im Plasma wird an Hand einer Aufspaltung der Wechselwirkung in kurz- und langreichweitige Kräfte berechnet. Hierbei wird die Elektronenraumladung als gleichmäßig verschmiert vorausgesetzt. Der kurzreichweitige Anteil berücksichtigt in einem mittleren Paarwechselwirkungspotential nur die Wechselwirkung des Ions im Ursprung mit einem Nachbarn. Durch eine Transformation auf kollektive Koordinaten, d. h. auf die Koeffizienten der Fourierdarstellung der Ladungsverteilung als neue Variablen, können die sich ergebenden Gleichungen ausgewertet werden. Die Jacobische Determinante dieser Transformation wird in eine Reihe von Hermiteischen Polynomen entwickelt, deren drittes Glied eine Fehlerabschätzung zuläßt. Die Grenze zwischen kurz- und langreichweitigen Kräften wird so gewählt, daß die Approximation der Jacobischen Determinante und die Vernachlässigung eines Teils der kurzreichweitigen Wechselwirkung einen möglichst geringen Fehler bedingt. Die Ergebnisse

für hohe Temperaturen geben eine gute Vergleichsmöglichkeit mit den Resultaten von Holtsmark. *K. G. Müller.*

Jancel, Raymond et Théo Kahan: Conditions de décharge dans une cavité électromagnétique et ondes progressives dans les plasmas lorentziens. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2894—2896 (1957).

In zwei früheren Arbeiten (dies. Zbl. **77**, 234, 449) wurde die Theorie eines Lorentz-Plasmas, auf welches ein elektrisches Wechselfeld, ein Feld $\vec{K}(\vec{r})$ und ein konstantes Magnetfeld einwirken, dargestellt; in der vorliegenden Arbeit werden die allgemeinen Ergebnisse dieser Theorie zur Aufstellung eines Kriteriums für die Entladung in einem quaderförmigen Hohlraum und zur Behandlung fortschreitender Wellen in einem unendlich ausgedehnten Plasma verwendet. *H. Stolz.*

Bayet, Michel: Sections efficaces d'interaction électron-électron et électron-ion dans les plasmas. J. Phys. Radium **18**, 380—386 (1957).

Formeln über Wirkungsquerschnitte insbesondere für Coulombwechselwirkung werden zusammengestellt. Dann werden Wirkungsquerschnitte in einem Plasma unter Berücksichtigung des Abschirmeffektes einer „Debyeschen Ionenatmosphäre“ berechnet. Außerdem erfolgt eine Betrachtung über Relaxationsfrequenzen.

H. Falkenhagen u. G. Kelbg.

Barker, J. A.: Cluster integrals and statistical mechanics of solutions. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **241**, 547—553 (1957).

Eine Theorie der flüssigen Lösungen wird entwickelt, basierend auf einem Ansatz von Longuet-Higgins (s. dies. Zbl. **43**, 409). Die potentielle Energie der betrachteten Lösung wird mit derjenigen einer geeignet gewählten, einfachen Bezugsflüssigkeit verglichen. Die Differenz der freien Energien der Lösung und der Bezugsflüssigkeit kann dann in eine „Cluster“-Reihe entwickelt werden, ähnlich der in der Theorie der realen Gase auftretenden. Diese Entwicklung kann zur Begründung bestehender Näherungstheorien flüssiger Lösungen verwendet werden.

M. R. Schafroth.

Talbot, L.: Free molecular flow forces and heat transfer for an infinite circular cylinder at angle of attack. J. aeronaut. Sci. **24**, 458—459 (1957).

Die Wärmeaustausch- und Widerstandscharakteristiken für einen unendlich langen Kreiszylinder, welcher von einer freien molekularen Maxwell'schen Strömung unter gegebenem Winkel angegriffen wird, werden, unter verallgemeinerten Gegenwirkungsbedingungen an der Zylinderoberfläche, ermittelt.

S. Drobot.

Hartunian, R. A. and W. R. Sears: On the instability of small gas bubbles moving uniformly in various liquids. J. Fluid Mechanics **3**, 27—47 (1957).

The instability of small gas bubbles moving uniformly in various liquids is experimentally and theoretically investigated. The experiments consist in measuring the size and terminal velocity of bubbles at the threshold of instability in various liquids, together with the physical properties of the liquids. The experimental results indicate the existence of a universal stability curve, which determines the critical conditions necessary for the onset of oscillations of bubbles in most common liquids. The character of this curve strongly suggests that there are two distinct criteria of instability, namely, a critical Reynolds number $Re = 2 \rho U r_e / \mu = 202$ for the impure and somewhat more viscous liquids, and a critical Weber number $We = U(\rho r_e / T)^{1/2} = 1,26$ for pure, relatively inviscid liquids [where U denotes the speed at which the bubble rises, ρ the density of the liquid, r_e the equivalent radius $(3 \times \text{volume} / 4\pi)^{1/3}$ of the bubble, T the surface tension, g the acceleration due to gravity, and μ the coefficient of viscosity]. There is no exact method for determining which of the two criteria will prevail in a given liquid. For the pure liquids, a fairly good requirement that the Weber number be dominant is that the M number $M = g \mu^4 / \rho T^3$ should have a value less than 10^{-9} . But the significant

properties of impure liquids do not seem to be reflected in the values of M , so that the liquids falling into this class can be identified only by experience. The theoretical analysis is directed towards an investigation of the possibility of the interaction of surface tension and hydrodynamic pressure leading to unstable motions of the bubbles, i. e. the existence of a critical Weber number. Accordingly, the theoretical model assumes the form of a general perturbation in the shape of a deformable sphere moving with uniform velocity in an inviscid, incompressible fluid of infinite extent. The results indicate the possibility of small, high-frequency oscillations of the bubble at the lower Weber numbers above a critical value. A subsequent investigation of the time-independent equations shows the existence of large deformations of the bubble prior to the onset of the unstable motion, which is not compatible with the approximation of perturbing an essentially spherical bubble. This deformation and its possible effects on the stability calculation are therefore determined by approximate methods. From this, it is concluded that the deformation of the bubble serves to introduce quantitative, but not qualitative, changes in the stability calculation. The inclusion of the effects of deformation of bubbles yields a critical Weber number 1,23 which agrees well with the experimental value. *Dan Gh. Ionescu.*

Cohen, Michael and Richard P. Feynman: Theory of inelastic scattering of cold neutrons from liquid helium. *Phys. Review*, II. Ser. 107, 13—24 (1927).

Es wird eine Theorie der Streuung thermischer Neutronen an He II gegeben. Wie bei der entsprechenden Streuung am festen Körper (G. Placzek, L. van Hove, dies. Zbl. 55, 444) kann man aus dem Energieverlust bei inelastischer Streuung das Spektrum der elementaren Anregungen bestimmen. *W. Brenig.*

Matsuda, Hirosugu: A lattice model of liquid helium. III: Equilibrium properties of liquid He^4 and mixtures of He^4 and He^3 . *Progress theor. Phys.* 18, 357—366 (1957).

Verf. zeigt, daß die Zustandssumme des früher (s. dies. Zbl. 78, 226) studierten He-Modells eine universelle Funktion einer Variablen ist. Diese Funktion wird durch Anpassung an gewisse empirische Daten festgelegt. Der Vergleich der so erhaltenen Theorie mit anderen experimentellen Daten zeigt befriedigende Übereinstimmung. *G. Heber.*

Morita, Tohru: On the lattice model of liquid helium proposed by Matsubara and Matsuda. *Progress theor. Phys.* 18, 462—466 (1957).

Verf. begründet die von Matsubara und Matsuda verwendete Hamilton-Funktion des Gitter-Modells für flüssiges Helium etwas ausführlicher. Insbesondere wird Wert auf die Frage gelegt, inwieweit die Vermeidung von Doppelbesetzung eines Gitterplatzes mit Hilfe von Fermi-Operatoren mit dem Bose-Charakter des ganzen Systems verträglich ist. Es wird gezeigt, daß man unter Beachtung gewisser Regeln genau so vorgehen kann wie Matsubara und Matsuda (vgl. dies. Zbl. 78, 226, das dortige Zitat und vorstehendes Referat). *G. Heber.*

Chalatnikov (Khalatnikov), I. M.: Hydrodynamics of solutions of two superfluid liquids. *Soviet Phys., JETP* 5, 542—545 (1957), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* 32, 653—657 (1957).

The mixture of two suprafluid liquids is considered and a „three-velocity-theory“ proposed. In the calculations running along common lines three types of sound propagation are found: ordinary sound, temperature, and solution concentration vibrations. *W. Klose.*

Archipov (Arkhipov), R. G.: Flow instability of a superfluid film. *Soviet Phys. JETP* 6, 90—96 (1958), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* 33, 116—123 (1957).

Ferrell, Richard A. and Rolfe E. Glover III.: Conductivity of superconducting films: A sum rule. *Phys. Review*, II. Ser. 109, 1398—1399 (1958).

Pines, David: Superconductivity in the periodic system. *Phys. Review*, II. Ser. 109, 280—287 (1958).

Es wird der Versuch unternommen, auf Grund der Bardeen-Cooper-Schrieffer-Theorie der Supraleitung [Phys. Review, II. Ser. **108**, 1175—1204 (1957)] die beobachtete Verteilung der Supraleiter im periodischen System, die Abhängigkeit der Sprungtemperatur von der Zahl der Valenzelektronen und von der Elektrodendichte u. ä. zu erklären.

M. R. Schafroth.

Wentzel, Gregor: Diamagnetism of a dense electron gas. Phys. Review, II. Ser. **108**, 1593—1596 (1957).

Die Methode von K. Sawada [Phys. Review, II. Ser. **106**, 372—383 (1957)] zur Behandlung eines dichten Elektronengases unter Berücksichtigung der Coulombwechselwirkung wird zunächst formal vereinfacht. Als Anwendung ergibt sich, daß die magnetischen Eigenschaften des dichten Elektronengases von der Coulombwechselwirkung unbeeinflusst sind: es ergibt sich insbesondere kein Meissnereffekt, und die diamagnetische Suszeptibilität hat den Landauschen Wert.

M. R. Schafroth.

Kanazawa, Hideo: Coulomb interactions and the diamagnetism of free electrons. II. Progress theor. Phys. **17**, 1—6 (1957).

Der Diamagnetismus des Elektronengases wird mittels der Quantentheorie der Plasmaschwingungen untersucht. Es ergibt sich, daß die Suszeptibilität gegenüber dem Landauschen Wert für freie Elektronen nur um wenige Prozent vergrößert ist.

M. R. Schafroth.

Fester Körper:

Leibfried, G. und H. Hahn: Zur Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten von Alkalihalogenidkristallen. Z. Phys. **150**, 497—525 (1958).

Die elastischen Konstanten von Alkalihalogenidkristallen werden aus der freien Energie F_z des Kristalls berechnet. Als Zustandsvariable wählt man L (Abstand nächster Nachbarn), v_{ik} (Tensor der homogenen Verzerrung) und die Temperatur T . Die Koeffizienten in der Entwicklung der freien Energie nach v_{ik} liefern den thermischen Ausdehnungskoeffizienten und die isothermen elastischen Konstanten $c_{\mu\nu}$ als Funktionen der Temperatur. F_z wird gittertheoretisch berechnet. Der Hamilton-Operator des Kristalls wird in quasiharmonischer Näherung vorausgesetzt, d. h. die Koeffizienten der quadratischen Form der potentiellen Energie hängen von L und v_{ik} ab. Das Gitterfrequenzspektrum wird jedoch durch eine einzige mittlere Frequenz approximiert, die direkt aus der Spur der Matrix der potentiellen Energie folgt. Die Formeln für die Entwicklungskoeffizienten von F_z werden zunächst für den Fall beliebiger Zentralkräfte angegeben und dann für den Fall der Coulombkräfte und der Zentralkraft-Abstoßung nächster Nachbarn spezialisiert. Die aus dem Ausdruck für die F_z folgenden $L(T)$ und $c_{\mu\nu}(T)$ sind dann in kT linearisiert. Konkrete Berechnungen wurden für KCl, KBr, NaCl und CsCl durchgeführt und es wird ein gründlicher Vergleich der Ergebnisse mit den experimentellen Angaben gegeben.

O. Litzman.

Duval, George E.: Pressure-volume relations in solids. Amer. J. Phys. **26**, 235—238 (1958).

An equation of state of the form $P(V) = f(V) + Tg(V)$, which is useful for condensed matter, is proposed for the illustration of thermodynamic principles. Pressure-volume relations for adiabatic and shock compressions are derived with the assumption that specific heat at constant volume is independent of temperature. These derived relations are illustrated for a „Murnaghan“ equation of state, and constants of this equation for several metals are tabulated.

Zusammenfassg. des Autors.

Steketee, J. A.: On Volterra's dislocations in a semi-infinite elastic medium. Canadian J. Phys. **36**, 192—205 (1958).

Während in der Theorie kristalliner Festkörper i. a. die Bildung, Art, Lage und Anzahl von Versetzungen aus vorgegebenem Spannungsfeld errechnet werden,

handelt es sich hier um eine nach Ankündigung des Verf. für die Geophysik wichtige umgekehrte Fragestellung. Er betrachtet in einem kartesischen Koordinatensystem x_i den elastischen Halbraum $x_3 \geq 0$ mit den Laméschen Moduln λ, μ und gibt eine Versetzung als Fläche Σ vor, über welcher der Verschiebungszustand u_i einen Sprung $\Delta u_i = U_i + \Omega_{ij} x_j$, $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ („infinitesimale Schraubung“ — entsprechend einer kleinen relativen Starrkörperbewegung) erfährt. Bezeichnungen: δ_{ik} = Kronecker-symbol, e_k = Einsvektor in k -Richtung; P, Q = Raumpunkte mit Koordinaten x_i bzw. y_i ;

$$f'_{ij\dots} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \dots f; \quad f'^{ij\dots} = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \dots f;$$

v_j = Normalen-Einsvektor auf Σ ; r = Abstand zwischen P und Q . Wirkt im Punkte Q des vollunendlichen elastischen Raumes die Kraft $8\pi\mu e_k$, so gibt sie in P das Verschiebungsfeld $u_i^k(P, Q) = \delta_{ik} r_{,nn} - (\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) r_{,ik}$ sowie das Spannungsfeld $\tau_{ij}^k = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})$. Die gegebene Versetzung erzeugt dann das Verschiebungsfeld

$$u_k(Q) = \frac{U_i}{8\pi\mu} \iint_{\Sigma} \tau_{ij}^k(P, Q) v_j d\Sigma + \frac{\Omega_{ij}}{8\pi\mu} \iint_{\Sigma} \{x_j \tau_{il}^k(P, Q) - x_i \tau_{jl}^k(P, Q)\} v_l d\Sigma$$

und das Spannungsfeld

$$\tau_{kl}(Q) = \frac{U_i}{8\pi\mu} \iint_{\Sigma} G_{ij}^{kl} v_j d\Sigma + \frac{\Omega_{ij}}{8\pi\mu} \iint_{\Sigma} (x_j G_{in}^{kl} - x_i G_{jn}^{kl}) v_n d\Sigma,$$

wobei $G_{ij}^{kl}(P, Q) = \lambda \delta_{kl} \tau_{ij}^{n,n} + \mu (\tau_{ij}^{k,l} + \tau_{ij}^{l,k})$. Übergang zum anfangs genannten Halbraum bedingt (I) $\tau_{31} = \tau_{32} = 0$ für $x_3 = 0$, (II) $\tau_{33} = 0$ für $x_3 = 0$. Spiegelt man die oben gewonnene Lösung an der Ebene $x_3 = 0$ und überlagert sie mit sich selbst, so wird (I) erfüllt, doch erhält man statt (II) $\tau_{33}(x_1, x_2, 0) = p(x_1, x_2)$ als wohlbestimmte Funktion. Um (II) zu gewährleisten, überlagert Verf. eine Lösung des versetzungsfreien elastischen Halbraumes, welche $\tau_{33}(x_1, x_2, 0) = -p(x_1, x_2)$ erfüllt. Für dieses spezielle Boussinesqsche Problem benutzt er in Anlehnung an andere Autoren den Galerkinschen Vektor Γ_i (einer Verschiebung u_i durch $u_i = \Gamma_{i,kk} - (\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) \Gamma_{k,ki}$ zugeordnet) sowie zweidimensionale Fouriertransformationen über die Ebenen $x_3 = \text{const.}$ Es bleibt offen, ob jene stets konvergieren bzw. welche Fälle bestimmt erfaßt werden. Für sie ist jedoch jetzt das ganze Problem auf Quadraturen zurückgeführt, was evtl. Approximationen erst bei der numerischen Auswertung nötig macht. Verf. deutet (bis auf Dimensionsfaktoren) τ_{ij}^k für feste i, j als Verschiebungsfeld u_k einer Versetzung und wendet darauf seine Methode zur Illustration und im Hinblick auf später zu veröffentlichende geodätische Untersuchungen an.

H. Lippmann.

Atkinson, H. H. and P. B. Hirsch: The theory of small angle scattering from dislocations. Philos. Mag., VIII. Ser. 3, 213—228 (1958).

The small angle scattering of X-rays or neutrons from crystals containing a random network of dislocations is calculated. Three causes of density changes associated with dislocations are considered: that due to the elastic strain field from edge dislocations, that due to second-order elasticity effects and that due to the dislocation cores. It is found that in the range of angles for which experimental evidence is available, the effect due to the elastic strain field from edge dislocations predominates.

Aus der Zusammenfassg. der Verff.

● Raaz, Franz und Hermann Tertsch: Einführung in die geometrische und physikalische Kristallographie und in deren Arbeitsmethoden. 3. wesentl. erweit. Aufl. Wien: Springer-Verlag 1958. XII, 367 S. mit 384 Textabb. Ganzln. DM 48,—.

Das Buch wurde gegenüber der ersten Auflage (dies. Zbl. 22, 35) um wesentliche Teile erweitert und gibt eine anschauliche, leicht verständliche und weitreichende Einführung in die Kristallehre. Es wendet sich vorwiegend an mit theoretischen und mathematischen Methoden wenig vertraute Leser, erschwert aber anderen dadurch gelegentlich das Verständnis. Beispielsweise stellen Millersche Indizes nichts weiter

als (geeignet normierte) projektive Ebenenkoordinaten dar. Ihre von den Verff. gewählte Definition ist zwar elementarer, scheint aber willkürlich und macht für einfache Probleme (z. B. Inzidenz zwischen „Zone“ — d. h. Richtung — und Ebene) eingehende Untersuchungen erforderlich. Da ferner dem Leser der mathematische Gruppenbegriff nicht zugemutet wird, müssen die Verff. auf tieferliegende Folgerungen der Schoenflieschen gruppentheoretischen Beschreibung verzichten. Deshalb werden z. B. die tensoriellen Richtungsabhängigkeiten physikalischer Eigenschaften nur in wenigen Fällen qualitativ und quantitativ dargestellt. Demgegenüber — und darin liegt wohl der besondere Wert des Buches — finden praktische Verfahren bei der Untersuchung von Kristallen und deren Auswertung breiten Raum. Das Stoffgebiet ist in zwei Teile gegliedert: „Kristallographie“ (F. Raaz) und „Kristallphysik“ (H. Tertsch). Der erste gelangt von einfachsten Beobachtungsergebnissen am Kristall und deren geometrischer, speziell graphischer Darstellung über elementare Symmetriegesetze bis zur sehr eingehenden Formenbeschreibung der 32 Kristallklassen und behandelt anschließend Gittertheorie der Strukturen, welche letztes Endes die o. g. 32 Klassen zu erklären und beschreiben vermag (Schoenflies). Zur experimentellen Erhärtung folgen Einblicke in die Röntgenkristallographie (Laue-Bragg-Debye, Scherrer und Hull). Der zweite Teil „Kristallphysik“ beschreibt vorwiegend Versuche und Beobachtungen, bildet aber so eine ideale Ergänzung zu dem (ebenfalls allgemeinverständlichen) vorwiegend theoretischen Lehrbuch von J. F. Nye, *Physical properties of crystals* (dies. Zbl. 79, 226). Im einzelnen werden mechanische (Dichte, Elastizität, Plastizität, Festigkeit), optische (Doppelbrechung, Polarisierung, optische Aktivität, Lumineszenz, Verfärbung), thermodynamische (Wärmeleitung, -Ausdehnung, spez. Wärme), elektrische (Pyro- und Piezoelektrizität) und magnetische (Pyro- und Piezomagnetismus) Eigenschaften behandelt. Längere mathematische Beweisführungen werden fast durchgehend unterdrückt.

H. Lippmann.

Kondo, Jun: Band theory of superexchange interaction. *Progress theor. Phys.* 18, 541—551 (1957).

Anwendung der Blochschen Methode zur Berechnung der Energiebänder für die 2 *p*- und 3 *d*-Elektronen in einem NiO-Kristall. *G. Heber.*

Lax, B.: Experimental investigations of the electronic band structure of solids. *Reviews modern Phys.* 30, 122—154 (1958).

In einem zusammenfassenden Bericht werden die vier wichtigsten Gruppen von Experimenten dargestellt, durch die man einen Einblick in die Energiebänderstruktur fester Körper gewinnt. Zunächst wird ausführlich als unmittelbarste Methode die (1) Zyklotronresonanz besprochen, insbesondere (für den Mikrowellenbereich) bei Ge und Si sowie bei Metallen, außerdem (im Infraroten) bei InSb und Bi. Es folgt eine Darstellung des (2) de-Haas-van Alphen-Effektes. Sie enthält eine übersichtliche Zusammenstellung der bisher gewonnenen Versuchsergebnisse. Weiter werden (3) die galvanomagnetischen Effekte bei Ge, Si, Bi und bei einigen Metallen behandelt. Der Bericht schließt mit der (4) Infrarotabsorption, wobei besonders die bei der Anwesenheit eines Magnetfeldes auftretenden Effekte berücksichtigt werden. 172 Literaturzitate geben die wichtigsten Originalarbeiten an. *G. Blankenfeld.*

Ziman, J. M.: Transport properties of solids. *Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser.* 7, 353—376 (1958).

Der Bericht enthält drei Kapitel: 1. Leitung durch Phononen, 2. Leitung durch Elektronen, 3. Wechselwirkung von Phononen mit Elektronen. Die bekannten Theorien der Leitfähigkeiten idealer Kristalle werden nur gestreift. Verf. legt Wert auf die Behandlung der durch Irregularitäten hervorgerufenen Effekte. Ein wegen seiner Kürze und physikalischen Klarheit sehr empfehlenswerter Beitrag zur Festkörpertheorie.

W. Klose.

Lifšic (Lifshitz), I. M.: Quantum theory of the electrical conductivity of metals in a magnetic field. Soviet Phys., JETP 5, 1227—1234 (1957), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 32, 1509—1518 (1957).

Author's aim is the construction of a consistent quantum mechanical theory of the electric conductivity in the presence of a magnetic field. Using density matrix formulation the explanation of certain experimental results (not given in a semi-classical theory) is possible. The whole theory is, however, based at least on the adiabatic approximation, and so no collective behaviour aspects can be derived.

W. Klose.

Jakšić, B.: On the Bloch integral equation at low temperatures. Nuovo Cimento, X. Ser. 8, 282—289 (1958).

Diese Arbeit ist eine Weiterführung derjenigen von Supek (dies. Zbl. 79, 231) und Glaser und Jakšić [dies. Zbl. 79, 231; Nuovo Cimento, X. Ser. 7, 259—262 (1958)]. Die Blochsche Integralgleichung der Leitfähigkeitstheorie wird in ein Variationsprinzip umgeschrieben. Nach Einführung der neuen Variablen u^α ($\alpha = 1, 2$), E ($E(k) = E$ ist eine Energiefläche im k -Raum, u^α die zugehörigen Flächenkoordinaten) wird mit einem Variationsansatz ein System von unendlich vielen Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen des Ansatzes gewonnen. Bei Energieflächen, die die in der Blochschen Theorie übliche Vernachlässigung der Umlappprozesse gestatten, sowie bei tiefen Temperaturen wird das Verhalten der interessanten Größen bei $T \rightarrow 0$ untersucht sowie gezeigt, daß im Fall kleinerer Phonongeschwindigkeit als Elektronengeschwindigkeit $w = u/|v| < 1$ die den Hauptterm der Leitfähigkeit bestimmende „Ansatzfunktion“ einer partiellen Differentialgleichung auf der Fermifläche $E(k) = \zeta$ genügt. Im Fall $w \ll 1$ geht sie in die von Supek angegebene über.

W. Klose.

Goodman, Bernard: Adiabatic *vs* Bloch approximation in lattice scattering of electrons. Phys. Review, II. Ser. 110, 888—890 (1958).

Es wird gezeigt, daß man dieselbe Zeitabhängigkeit des Zustandsvektors eines Elektron-Phonon-Systems erhält, wenn man statt des in der Blochschen Leitfähigkeitstheorie benutzten Wechselwirkungspotentials die bei der adiabatischen Näherung vernachlässigten nicht-adiabatischen Terme des Hamilton-Operators verwendet und den Grenzwert sehr niederfrequenter Phononen oder statischer Gitterdeformationen betrachtet. Transportphänomene von niedrigster Ordnung in der Elektron-Phonon-Wechselwirkung werden also durch die Blochsche Theorie gut beschrieben, und die Verwendung von „Born-Oppenheimer-Zuständen“ ist nicht erforderlich.

H. W. Streitwolf.

Zuffi, Lina: Sulla velocità media dell'energia nei cristalli assorbenti. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 126—127 (1958).

Author shows that, in anisotropic conductor medium, the phase velocity is equal to the component of flow energy velocity in the direction of propagation. Engl. Zusammenfassg.

Steinberg, M. S.: Viscosity of the electron gas in metals. Phys. Review, II. Ser. 109, 1486—1492 (1958).

The coefficient of shear viscosity of a free electron gas interacting with thermal phonons and local crystal inhomogeneities is computed. The methods employed are essentially those developed for the problem of electrical conductivity, the difference lying in a second singular spatial direction introduced when momentum-transport is considered (physically belonging to the direction of shear motion). Applying a slightly modified Kohler variational principle the formal solution is obtained. Calculations are referred to ultrasonic attenuation-experiments in metals. W. Klose.

O'Dwyer, J. J. and P. G. Harper: Nonradiative transitions of trapped electrons in polar crystals. Phys. Review, II. Ser. 105, 399—400 (1957).

Eine algebraische Formel wird angegeben, die einen Integralausdruck von Huang und Rhys für die Wahrscheinlichkeit nichtstrahlender Übergänge von Elektronen

in polaren Kristallen in einem weiten Temperaturbereich mit großer Genauigkeit approximiert.

O. Madelung.

Hrivnák, Lubomír: The mean free path and mobility of electrons in ionic crystals. Czechosl. J. Phys. 8 (82), 57—64, russ. Zusammenfassg. 64—65 (1958).

Verf. berechnet auf der Grundlage des bekannten Hamilton-Operators für die Bewegung eines Elektrons in einem polaren Kristall störungstheoretisch die sog. freie Flugdauer τ eines Elektrons. Dieselbe ist definiert durch die reziproke Summe der ungewichteten Übergangswahrscheinlichkeiten des Elektrons. Durch Multiplikation von τ mit der Geschwindigkeit des Elektrons erhält man eine freie Weglänge l , die z. B. in der Boltzmann-Gleichung der Transportvorgänge auftritt. Sie ergibt sich hier, in Übereinstimmung mit einer früheren Rechnung von Seitz, proportional der Energie des Elektrons und umgekehrt proportional der Anzahl der vorhandenen Phononen. Diese stets existierende freie Weglänge ist jedoch streng zu unterscheiden von jener Länge, die sich aus der sog. Relaxationszeit τ_0 durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit ergibt. Letztere existiert streng genommen keineswegs in jedem Fall, ist aber die für Transportprozesse maßgebende freie Weglänge. Aus ihr berechnet sich die sog. Beweglichkeit der Ladungsträger eines Festkörpers. Letztere wurde bereits früher von Fröhlich u. a. berechnet und mit Experimenten zur Leitfähigkeit verglichen. Der hier durchgeführte Vergleich der mittels τ berechneten Beweglichkeit mit Leitfähigkeitsmessungen erscheint aus den genannten Gründen unangebracht.

W. Brauer.

Kawamura, Hazimu: The deformation potential of potassium chloride. Phys. Chem. Solids 5, 256—263 (1958).

Die Energie des tiefsten Zustandes der Leitungselektronen in KCl wird mittels der Zellularmethode für verschiedene Gitterkonstanten berechnet.

O. Madelung.

Appel, J.: Theorie der thermomagnetischen Effekte von nichtpolaren isotropen Halbleitern. Z. Naturforsch. 13a, 386—402 (1958).

Die in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 79, 235) im magnetfreien Fall angewandte Näherungsmethode zur simultanen Berechnung der Verteilungsfunktion der Elektronen und Phononen aus zwei gekoppelten Boltzmann-Gleichungen wird verbessert und auf den allgemeinen Fall mit Magnetfeld angewandt. Die hieraus folgenden Formeln für die thermomagnetischen Effekte werden für schwache und starke Magnetfelder explizit angegeben und der Bereich mittlerer Magnetfelder diskutiert.

O. Madelung.

Rendiconti del IV corso che nella Villa Monastero a Varenna dal 15 Luglio al 4 Agosto 1956 fu tenuto a cura della Scuola Internazionale di Fisica della Società di Fisica. Nuovo Cimento, X. Ser. 6, Suppl., 805—1237 (1957).

Der Band enthält die folgenden Vorlesungen, die in der genannten Sommerschule gehalten wurden: **M. H. L. Pryce:** Paramagnetism in Crystals; **J. H. van Vleck:** Magnetic Properties of Metals; **C. J. Gorter:** Paramagnetic Relaxation; **C. Kittel:** Ferromagnetism; **C. J. Gorter:** Antiferromagnetism; **L. Néel:** Les métamagnétiques ou substances antiferromagnétiques; **E. M. Purcell:** Nuclear Magnetism and Nuclear Relaxation; **J. H. van Vleck:** Line-Broadths and the Theory of Magnetism; **A. Abragam:** Influences des électrons sur la résonance des spins nucléaires dans les substances diamagnétiques: le déplacement „chimique“ et les interactions indirectes; **R. Kubo:** Stochastic Theory of Magnetic Resonance; **J. H. van Vleck:** The Concept of Temperature in Magnetism; **N. Kurti:** Magnetism at Very Low Temperatures and Nuclear Orientation; **C. Kittel:** Cyclotron Resonance in Crystals; **A. Kastler:** Les méthodes optiques de la résonance hertziennne; **C. J. Gorter:** Magnetic Properties of Superconductors. Jede dieser Vorlesungen hat den Charakter eines Übersichtsartikels über das betreffende Gebiet, wobei wegen Einzelheiten sehr oft auf Originalarbeiten bzw. Monographien verwiesen ist. Die Arbeiten eignen sich jedoch sehr gut zur Einführung in die betreffenden Problemkreise. Derselbe Band ent-

hält ferner eine Reihe von kleineren Originalbeiträgen zur Physik des Magnetismus, auf die Ref. aber nicht eingehen möchte. *G. Heber.*

Gejlikman (Geilikman), B. T.: Magnetic interaction of electrons and anomalous diamagnetism. Soviet Phys., JETP 5, 981—985 (1957), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 32, 1206—1211 (1957).

Es wird gezeigt, daß in Störungstheorie erster Ordnung die magnetische Wechselwirkung zwischen Elektronen keinen anomalen Diamagnetismus (d. h. Meissner-Effekt) zu bewirken vermag. *M. R. Schafroth.*

Bopp, F. und E. Werner: Exakte Grundlagen der Theorie der Spinwellen. Z. Phys. 151, 10—15 (1958).

Verff. zeigen, daß unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die nichtrelativistische Schrödingergleichung für N Elektronen mit Spin eine nur für die Spinbewegung zuständige (und zu Spinwellen führende) Gleichung enthält. Allerdings ist der Übergang von der Schrödinger- zur Spinwellengleichung im allgemeinen recht kompliziert und nicht immer eindeutig umkehrbar. — Dieser Beweis ist wichtig im Hinblick auf die vor allem von Slater betonten Mängel der bisherigen Theorie der Spinwellen, die der hier abgeleiteten Gleichung nicht anhaften. *G. Heber.*

Cofta, H.: Halbklassisches Bild der Spinwelle im Ferrimagnetikum. Acta phys. Polon. 15, 311—319 (1957).

Dietze, Horst-Dietrich: Theorie der Blochwandwölbung mit Streufeldeinfluß. Z. Phys. 149, 276—298 (1957).

Kersten hatte in seinen neueren Arbeiten zur Theorie der Koerzitivkraft usw. [Z. angew. Phys. 8, 313; 382; 496—502 (1956)] eine solche Form der gewölbten Blochwände angenommen, daß keine Streufelder auftreten (Zylinderform). Verf. läßt diese Annahme fallen. Die Form der Blochwände wird aus einem Variationsprinzip für die Freie Energie bestimmt. Mittelt man über alle möglichen Blochwand-Wölbungen, so wird die bei Kersten festgestellte schöne Übereinstimmung mit dem Experiment zerstört. Es entsteht also die Frage, ob man eine Bevorzugung gewisser Typen von Blochwand-Wölbungen durch die Natur erklären kann.

G. Heber.

Kaczér, Jan: The interaction energy of parallel Bloch walls. Czechosl. J. Phys. 8(82), 278—284, russ. Zusammenfassung 284 (1958).

The paper gives an exact calculation of the interaction energy of parallel 180° Bloch walls of an unbounded uniaxial ferromagnetic as a function of their distance s and of the external field. The general relation, valid for a periodic domain structure, is specialised for the case of two Bloch walls. *Zusammenfassg. des Autors.*

Yamashita, J. and J. Kondo: Superexchange interaction. Phys. Review, II. Ser. 109, 730—741 (1958).

Für den MnO-Kristall wird nach dem von Löwdin weiterentwickelten Heitler-London-Verfahren der Energieunterschied zwischen der antiferromagnetischen und der ferromagnetischen Orientierung der Mn-Spins berechnet. Dabei werden verschiedene Elektronenkonfigurationen zum reinen Ionen-Zustand $Mn^{++}O^{--}$ zugemischt. Die Rechnungen werden nur für ein Modell mit 4 Elektronen durchgeführt. Die auftretenden Integrale sind numerisch nur abgeschätzt worden. *G. Heber.*

Pratt jr., George W.: Theory of antiferromagnetic-ferromagnetic transitions in dilute magnetic alloys and in the rare earths. Phys. Review, II. Ser. 108, 1233—1242 (1957).

Gewisse Substanzen zeigen antiferromagnetische bzw. ferromagnetische Eigenschaften, obwohl die magnetischen Atome bzw. Ionen zu weit voneinander entfernt sind, um durch Heisenbergsche Austauschkräfte gekoppelt zu sein. Bei diesen Substanzen spielt die Austauschwechselwirkung der magnetischen Atomrümpfe mit den Leitungselektronen eine entscheidende Rolle. Dieses Phänomen wird mit Hilfe einer Molekularfeldtheorie und einer von Oguchi entwickelten cluster-Methode studiert.

Beide Studien ergeben, daß solchen Substanzen bei tiefen Temperaturen ferromagnetisch, bei höheren antiferromagnetisch sein können. Dieser Übergang erweist sich als solcher 2-ter Ordnung. *G. Heber.*

Carr jr., W. J.: Theory of ferromagnetic anisotropy. Phys. Review, II. Ser. 108, 1158—1163 (1957).

Verf. berechnet die Anisotropieenergie kubischer und hexagonaler Kristalle am absoluten Nullpunkt der Temperatur. Mit Hilfe eines Virialtheorems wird diese Energie durch die Coulombenergie des ganzen Kristalles ausgedrückt. Diese hängt von der Richtung der Magnetisierung relativ zu den Kristallachsen ab, weil die Ladungsverteilung der Elektronen durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung eine ausgezeichnete Achse erhält. *G. Heber.*

Dzjalošinskij (Dzialoshinskii), I. E.: Thermodynamic theory of „weak“ ferromagnetism in antiferromagnetic substances. Soviet Phys., JETP 5, 1259—1272 (1957). Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 32, 1547—1562 (1957).

Verf. wendet Landaus Theorie der Phasenumwandlungen 2. Art auf den „schwachen“ Ferromagnetismus einiger spezieller Substanzen (α -Fe₂O₃, MnCO₃, CoCO₃) an. Der Ferromagnetismus scheint dabei durch Spin-Gitter- und magnetische Dipol-Wechselwirkungen verursacht zu sein. *G. Heber.*

Tjablikov (Tiablikov), S. V. and A. C. (A. Ts.) Amatuni: Ground state of an antiferromagnet by the method of elementary excitations. Soviet Phys., Doklady 1, 266—269 (1957). Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 69—72 (1956).

Die genannte Methode wird auf ein Antiferromagnetikum folgender Struktur angewandt: Schichtengitter; innerhalb jeder Schicht sind die Elementarmagnete im geordneten Zustand untereinander parallel, benachbarte Schichten jedoch sind jeweils antiparallel zueinander orientiert. *G. Heber.*

Bachynski, M. P.: Absorption in a dielectric slab. Canadian J. Phys. 36, 456—461 (1958).

Für eine dielektrische Platte werden die durchgelassenen, reflektierten und absorbierten Energien in Abhängigkeit von Einfallswinkel der auffallenden Strahlung und vom Verlustwinkel des Dielektrikums abgeleitet. Dabei zeigt sich, daß die durchgelassene Energie der parallel zur Einfallsebene polarisierten Welle auch bei ansteigendem Verlustwinkel immer größer als die der senkrecht polarisierten ist. Die reflektierte Energie wird mit wachsendem Verlustwinkel bei kleinen Einfallswinkeln größer und bei großen Einfallswinkeln kleiner. Dieser Effekt gilt für beide Polarisationsrichtungen. Die absorbierten Energien sind für beide Polarisationsrichtungen verschieden, beim Brewsterschen Winkel hat die senkrecht polarisierte Welle ein Maximum und die parallel polarisierte ein Minimum. *H. Rabenhorst.*

Peter, Martin: A property of dielectric constants of dielectrics in thermal equilibrium. J. Math. Physics 36, 347—350 (1958).

L'A. deduce una proprietà per la costante dielettrica (complessa) di un mezzo dispersivo e passivo e indica circuiti elettrici ordinari equivalenti ad un condensatore con dielettrico dispersivo del tipo di Lorentz. *D. Graffi.*

O'Dwyer, J. J.: Dielectric breakdown in solids. Advances Phys., Quart. Suppl. philos. Mag. 7, 349—394 (1958).

Zusammenfassender Artikel. Die verschiedenen Theorien des dielektrischen Durchschlags werden ausführlich und sorgfältig dargestellt und mit Experimenten verglichen. (Nicht glücklich ist die Begriffsbestimmung für „intrinsic breakdown“ = rein elektrischer Durchschlag und „thermal breakdown“. Dem „intrinsic breakdown“ wird die unrealistische Fiktion einer Instabilität der Elektronenverteilung zugrunde gelegt; diese Durchschlagsform gibt es weder praktisch noch theoretisch. Alle anderen — d. h. alle existierenden Durchschlagsformen — werden als „thermal“ angesprochen. Ref.) *Walter Franz.*

Berichtigungen

Zu Band 77:

Fisher, Michael E.: On the continuous solution of integral equations by an electronic analogue. I. Proc. Cambridge philos. Soc. **53**, 162—174 (1957); dies. Zbl. **77**, 115.

Der Name des Referenten ist *W. Nef*.

Zu Band 78:

Wallace, A. D.: The peripheral character of central elements of a lattice. Proc. Amer. math. Soc. **8**, 596—597 (1957); dies. Zbl. **78**, 20—21.

Auf S. 21, in Zeile 3 v. o. lies „subset B “ statt „subset“.

Srivastava, Pramila: On strong Rieszian summability of infinite series. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A **23**, 58—71 (1957); dies. Zbl. **78**, 52.

Ref. möchte noch nachtragen, daß sich die referierte Arbeit überschneidet mit zwei Arbeiten von Richert und einer von Glatfeld, in denen zur gleichen Zeit wie bei Srivastava ein zu $[R, \lambda, k + 1, q]$ gleichwertiges Verfahren $|R, \lambda, k|^q$ eingeführt und ausgiebig untersucht wird. Bei Richert werden außerdem (im Falle $\lambda_n = \log n$) Anwendungen von $|R, \lambda, k|^2$ auf die Summierbarkeit von Dirichlet-Reihen und auf verschiedene Probleme der Zahlentheorie behandelt. Siehe Richert [Centre Belge Rech. math., Colloque sur la théorie des nombres, Bruxelles du 19 au 21 déc. 1955 85—92 und dies. Zbl. **71**, 286] sowie Glatfeld [Proc. Glasgow math. Assoc. **3**, 123—131 (1957)].

D. Gaier.

Yano, Kenji: On a method of Cesàro summation for Fourier series. Kōdai math. Sem. Reports **9**, 49—58 (1957); dies. Zbl. **78**, 55—56.

Auf S. 56, in Zeile 2 v. o. lies „ $\Phi_\beta(t) = O(t^\nu)$ “ statt „ $\Phi_\beta(t) = O(t_\beta)$ “.

Leray, Jean: Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 1483—1488 (1957); dies. Zbl. **78**, 82.

In Zeile 2—3 v. o. des Referats lies „manifold X of dimension n “ statt „manifold X of dimension $n - 1$ “.

Szmydt, Z.: Sur un problème concernant un système d'équations différentielles hyperboliques d'ordre arbitraire à deux variables indépendantes. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **5**, 577—582 (1957); dies. Zbl. **78**, 87.

In Zeile 5—6 v. o. des Referats lies „ $\partial^{p+m} \mu / \partial x^m \partial y^p = f(x, y, Z, V, W)$ “ statt „ $\partial^{p+m} / \partial x^m \partial y^p = f(x, y, z, v, W)$ “.

In Zeile 6 v. u. des Referats lies

„ $\partial^{i+j-2} u / \partial x^{j-1} \partial y^{i-1}$ “ statt „ $\partial^{i+j-1} u / \partial x^{j-1} \partial y^{i-1}$ “.

Georghiu, Octavian Émil: Contribution à la théorie des objets géométriques spéciaux non différentiels avec plusieurs composantes dans l'espace X_m . I, II. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 822—824, 887—889 (1957); dies. Zbl. **78**, 140.

Der Verfasser der Arbeit heißt Octavian Emil Gheorghiu.

Gol'fand, Ju. F. (Ju. F.): Generalized phase analysis as a corollary of the unitary property of the S -matrix. Soviet Phys., JETP **4**, 103—108 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **31**, 224—231 (1956); dies. Zbl. **78**, 199—200.

Der Name des Verfassers ist Ju. A. Gol'fand.

Ehrenfeucht, Andrzej: Two theories with axioms built by means of pleonasms. J. symbolic Logic 22, 36—38 (1957); dies. Zbl. 78, 244—245.

Auf S. 244 in Zeile 1 v. u. lies „(with n signs “&”)“ statt „(with n' &'s)“.

Putnam, Hilary: Decidability and essential undecidability. J. symbolic Logic 22, 39—54 (1957); dies. Zbl. 78, 245.

In Zeile 4 v. o. des Referats lies „essentially undecidable“ statt „undecidable“.

Kuttner, B.: Some remarks on quasi-Hausdorff transformations. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 8, 272—278 (1957); dies. Zbl. 78, 250—251.

Auf S. 251 in Zeile 4 v. u. des Referats lies „ (C, r) “ statt „ (C^0, r) “.

Biernacki, Mieczysław and Jan Krzyż: On the monotony of certain functionals in the theory of analytic functions. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 9, 135—145, poln. u. russ. Zusammenfassg. 146—147 (1957); dies. Zbl. 78, 264—265.

Auf S. 265 in Zeile 2 v. u. lies in dem Ausdruck für $S(r)$ „ \int_0^r “ statt „ \int_0^π “.

Olech, C.: On surfaces filled up by asymptotic integrals of a system of ordinary differential equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 935—941 (1957); dies. Zbl. 78, 273.

In der vorletzten Zeile des Referats lies „that the set“ statt „the set“.

Der Name des Referenten ist *H. A. Antosiewicz*.

Kasahara, Shouro: Le problème de la dualité en une forme générale dans la théorie des espaces localement convexes. Math. Japonicae 4, 63—82 (1956); dies. Zbl. 78, 286—287.

Auf S. 287, in Zeile 6 v. u. des Referats lies „ $\{v(x) | v \in M\}$ “ statt „ $\{u(x) | u \in M\}$ “.

Ridley, E. Cicely: A numerical method of solving second-order linear differential equations with two-point boundary conditions. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 442—447 (1957); dies. Zbl. 78, 301—302.

Auf S. 302 in Zeile 8 v. u. des Referats lies „ dY/dx “ statt „ dy/dx “.

Bauer, Friedrich L.: Beiträge zur Entwicklung numerischer Verfahren für programmgesteuerte Rechenanlagen. II. Direkte Faktorisierung eines Polynoms. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1956, 163—203 (1957); dies. Zbl. 78, 306.

In Zeile 11 v. u. des Referats lies

$$,, \sum_{k=1}^{r-1} l_k^{(i)} x^{r-k} u_r^{(i+k)} ,, \text{ statt } ,, \sum_{k=1}^{r-1} l_k^{(i)} x^{r-k} u_r^{(i-k)} ,,$$

Trachtenbrot, B. A.: On operators realizable in logical nets. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 1005—1007 (1957) [Russisch]; dies. Zbl. 78, 306—307.

Der Name des Referenten ist *J. C. Shepherdson*.

Schäffer, K.-A.: Der Likelihood-Anpassungstest. Mitteil.-Bl. math. Statistik 9, 27—54 (1957); dies. Zbl. 78, 333—334.

Der Name des Referenten lautet *J. J. Bezem*.

Im Referat ist generell der Buchstabe „ λ “ durch „ L “ zu ersetzen.

McCarty, J. P.: The cissoid of Diocles. Math. Gaz. 41, 102—105 (1957); dies. Zbl. 78, 346.

Der Name des Verfassers ist *J. P. McCarthy*.

Nakae, Tatuo: The local and global covariant variations of differential forms under an infinitesimal conformal transformation. J. math. Soc. Japan 9, 20—37 (1957); dies. Zbl. 78, 354.

In Zeile 3—2 v. u. des Referats lies „de Conner“ statt „de Connet“.

Yasunaka, Kuniho: Four vertices theorems for surface curves and space curves. *Yokohama math. J.* 5, 201—208 (1957); dies. Zbl. 78, 354.

In der zweiten Zeile des Referats ist das Wort „euklidische“ zu streichen.

Lippmann, Horst: Zur Winkeltheorie in zweidimensionalen Minkowski- und Finsler-Räumen. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 40, 162—170 (1957); dies. Zbl. 78, 355.

Die Arbeit steht in Band 60 der Zeitschrift.

In Zeile 4 v. u. des Referats lies „directions“ statt „direction“.

Michael, J. H.: Continuous mapping of subsets of the Euclidean n -sphere. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* 5, 133—137 (1957) u. russ. Zusammenfassg. XII (1957); dies. Zbl. 78, 364—365.

Der Name des Referenten ist *S. Stein*.

Milnor, John: The geometric realization of a semi-simplicial complex. *Ann. of Math.*, II. Ser. 65, 357—362 (1957); dies. Zbl. 78, 366.

In Zeile 3 v. o. des Referats lies „if K is“ statt „if is“.

Der Name des Referenten ist *Wu Wen-tsün*.

Narodeckij (Narodetsky), N. S.: The solution of two-dimensional problems in the theory of elasticity by means of special functions. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 114, 729—732 (1957) [Russisch]; dies. Zbl. 78, 383.

Der Name des Verfassers ist *M. Z. Narodeckij (Narodetsky)*.

Kiselev, A. A. und O. A. Ladyženskaja: Über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines instationären Problems für eine zähe inkompressible Flüssigkeit. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 21, 655—680 (1957) [Russisch]; dies. Zbl. 78, 398.

Das Zitat am Schluß des Referats lautet richtig „(voir ce Zbl. 65, 184; 70, 197)“.

Zu Band 79:

Burger, E.: Eine Bemerkung über nicht-negative Matrizen. *Z. angew. Math. Mech.* 37, 227—228 (1957); dies. Zbl. 79, 18.

In Zeile 1 v. o. des Referats lies „ $a_{ij} \geq 0$ “ statt „ $\geq a_{ij} 0$ “.

Suzuki, Michio: The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order. *Proc. Amer. math. Soc.* 8, 626—695 (1957); dies. Zbl. 79, 31—32.

Die Arbeit beginnt auf Seite 686 der Zeitschrift.

Apostol, T. M. and Abe Sklar: The approximate functional equation of Hecke's Dirichlet series. *Trans. Amer. math. Soc.* 86, 446—462 (1957); dies. Zbl. 79, 59.

In Zeile 9 v. u. des Referats lies

$$„\left(1 - \frac{n}{x}\right)^j“ \text{ statt } „\left(1 - \frac{n}{x}\right)^j“.$$

Im Referat ist generell der Buchstabe „ Φ “ durch „ φ “ zu ersetzen.

● **Segre, Corrado:** Opere. Vol. I. Roma: Edizioni Cremonese 1957. XII, 443 p. L. 4.000.—; dies. Zbl. 79, 147—148.

In Zeile 1 v. o. des Referats lies „Segre“ statt „Serre“.

Romberg, Günther: Beitrag zur Theorie der stationären, auftriebslosen Schallströmung an schlanken Rotationshalbkörpern. *Z. angew. Math. Mech.* 37, 305—308 (1957); dies. Zbl. 79, 185.

Im Zitat in Zeile 4 v. o. des Referats muß es richtig heißen „Aeronautics“.

In Zeile 8 v. o. lies „($x = 0$ als Körperspitze . . .“.

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abe, Ryuzo (Form factor of liquid He^4 at absolute zero. I.) 223; (Many-body pseudo-potential) 423.
- Abelson, Robert P. s. Robert R. Bush 76.
- Abian, Simbat (Convergence, continuity, differentiability and integrability) 80.
- Abraham, Jaromír (Transportproblem der linearen Programmierung) 361.
- Achiezer (Akhiezer), A. I. and A. G. Sitenko (Diffraction scattering of fast deuterons by nuclei) 437.
- Ackoff, Russel L. s. C. West Churchman 359.
- Ádám, András (Algebraic operators) 44; (Permutations of set products) 77.
- Adams, E. N. (Electronic self-energy in semiconductors) 234.
- Ernst (Spannungszustand in einer rotierenden Vollscheibe. I. II.) 396.
- Adel'son-Vel'skij, G. M. und Ju. A. Šrejder (Banachsches Mittel auf Gruppen) 256.
- Adler, Alfred (Characteristic relation in fibre bundles) 170.
- Adney, J. E. (Power of a prime dividing the order of a group) 32.
- Agaev, G. N. und T. A. Zamanov (Randwertaufgabe im Banachschen Raum) 106.
- Agnew, Ralph Palmer (Global central limit theorems) 345.
- Agostinelli, Cataldo (Moti magneti idrodinamici) 200; (Onde elettromagnetiche in un tubo cilindrico) 412; (Figure di equilibrio per una massa fluida con campi magnetici) 417.
- Agranovič (Agranovich), Z. S. and V. A. Marčenko (Marčenko) (Re-establishment of the potential from the scattering matrix) 109; (Wiederherstellung der potentiellen Energie) 109.
- Agricola, Erhard (Elektronische Analyse in der Sprachwissenschaft) 140.
- Aguiló Fuster, Rafael (Familie partieller Differentialgleichungen vierter Ordnung) 311.
- Aigner, Alexander (Unmöglichkeit von $x^6 + y^6 = z^6$ und $x^9 + y^9 = z^9$) 65.
- Akizuki, Yasuo and Hideyuki Matsumura (Dimension of algebraic system of curves) 368.
- Al-Dhahir, M. W. (Theorem of H. F. Baker) 366.
- Al-Salam, Waleed A. (Orthogonality) 95.
- — — and L. Carlitz (Formula of Toscano) 95.
- Albert, A. A. (Jordan division algebras) 47.
- — — and N. Jacobson (Jordan algebras) 46.
- Alblas, J. B. (Generation of water waves) 192.
- Albrecht, F. (A stable contractible polyhedron) 168.
- J. und W. Uhlmann (Differenzenverfahren für 1. Randwertaufgabe) 338.
- Julius (Differenzenverfahren bei parabolischen Differentialgleichungen) 339.
- Aleksandrov (Alexandrow), A. D. (Konvexe Polyeder) 163.
- Alekseev (Alexeev), A. S. and B. Ja. (B. J.) Gel'činskij (Gelchinsky) (Head wave intensity) 402.
- Alexandroff (Aleksandrov), P. S. und O. N. Golovin (Moskauer Mathematische Gesellschaft) 4.
- Alexits, Georges (Développements orthogonaux) 93.
- Alger, Philip L. (Mathematics for science and engineering) 75.
- Allamigeon, André-Claude (Isomorphisme des connections infinitésimales) 385.
- Allen, H. S. (Rings of linear transformations) 127.
- Alterman, Z. s. C. L. Pekeris 411.
- Altman, M. (Jacobi's method for bilinear forms) 18; (Linear algebraic equations) 19; (Theorem of K. Borsuk) 128.
- Amanov, I. I. (Biharmonic problem) 317.
- Amati, D. and B. B. Vitale (Processes involving baryons, pions and heavy mesons) 208.
- Amatuni, A. C. s. S. V. Tjablikov 452.
- Amemiya, Ichiro (Representation of modular lattices) 45.
- — — and Kôji Shiga (Tensor products of Banach spaces) 324.
- Amici, Andrea (Ellissi di Steiner) 143.
- Amitsur, S. A. (Hilbert's Nullstellensatz) 54.
- Anderson, R. D. (Groups of homeomorphisms) 166.
- Andô, Tsuyoshi (Continuity of norms) 324.
- André, Pierre s. Jacques des Cloizeaux 230.
- Andree, Richard V. (Modern abstract algebra) 10.
- Andreev, A. F. (Integral curves of two differential equations) 113.
- Andreoli, Giulio (Medie e loro processi iterativi) 90; (Commutazione ed anticommutazione) 362.
- Andreotti, Aldo e Paolo Salmon (Anelli con unica decomponibilità in fattori primi) 150.
- Andrew Libera, Sister Mary (Fregier parabolas) 143.
- Andrunakievič, V. A. (Modulare Ideale) 50.
- Antonio, G. F. Dell'Antonio, G. F. 205.
- Apostol, T. M. and Abe Sklar (Hecke's Dirichlet series) 59.
- Appel, J. (Thermokraft von Halbleitern) 235; (Thermomagnetische Effekte von Halbleitern) 450.
- Araki, Gentaro (Excited states of helium) 439.
- Aramaki, Seiya (Cut-off theory) 427.

- Archangel'skaja, V. M. (Calculations connected with Goldbach's problem) 66.
- Archipov (Arkhipov), R. G. (Flow instability of a superfluid film) 445.
- Arima, Akito (Nuclear binding energies) 433.
- Ariñ, É. I. (Berechnung des Arbeitslohns auf einer elektronischen Rechenmaschine) 140.
- Arinštejn (Arinstein), É. A. (Crystallization phenomenon) 229.
- (Arinshstein), E. A. (Crystallization) 229.
- Armitage, J. V. (Euclid's algorithm) 273; (Product of n linear forms) 273.
- Armstrong, Ruth (Finite groups) 31.
- Arnese, Giuseppe (Integrale secondo Riemann-Stieltjes) 276.
- Arnoff, E. Leonard s. C. West Churchman 359.
- Aronszajn, N. (Problem of Weyl) 108.
- and K. T. Smith (Positive reproducing kernels) 136.
- Arrighi, Gino (Sostituzioni lineari) 15.
- Arrow, Kenneth J., Samuel Karlin and Herbert Scarf (Inventory and production) 360.
- Arscott, F. M. (Integral equations for ellipsoidal wave functions) 96.
- Aruga, Masanao s. Isaac Koga 401.
- Arus, Lorenzo (Teorema di Stieltjes) 18.
- Atkinson, F. V. s. A. F. Andreev 113.
- — — s. I. M. Gel'fand 109.
- H. H. and P. B. Hirsch (Small angle scattering from dislocations) 447.
- Atsumi, Akira (Stresses in a plate under tension) 174.
- Audley, R. J. (Learning behavior of individual subjects) 358.
- Auslander, L. and M. Kuranihi (Holonomy group of locally euclidean spaces) 383.
- Maurice (Regular group rings) 267.
- Avak'janc, G. M. (Randschichten in Halbleitern) 235.
- Ayant, Yves, Bernard Dreyfus et Jean Peretti (Chaleur spécifique d'un réseau d'oscillateurs) 227.
- Aymerich, Giuseppe (Moti non permanenti di un gas perfetto) 404.
- Azpetitia, A. G. (Koeffizienten einer rekurrenten Reihe) 14; (Determinante von Vandermonde-Cauchy) 14.
- Babister, A. W. (Response functions of linear systems) 109.
- Bachtin (Bakhtin), I. A. (Equations with positive operators) 333.
- Bachynski, M. P. (Absorption in a dielectric slab) 452.
- Bade, William G. (Finitely additive measures) 80.
- Bader, W. (Ausströmung bei Drallgeräten) 184.
- Bagdoev, A. G. (Eindringen eines Drucks in das Innere einer kompressiblen Flüssigkeit) 187; (Eindringen eines Rotationskörpers in eine Flüssigkeit) 188.
- Bagrinovskij, K. A. (An die Redaktion) 109.
- Baiada, Emilio (Variazione totale, lunghezza d'una curva) 278.
- Bakievič (Bakievich), N. I. (Boundary problems for mixed type of equation) 119.
- Balcerzyk, S. (Algebraically compact groups of I. Kaplansky) 34.
- and Jan Mycielski (Representations of free products) 28; (Free subgroups in topological groups) 40.
- Baldacci, Riccardo F. (Principio variazionale nella teoria degli spostamenti) 397.
- Ballhausen, C. J. (Elektronenzustände in Komplexen der 1. Übergangsgruppe) 229.
- Bankier, J. D. (Pascal's triangle) 10.
- Barancev (Barantsev), R. G. (Mixed problem for $\psi_{\sigma\sigma} - K(\sigma)\psi_{\theta\theta} = 0$) 316; (Expansion theorems) 316.
- Barker, J. A. (Cluster integrals) 444.
- Barna, Béla (Iterationsverfahren) 90.
- Barnes, George (Hatchet or hacksaw blade planimeter) 140.
- Baron, Roger (Altimetria, planimetria, cosmimetria) 241.
- Barrett, John H. (Prüfer transformation for matrix differential equations) 106.
- Lida K. (Partitioning raised by R. H. Bing) 167.
- Barrie, R. (Magnetoresistance in strong magnetic fields) 233.
- Bartholomeusz, E. F. (Reflection of long waves at a step) 410.
- Basch, A. (F. Jung) 5.
- Basov, V. P., Ju. S. Bogdanov und M. M. Smirnov (N. P. Erugin) 5.
- Bassompierre, A. (Gradient de champ électrique dans la molécule d'acide cyanhydrique) 434.
- Bastenaire, François (Distributions statistiques des durées de vie) 356.
- Bateman, Paul T. and Emil Grosswald (Theorem of Erdős and Szekeres) 71.
- — — s. E. Landau 62.
- Batho, Edward H. (Semi-local and local rings) 264.
- Battaglia, Antonio (Equazione $x^{2n} + y^{2n} = z^n$) 65.
- Batten, Alan H. (Masses of close binary systems) 238.
- Battig, A. (Einfall einer elektromagnetischen Welle in ein Elektronengas) 198.
- Baumslag, Gilbert (Finite factors in infinite series) 253.
- Baxter, Donald C. and William C. Reynolds (Heat transfer) 195.
- Bayet, Michel (Formule de ralentissement de Bethe) 428; (Interaction électron-électron et électron-ion dans les plasmas) 444.
- Beaumont, Ross A. and J. Richard Byrne (R -modules and rings with polynomial multiplication) 264.
- Beauregard, O. Costa de s. Costa de Beauregard, O. 202.
- Becker, Oskar (Mathematisches Denken der Antike) 241.
- Beckmann, Martin J. s. Kenneth J. Arrow 360.
- Beckurts, K. H. (Diffusions-Kühlungseffekt) 211.
- Bedel'baev, A. K. (Stabilität nichtlinearer Regelsysteme) 141.
- Behari, Ram s. R. N. Kaul 376.
- — s. M. K. Singal 381.
- Behr, J. v. (Kern-Quadrupol-Streuung positiver Myonen) 430.
- Behrens, Ernst-August (T -Moduln mit distributivem Untermodulverband) 52.
- Béjar, Juan (Praktische Berechnung der Regression)

- 357; (Lineare Programmierung) 361.
- Belardinelli, Giuseppe (Operatori differenziali ipergeometrici) 98.
- Belevitch, Vitold (Problèmes d'approximation de Tchebycheff en théorie des télécommunications) 291.
- Bell, J. S. and R. J. Blin-Stoyle (Mesonic effects in beta-decay) 429.
- Bellman, Richard (Eigenvalues and functional equations) 17; (Nonnegativity of solutions of the heat equation) 314; (Application of dynamic programming to control processes) 343; (Terminal control time lags) 362.
- and Robert Kalaba (Dynamic programming) 352.
- Benado, Mihail (Theorie der regulären Produkte. II) 44; (Normalité unitaire) 260.
- Berestetsky, V. B. (Decay of strange particles) 207.
- and Yu. A. Bychkov (K-meson scattering) 205.
- Berezanskij, Ju. M. (Entwicklung nach Eigenfunktionen selbstadjungierter Operatoren) 136.
- Berg, Paul W. (Univalent mappings) 299.
- Bergman, George (Number system with an irrational base) 10.
- Stefan (Certain differential equations in three variables) 118.
- Berkes, J. (Dreiecksungleichung) 144; (Dreieckskonstruktion) 144.
- Berman, S. D. Charaktere endlicher Gruppen) 36.
- Bermant, A. F. and L. A. Ljusternik (Trigonometrie) 75.
- Berndt, Sune B. (Calibration of transonic test sections) 408.
- Bernstein, Ira B. (Waves in a plasma in a magnetic field) 441.
- Berruti Onesti, Natalia (Lemma di Gronwall) 81.
- Berstein, I. (Applications quasimonotones) 166.
- Bertoldi, I. (,Enumeratio linearum tertii ordinis“ di J. Newton) 242.
- Bertotti, Bruno (Flusso secondario nello strato limite tridimensionale) 407.
- Besicovitch, A. S. (Net to hold a sphere) 145.
- Betz, Albert (Ackeret in Göttingen) 244.
- Bhatt, S. N. (Negative order summability of a Fourier series) 94.
- Bhattacharya, R. N. (Wave resistance in deep water) 410.
- Biedenharn, L. C., J. M. Blatt and M. H. Kalos (Phenomenological neutron proton potentials) 431.
- s. F. W. Prosser jr. 434.
- Bieri, H. ((M, F)-Problem) 163; (Extremalproblem über konvexe Rotationskörper) 163.
- Biermann, Kurt-R. (A. von Humboldt als Protektor G. Eisensteins) 243.
- Biernacki, Mieczysław (Zéros des polynomes) 23.
- Miécislas (Fonctions composées par des fonctions surharmoniques ou sousharmoniques) 316.
- Bilenky, S. M. s. N. N. Bogolubov 426.
- Bilinski, Stanko (Kurvenzuordnung in der hyperbolischen Ebene) 152.
- Bincer, Adam M. (Scattering of polarized fermions) 424.
- Bing, R. H. (Approximating surfaces with polyhedral ones) 388; (Decomposition of E^3 into points and tame arcs) 388.
- Biot, M. A. (Equivalence of group velocity and energy transport) 179.
- Birch, B. J. (Transference theorem of the geometry of numbers) 69; (Grid with no split parallelepiped) 70.
- Birkhoff, Garrett (Jentzsch's theorem) 135.
- Björck, Göran (Extreme points of a compact convex set) 126.
- Black, G. and E. H. Linfoot (Spherical aberration) 414.
- Blackburn, Norman (Produkt von zwei zyklischen 2. Gruppen) 31.
- W. S. (Flexure of elastic cylinders) 397.
- Blažock jr., H. M. (Mean square contingency) 354.
- Blanchard, René (Coniques inscrites à un triangle) 143.
- Bland, D. R. (Associated flow rule of plasticity) 397.
- Blanuša, Danilo (Imbedding elliptic spaces) 155.
- Blatt, J. M. s. L. C. Biedenharn 431.
- Blin-Stoyle, R. J. s. J. S. Bell 429.
- Blundon, W. J. (Multiple covering of the plane by circles) 272.
- Boas jr., R. P. s. A. P. Matorin 85.
- Böbel, G. (Polarization effects in bremsstrahlung) 428.
- Bocchieri, P e E. Montaldi (Operatore hamiltoniano) 210.
- Boer, J. de s. E. G. D. Cohen 222.
- s. Z. W. Salsburg 222.
- Bogdankevič (Bogdankevich), L. S. and B. M. Bolotovskij (Bolotovskii) (Charge in a dielectric) 412.
- Bogdanov, Ju. S. s. V. P. Basov 5.
- Bogolubov (Bogolubov), N. N. and D. V. Širkov (Shirkov) (Dispersion relations for Compton scattering) 206.
- Bogolubov, N. N., S. M. Bilenky and A. A. Logunov (Dispersion relations for weak interactions) 426.
- Boikan, Sergi M. s. I. M. Gel'fand 135.
- Bolotovskij, B. M. s. L. S. Bogdankevič 412.
- Boltjanskij (Boltjanskii), V. G. (Homotopy theory of continuous mappings) 169.
- (Boltiansky), V. G. (Homotopical classification of vector fields) 169.
- Bonč-Bruevič (Bonch-Bruevich), V. L. (Electrons and holes in a semiconductor) 234.
- Bond jr., John W. (Shock front in argon) 409.
- Bondi, H. (Negative mass in relativity) 420.
- Bopp, F. und E. Werner (Theorie der Spinwellen) 451.
- Borowitz, Sidney and Howard Greenberg (Scattering of electrons by hydrogen atoms) 215.
- Borsuk, K. (k -independent subsets of Euclidean space) 388.
- Bos, W. J. (Zeichnen, Konstruieren und Existenzbeweise) 2.
- Bosch, Jorge E. (Fixpunkte von Operatoren) 276.
- Bottema, O. (Orientierte ebene Trigonometrie) 393.
- Bouligand, Georges s. Lucienne Félix 1.

- Brafman, Fred (Ultraspherical generating function) 97.
- Bragard, L. (Masse de la terre) 240.
- Brailsford, A. D. (Magnetic energy levels of electrons in metals) 233.
- Branges, Louis de (Local operators on Fourier transforms) 320.
- Bransden, B. H. and R. G. Moorhouse (Pion nucleon scattering) 205.
- Bratescu, G. G. (Formules des systèmes optiques) 198.
- Brauer, W. (Bremsgesetz mittelschneller Elektronen) 231.
- Bräuning, Günter (Elektrisches Feld paralleler Halbebenen) 195.
- Bredichina (Bredikhina), E. A. (Closest approximation of almost periodical functions) 105.
- Breene jr., R. G. (Line shape) 240.
- Breit, G. (Reactions at thresholds) 209.
- Breitenberger, Ernst (Partial fractions) 23.
- Brinis, Elisa (Tensori parzialmente isotropi) 374.
- Britton, J. L. (Word problem. I. II.) 252.
- Brodskij, M. S. (Problem von I. M. Gel'fand) 325.
- Brogie, Louis de (Équation de Heisenberg en théorie de la double solution) 422.
- Brokate, Kl. (Programmieren von Einadreib-Maschinen) 140.
- Bromilow, N. S. (Frequency response for systems with spherical aberration) 414.
- Brousseau, R. s. G. W. Evans 339.
- Browder, Felix E. (Regularity theorems for partial differential equations) 116; (Functional equations in locally convex spaces) 323.
- Brown, Laurie M. s. Isadore Harris 428.
- Sanborn C. s. Aldo L. Gilar dini 197.
- — s. Don C. Kelly 219.
- Browne, Edward Tankard (Determinants and matrices) 12.
- Broyles, A. A. (Fields on plasma ions) 443.
- Brüchner, H. J. und H. Kornbichler (Halb-intermediärerhalb-thermischer Reaktor) 210.
- Bruijn, N. G. de (Embedding theorems for infinite groups) 28; (Choice functions) 275.
- Bruns, Günter (Struktur von Filtern) 385.
- Brush, S. G. (Transition temperature in liquid helium) 224.
- Buckingham, R. A. (Numerical methods) 335.
- Bühlmann, Hans (Problème „limite central“) 345.
- Burger, E. (Nicht-negative Matrizen) 18.
- Burnett, J. R. and R. K. Whitford (Digital computers in synthesis of feedback systems) 141.
- Burniat, Pol (Modèles de surfaces canoniques) 372.
- Burton, Ralph A. (Vibration and impact) 179.
- Busbridge, I. W. (Atmospheres with isotropic scattering. II.) 239.
- Bushman, R. G. (Substitution theorem for the Laplace transformation) 320.
- Bush, Robert R., Robert P. Abelson and Ray Hyman (Mathematics for psychologists) 76.
- Bychkov, Yu. A. s. V. B. Beretskiy 205.
- Byrne, J. Richard s. Ross A. Beaumont 264.
- Cade, R. and K. A. Small (Small electrostatic effects) 195.
- Cafiero, Federico (Probabilità totali) 343.
- Cahen, Michel (Trajectoires de Schwarzschild) 420.
- Cahill, W. F. s. J. L. Synge 175.
- Calabi, E. (E. Hopf's maximum principle) 118.
- Calapso, Maria Teresa (Curve a flessione costante) 376.
- Campbell, H. E. (Casimir operator) 261.
- Capps, Richard H. (Scattering amplitude for systems of arbitrary spins) 424.
- Čarin, V. S. (Lokal auflösbare Gruppen) 30.
- Carleson, Lennart (Random sequences and additive number theory) 66.
- Carlitz, L. (Sums of four and six squares) 65; (Polynomials related to theta functions) 95; (Formula of Bateman) 95; (Irrational modular equation of order seven) 103.
- s. W. A. Al-Salam 95.
- Carr jr., W. J. (Ferromagnetic anisotropy) 452.
- Carrasco, Julian Rodero s. Rodero Carrasco, Julian 99.
- Carter, C., N. H. March and D. Vincent (X-ray and electron scattering by hydrogen) 217.
- W. J. (Acceleration in four-bar mechanisms) 375; (Torsion and flexure of slender solid sections) 395.
- Cartianu, Gh. (Stabilitätsproblem elektrischer Kreise) 196.
- Casal Grangei, Vicente (Áquivalenz von Effekten mit rationalem Diskont) 359.
- Case, K. M. (Wiener-Hopf equations) 318.
- Casesnoves, Dario Maravall s. Maravall Casesnoves, Dario 173.
- Cassina, Ugo (Histoire de la géométrie projective) 242.
- Castoldi, Luigi (Operatori hermitiani anticommutabili) 130; (Spazio euclideo aderente a un generico riferimento in X_n) 160.
- Cattaneo Gasparini, Ida (Conessioni affini) 384; (Geodetiche di una V_n) 384.
- Cavallaro, Vincenzo G. (Note storico-bibliografiche. I — III.) 3; (Triangoli $T' = x \cdot T$) 143.
- Cellitti, Carlo (Sistemi di rappresentanti di classi relative a G_2 di forme quadratiche) 271.
- Čerkasov, A. s. V. Nemyckij 79.
- Cerkovnikov, Ju. A. (Tserkovnikov, Ju. A.) (Stability of plasma in a magnetic field) 221.
- Cesari, L. and J. K. Hale (Periodic solutions of weakly nonlinear differential systems) 112.
- Chacón, P. Enrique (Statistik. 3) 352.
- Chakravorty, J. G. (Torsion of a conical bar) 173.
- Chalatnikov (Khalatnikov), I. M. (Solutions of two superfluid liquids) 445.
- Chambers, R. G. (Magneto-resistance effects) 233.
- Chandrasekhar, S. (Stellar structure) 239.
- Chang, I. D. (Optimum nose shapes for missiles) 408.
- Châtelet, A. (Chaînes et décompositions d'idéaux) 265.
- Childress, N. A. s. W. R. Hutcherson 372.

- Chion, Ja. V. (Geordnete Halbgruppen) 27.
- Chisholm, Roderick M. s. Bernard K. Symonds 7.
- Chisini, Oscar (Principio di continuità) 149.
- Chižnjak, N. A. s. Ja. B. Fajnborg 213.
- Cholodenko (Kholodenko), L. P. (Ferroelectric properties of barium titanate) 237.
- Choudhury, A. C. (Doubly distributive m -lattice) 258.
- Pritindu (Stresses in an elastic layer) 175; (Stresses in a layer of soil) 396.
- Chow, Tse-Sun (Heat conduction) 195.
- Wei-Liang (Principle of degeneration) 61.
- and Serge Lang (Birrational equivalence of curves) 61.
- Chrenov, L. S. (Kleine Rechenmaschinen) 342.
- Chu, Chiao-Min; George C. Clark and Stuart W. Churchill (Angular distribution coefficients for light-scattering) 413.
- Chudaj-Verenov, M. G. (Sätze über Grenzyklen für Liénardsche Gleichung) 307.
- Church, Elsie T. (Cubic inversion) 149.
- Churchill, Stuart W. s. Chiao-Min Chu 413.
- Churchman, C. West, Russel L. Ackoff and E. Leonard Arnoff (Operations research) 359.
- Cicala, Placido (Problemi di ottimo con soluzioni discontinue) 123.
- Ciliberto, Carlo (Problema di Mayer) 124.
- Cimmino, Gianfranco (Teorema di unicità per la soluzione del problema generalizzato di Dirichlet) 315.
- Citlanadze (Tsitlanadze), É. S. (Lichtenstein nonlinear integral equation) 332.
- Citović, P. A. s. G. V. Savinov 110.
- Ciucu, George (Chaînes à liaisons complètes) 347.
- Cives, Giacomo (Didattica della matematica) 3.
- Clark, Frank Eugene (Truncation to meet requirements on means) 354.
- George C. s. Chiao-Min Chu 413.
- Clason, W. E. (Dictionary of electronics and waveguides) 197.
- Cloizeaux, Jacques des et Pierre André (Calcul des niveaux énergétiques) 230.
- Cobine, James Dillon (Gaseous conductors) 221.
- Codyks (Tsodiks), V. M. (Sets of points where the derivative is correspondingly) 280.
- Cofa, H. (Spinnwelle im Ferrimagnetikum) 451.
- Cogan, Edward J. and Robert Z. Norman (Handbook of calculus) 275.
- Čogošvili, G. S. (Čechsche Gruppen unendlicher Ketten) 390.
- Cohen, E. G. D., J. de Boer and Z. W. Salsburg (Cell-cluster theory. III.) 222.
- — — s. Z. W. Salsburg 222.
- I. S. and Oscar Zariski (Inequality in extensions of valuations) 56.
- Michael and Richard P. Feynman (Scattering of cold neutrons from liquid helium) 445.
- Cole, J. D. (Lift of slender nose shapes) 190.
- Colebrook, F. M. and J. W. Head (Mathematics for radio and electronics) 76.
- Coles, W. J. (Theorem of van der Corput) 72.
- Collins, J. G. (Anomalous skin effect in metals) 233.
- Conner, P. E. (Action of a finite group on $S^n \times S^n$) 389.
- — — and E. E. Floyd (Orbit spaces of groups of transformations) 389.
- Constant, F. Woodbridge (Theoretical physics) 171.
- Constantinescu, Corneliu (Defekte Werte meromorpher Funktionen) 101.
- Conte, S. D. (Numerical solution of vibration problems) 399.
- Conway, H. D. (Levy-type solution for a rectangular plate) 174.
- Cooke, J. C. (Flow of fluid along cylinders) 182.
- Copeland jr., Arthur H. (H -spaces with two nontrivial homotopy groups) 391.
- Cornea, A. (Analytic functions in the neighbourhood of the boundary of a Riemann surface) 298.
- Corngold, N. (Slowing down of neutrons) 211.
- Corput, J. G. van der (Coefficients in asymptotic factorial expansions. I. II.) 99; (Limit theorem of the Laplace transformation) 319.
- Costa de Beauregard, O. (Covariance relativiste à la base de la mécanique quantique. III.) 202.
- Court, Nathan Altshiller (Transformation isotomique) 142.
- Cox, D. R. (Concomitant variable) 354.
- Craggs, J. W. (Supersonic motion of an aerofoil) 408.
- Craig, William (Herbrand-Gentzen theorem) 245.
- Crappier, G. D. (Progressive capillary waves) 193.
- Čremošnik, Gregor and Max J. O. Strutt (Bestimmung von Raumladungsfeldern) 222.
- Croisot, R. (Équivalences principales bilatères) 250.
- Crum, M. M. (Corrigendum) 129.
- Crupi, Giovanni (Onde plane magneto-idrodinamiche) 416.
- Cuculescu, Ion (Théorème de E. Hille) 328.
- Curtiss, M. H. („Monte Carlo“ methods) 139.
- Curzio, Mario (Sottogruppi d'un gruppo finito) 254; (Reticoli \cup -quasi distributivi) 259; (Questione proposta da G. Birkhoff) 259.
- Cuzzer, A. (Concetto di informazione) 351.
- Čžan Li (Chang Lee) (Annihilation of free positrons on helium atom) 439.
- Czyż, W. s. J. Sawicki 210, 435.
- Dalgarno, A. and R. McCarroll (Coupling between nuclear and electronic motion. II.) 440.
- Danskin, J. M. s. V. G. Boltjanskij 169.
- Das, A. (Perihelion shift) 420.
- Davenport, H. (Theorem of Cassels) 68.
- Davison, B. (Spherical-harmonics method for neutron transport theory problems) 438.
- Davydov, A. S. and G. F. Filippov (Moment of inertia of interacting particles) 432.
- N. A. (Unbestimmtheits-

- grenzen bei Summierung einer Reihe) 287.
- Deaux, R. (Inversion isogonale) 142.
- Debever, R. (Connexions métriques) 383.
- Degert, Günter (Grundeinheit reell-quadratischer Zahlkörper) 58.
- Dekker, Adrianus J. (Solid state physics) 225.
- Delange, Hubert (Fonctions arithmétiques fortement additives) 67; (Fonctions arithmétiques) 67; (Arithmetical functions) 273.
- Dell'Antonio, G. F. and P. Gulmanelli (Locality of β -interaction) 205.
- Demeur, M. et R. Lavalle (Atome mésique d'Hélium) 207.
- Deprit, André (Propriété des homomorphismes d'espaces de Fréchet) 322.
- Derwidué, L. (Racines complexes des équations algébriques) 336.
- Deser, S. (General relativity and the divergence problem) 203.
- Destouches, Jean-Louis (Gravitation et gravitation) 425.
- Detwiler, D. P. s. T. J. Gray 237.
- Dhawan, S. and R. Narasimha (Boundary layer flow during transition from laminar to turbulent motion) 407.
- Di Noi, Salvatore (Ampiezza di un involuppo) 152.
- Diaz, J. B. s. L. A. Ljusternik 120.
- Dickson, Douglas G. (Expansions in series of solutions of linear difference-differential equations) 113.
- Dididze, C. E. (Nichtassoziative freie Summen von Algebren) 46.
- Dietze, Horst-Dietrich (Blochwandwölbung mit Streufeld-einfluß) 451.
- Dieudonné, Jean (Artin-Hasse exponential series) 59.
- Diprima, R. C. (Diffusion of tides into permeable rock) 411.
- Dixmier, J. and W. G. Lister (Derivations of nilpotent Lie algebras) 48.
- Dombrowski, Peter (Substitutionsregel für Lebesguesche Integrale) 80.
- Donaldson, Coleman du P. s. Roger D. Sullivan 183.
- Doob, J. L. (First boundary-value problem) 312.
- Dorleijn, M. (Convergent sequences in sequence spaces) 86.
- Dorn, Dieter (Transportvorgänge in Metallen) 234.
- W. S. and H. J. Greenberg (Linear programming) 173.
- Dragoni, Giuseppe Scorza s. Scorza Dragoni, Giuseppe 171.
- Dragunova, T. E. (Verband der Rechtsideale einer Halbgruppe) 27.
- Draim, N. A. (Test for divisibility) 63.
- Drapkin, A. B. (Eigenvalues and characteristic functions of elliptical systems) 316.
- Drazin, M. P. (Rings with nil commutator ideals) 50.
- Dreyfus, Bernard s. Yves Ayant 227.
- Dubnow (Dubnov), J. S. (Fehler in geometrischen Beweisen) 2.
- Dubreil, P. (Demi-groupes ordonnés) 251.
- Duerr, Hans-Peter (Nuclear symmetry energy) 208.
- Duff, G. F. D. (Mixed problem for normal hyperbolic linear partial differential equations) 116.
- Duffin, R. J. (Poisson's integral) 122.
- Dumitrescu, Lucian (Minimum length of a shock-tube) 408.
- Dumotet, Pierre (Onde réfléchie par une lame métallique) 233.
- Dundučenko, L. E. (Univalente Funktionen) 100.
- Duvall, George E. (Pressure-volume relations in solids) 446.
- Dwinger, Ph. (Complete homomorphisms of complete lattices) 259.
- Dzjalošinskij (Dzialoshinskii), I. E. („Weak“ ferromagnetism) 452.
- Džrbašjan, M. M. (Integral transformation) 321.
- Eastman, P. S. s. M. S. Sodha 234.
- Eaves, J. C. and A. Jude Robinson (Euclidean geometry) 142.
- Edmonds, A. R. (Angular momentum in quantum mechanics) 422.
- Sheila M. (Sums of powers of natural numbers) 10.
- Edwards, R. E. (Hellinger-Toeplitz theorem) 126.
- Efimov, A. V. (Stetigkeitsmodul der Funktionen der Klasse H_1^2) 84.
- Eftimiū, C. et S. Klarsfeld (Oscillateur linéaire relativiste) 418.
- Ehrenpreis, L. and F. I. Mautner (Fourier-transform on semi-simple Lie groups. II.) 132.
- Ehrhart, Eugène (Inéquations diophantiennes linéaires) 272.
- Ehrich, Fredric (Inlet distortions in axial flow turbomachinery) 406.
- Ehrmann, Hans (Konvergenzerzeugung für Iterationsverfahren bei nichtlinearen Gleichungen) 336.
- Eilenberg, Samuel and Tudor Ganea (Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups) 254.
- Elektronische Rechenmaschinen im Versicherungsbetrieb 358.
- Elianu, Jean (Fonctions complexes et groupes continus) 382.
- Ellis, Robert (Continuity of the inverse) 41; (Locally compact transformation groups) 166.
- Él'sgol'c, L. É. (Variationsprobleme mit retardiertem Argument) 124.
- Emde, Günther (Herleitbarkeit in Modalitätenstrukturen) 244.
- Emersleben, Otto (Madelungskonstanten) 227.
- Erdős, P. (Irrationality of certain series) 74.
- et S. Marcus (Décomposition de l'espace euclidien en ensembles homogènes) 78.
- Paul and Harold N. Shapiro (Least primitive root of a prime) 63.
- Eriksen, Erik (Vacuum polarization effect on scattering phase shifts) 205.
- Eršov, L. V. (Elastoplastischer Zustand eines Exzentrers) 177.
- Erwe, Friedhelm (Limitierungstheorie) 282.
- Escande, Léopold (Suppressions dans les conduites) 193.
- Eshelby, J. D. (Elastic field of an ellipsoidal inclusion) 396.
- Éskin, G. I. and S. I. Zuchovickij (Zukhovitsky) (Tchebycheff approximation) 326.

- Estrugo, José Antonio (Zinsfuß bei Leibrenten) 358.
- Evans, G. W., R. Brousseau and R. Keirstead (Errata) 339.
- Evgrafov, M. A. and A. D. Solov'ev (Soloviev) (Irreversible operators) 135.
- Ewald, Günther (Berührenschaft von Kreisen) 365.
- Fabre de la Ripelle, Michel (Approximation de Born pour la diffusion) 425.
- Facciotti, Guido (Reti di quadrache) 147.
- Fadini, Angelo (Equazioni differenziali lineari omogenee) 300.
- Fajnberg (Fainberg), Ja. B. (Ia. B.) and N. A. Chiznjak (Khizhniak) (Charged particle passing through a laminar dielectric. I.) 213.
- Falkenheimer, Helmut (Rechnerische Flatteruntersuchungen) 407.
- Fan, Ky, Irving Glicksberg and A. J. Hoffman (Inequalities involving convex functions) 20.
- Fantappiè, Luigi (Soluzioni fondamentali delle equazioni a derivate parziali) 115.
- Faure, Robert (Équations différentielles non linéaires à coefficients périodiques) 111.
- Fava, Franco (Equazione di Jacobi) 153.
- Favard, J. (Quadratures mécaniques) 139.
- Fedenko, A. S. (Grenzräume) 156.
- Feenberg, E. and P. Goldhammer (Brillouin-Wigner perturbation procedure) 425.
- Feit, Walter (Frobenius groups) 31.
- Fejes Tóth, L. (Filling of a domain by isoperimetric discs) 145; (Fünf- und sechseckiger Stern) 164.
- Fekete, M. and J. L. Walsh (Asymptotic behavior of restricted extremal polynomials) 293.
- Félix, Lucienne (Aspect moderne des mathématiques) 1.
- Ferrell, Richard A. and Rolfe E. Glover III (Conductivity of superconducting films) 445.
- Ferris, George E. (k -visit method) 360.
- Fettis, H. E. (Eigenvalue of Latzko's differential equation) 109.
- Feynman, Richard P. s. Michael Cohen 445.
- Fichefet, J. (François-Guillaume Poignard) 243.
- Fielder, G. and R. Kurth (Mass-distribution in Jovian planets) 239.
- Filippov, A. F. (Problem von Tricomi) 120.
- G. F. s. A. S. Davydov 432.
- Fine, N. J. (Fourier-Stieltjes series of Walsh functions) 93.
- Finkelstein, R. (Permutation symmetries of beta interactions) 431.
- Finn, Robert and Walter Noll (Stokes flows) 121.
- Finzi, Bruno (G. A. Maggi) 5; (C. Somigliana) 6.
- Firsov, O. B. (Interaction energy of atoms) 440.
- Fisher, Sir Ronald A. and Frank Yates (Statistical tables) 352.
- Fleckenstein, Joachim-Otto (Kosmischer Raumbegriff) 242.
- Fletcher, G. C. (Thermal expansion of solids) 227.
- Flint, H. T. (M. Planck) 5.
- Floyd, E. E. s. P. E. Conner 389.
- Foley, H. M. (Nuclear moments of inertia) 432.
- Følner, Erling (Besicovitch almost periodic functions) 104.
- Foote, J. R. (Flow against a vertical plate) 185.
- Richard J. (Doolittle approach) 336.
- Ford, G. W. and C. J. Mullin (Scattering of polarized Dirac particles) 424.
- Hugh and George Lianis (Plastic yielding of notched strips) 398.
- Foreman, A. J. E. and W. M. Lomer (Lattice vibrations in solids) 227.
- Fort jr., M. K. (Decomposition space defined by Bing) 389.
- Fox, Ralph H. (Covering spaces) 165.
- Fractional factorial experiment designs 353.
- Fradkin, E. E. (Particle with spin $3/2$) 203; (Rarita-Schwinger method) 425.
- — and S. V. Izmajlov (Izmailov) (Transformations of equations for particles with higher spins) 202.
- Fradlin, B. N. and S. M. Šachnovskij (Shakhnovsky) (Integro-differential equations for equilibrium of gently inclined shells) 395.
- Frajese, Attilio (Opera didattica di Euclide) 3.
- Frankx, Ed. (Résolution pratique des systèmes linéaires) 137.
- Frank, E. (Continued fractions) 88.
- Frauenfelder, H., J. D. Jackson and H. W. Wyld jr. (Polarization effects following beta decay) 210.
- P. und P. Huber (Einführung in die Physik. II.) 172.
- Freeman, J. G. (Finsler-Riemann systems) 159.
- Frenkian, Aram M. (Mathématiques suméro-akkadiennes. I.) 4.
- Fried, Burton D. and John M. Richardson (Errata) 172.
- Friedlander, F. G. (Sound pulses) 410.
- Friedman, M. s. J. W. Sheldon 338.
- Friedrich, J. s. H. Schirmer 440.
- Friman, Alf (Eigenphase for the Yukawa potential) 427.
- Frisch, Harry L. (Approach to equilibrium) 194.
- Fröhlich, A. (Distributively generated near-rings. I. II.) 260.
- H. (Dielectrics) 236.
- Frölicher, Alfred and Albert Nijenhuis (Vector-valued differential forms. I.) 375.
- Fröman, Olof (Alpha decay of deformed nuclei) 210.
- Frum-Ketkov, R. L. (Behaviour of cycles when a manifold is mapped into Euclidean space) 390.
- Fuchs, L. (Directly indecomposable abelian group) 35; (Quasi nil groups) 35; (Tensorprodukt von Torsionsgruppen) 36.
- Fuglede, Bent (Extremal length and functional completion) 277.
- Fujii, Yasunori s. Osamu Hara 429.
- Fujita, Jun-ichi and Hironari Miyazawa (Pion theory of three-body forces) 205.
- Fulks, W. (Regular regions for heat equation) 312.
- Fulton, Curtis M. and Sherman K. Stein (Passage from geometry to algebra) 25.
- Thomas and George E. Owen (Stripping-type nuclear reactions) 209.

- Furuichi, S., S. Sawada and M. Yonezawa. (Polarizations of secondary muons in K-meson decay processes) 430.
- Fuster, Rafael Aguiló s. Aguiló Fuster, Rafael 311.
- Gaeta, Federico (Equazione canonica di un complesso) 372.
- Gaier, Dieter (Konforme Abbildung von Ringebieten) 298.
- Gajnov, A. T. (Identitäten für binär Liesche Ringe) 48.
- Gál, István S. (Fundamental theorems of calculus) 280; (Continuity and limiting values of functions) 281; (Compactness. I. II.) 386.
- Galafassi, Vittorio Emanuele (Superficie cubica) 147.
- Galanin, A. G. and Ju. N. (Ju. N.) Lochoy (Lokhov) (Perturbation-theory series for a nucleon) 427.
- Galin, G. Ja. (G. J.) (Shock waves in media described by equation of state) 186.
- Gambotto, Anna Maria (Sistemi semplicemente infiniti di spazi) 155.
- Ganea, Tudor s. Samuel Eilenberg 254.
- Gantmacher, F. R. (Matrizenrechnung. I.) 11.
- García Rúa, J. (T. Perez-Cacho) 6.
- Gasapina, Umberto (Teorema fondamentale dell'algebra) 242.
- Gasparini, Ida Cattaneo s. Cattaneo Gasparini, Ida 384.
- Gatto, R. (Parity non-conservation in neutrino interactions) 208.
- Gaydon, F. A. s. W. M. Shepherd 176.
- Gaziz, D. C. and R. D. Mindlin (Influence of width on velocities of long waves in plates) 400.
- Geffroy, Jean (Indépendance limite de deux variables aléatoires) 346.
- Gejlikman, B. T. (Magnetic interaction of electrons) 451.
- Gel'inskij, B. Ja. s. A. S. Alekseev 402.
- Gelfand, I. (Functional analysis and algebra) 326.
- Gel'fand, I. M. and V. B. Lidskij (Lidskii) (Regions of stability of linear canonical systems) 109.
- — — and Z. Ja. (Z. Ya.) Šapiro (Homogeneous functions) 135.
- Gel'man, A. E. (Reducibility of simultaneous differential equations) 304.
- Gentile, Enzo R. (Modules à coefficients dans un anneau associatif) 51.
- Geraščenko (Gerashchenko), O. A. and M. M. Nazarčuk (Nazarchuk) (Friction space before the entrance edge of a plate) 190.
- Gerber, Alfred (Zusammenarbeit des Institutes für Aerodynamik mit der Rüstungsindustrie) 244.
- Germogenova, T. A. (Strongly anisotropic scattering) 216.
- Gessford, John s. Kenneth J. Arrow 360.
- Geursen, S. J. (Kreisinhalte im Schulunterricht) 2.
- Ghermănescu, M. (Équation fonctionnelle de Cauchy) 334.
- Ghizzetti, Aldo (Integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali. I. II.) 309.
- Ghurye, S. G. (Exponential function) 86.
- Gibson, John B. and Joseph M. Keller (Thermal scattering of electrons) 232.
- Gigas, E. (Geschichte der Geodäsie) 4.
- Gil' (Gil), G. V. and A. D. Myškis (Myshkis) (Asymptotic behaviour of solutions of a non-linear boundary problem) 190.
- Gil de Lamadrid, J. and J. P. Jans (Connectedness in topological rings) 56.
- Gilardini, Aldo L. and Sanborn C. Brown (Microwave conductivity of a plasma) 197.
- Gilbert, Walter (Dispersion relations for pion-nucleon scattering) 205.
- Gillis, J. and H. H. Goldstine (Taylor problem for superposed fluids) 180.
- Gillman, L. (Rings with Hausdorff structure space) 263.
- Ginsburg, Th., L. Meyer and H. Sprenger (zusammengestellt von) (Bibliographie Akeret) 244.
- Ginzburg, V. L. (Superconducting films) 224.
- — — und V. P. Šabanskij (Kinetische Temperatur der Elektronen in Metallen) 232.
- Giuliano, Landolino $\left(\int_a^b f(x) \cdot \varphi(hx, \tau) dx \text{ quando } h \rightarrow +\infty \right)$ 277.
- Glaser, V. and B. Jakšić (Bloch integral equation) 231; (Variation principle in electrical conductivity) 232.
- Glauber, R. J. s. P. C. Martin 424.
- Glauber, A. E. (Interacting particles obeying a noncentral interaction law. I.) 218.
- Glazman, I. M. (Oscillation theorems for differential equations) 107; (Extension theory of Hermitian operators) 331.
- Glicksberg, Irving s. Ky Fan 20.
- Glover III, Rolfe E. s. Richard A. Ferrell 445.
- Gluškov, V. M. (Liesche Algebren lokal bikompakter Gruppen) 42; (Lokal bikompakte Gruppen und fünftes Hilbertsches Problem) 42.
- Gnedenko, B. V. (Problem of mass service) 351.
- Gochberg, I. C. (Index, Nullelemente und Kernelemente eines Operators) 330.
- Göcke, Hermann (Rheolineare Schwingungen) 110.
- Godeaux, Lucien (Involutions rationnelles) 149; (Points de diramation d'une surface multiple) 371; (Lieu des droites des surfaces cubiques) 372.
- Godwin, H. J. (Quartic fields of signature one) 57; ($x^3 + y^3 + z^3 = 1$) 65.
- Goebel, C. J. (Chew-Low equation) 205.
- Goertzel, Gerald (Finite trigonometric series) 139.
- Gołab, S. (Übertragungen) 159.
- Gold, Louis (Plasma approach to metallic conduction) 440.
- Goldhammer, P. s. E. Feenberg 425.
- Goldstein, Louis (Theory of liquids) 223; (Liquid He — 4 phase transformation) 224.
- Goldstine, H. H. (Minimum in abstract space) 123.
- — — s. J. Gillis 180.
- Golf'and (Golfand), Ju. A. (Yu. A.) (Fermi fields) 204.
- Golovin, O. N. s. P. S. Alexandroff 4.
- Good, I. J. (Legendre polynomials and trinomial random walks) 349; (Random motion and analytic continued fractions) 349.
- jr., R. H. (Transmission of electrons through metal surfaces) 237.

- Goodmann, Bernard (Adiabatic *vs* Bloch approximation) 449.
- Goormaghtigh, R. (Formules approchées) 92; (Coniques inscrites à un triangle) 143; (Polygones inscriptibles) 145.
- Gordevskij, D. Z. (An die Redaktion) 147.
- Gosh, K. M. (Axisymmetric turbulence) 407.
- Gould, H. W. (Vandermonde's convolution) 10.
- Gran Olsson, R. (Rechteckige Platte) 174.
- Granas, A. (Satz von K. Borsuk) 128.
- Grangei, Vicente Casal s. Casal
- Grangei, Vicente 359.
- Grätzer, G. and E. T. Schmidt (Jordan-Dedekind chain condition) 45; (Problem of M. H. Stone) 45.
- Gray, Ernest P. s. Robert W. Hart 434.
- T. J., D. P. Detwiler, D. E. Rase, W. G. Lawrence, R. R. West and T. J. Jennings (Defect solid state) 237.
- Greber, Isaac, Raimo J. Hakkinen and Leon Trilling (Laminar boundary layer oblique shock wave interaction) 408.
- Green, A. E. and R. S. Rivlin (Non-linear materials with memory) 176.
- H. F. (Rings of infinite matrices) 127.
- Greenberg, H. J. s. W. S. Dorn 173.
- Howard s. Sidney Borowitz 215.
- Greenwald, Dakota Ulrich (Linear programming) 336.
- Gribov, V. N. (Excitation of rotational states) 432; (Reactions involving the formation of three low energy particles) 436.
- Griffiths, H. B. (Borel sets and countable series of operations) 8.
- Gröbner, Wolfgang (Equazioni differenziali nel campo analitico) 299.
- Grömer, H. (Potenzreihendarstellungen für Winkel-, Hyperbel- und Exponentialfunktionen) 2.
- Groot, J. de (Equivalent abelian groups) 35; (Metric that characterizes dimension) 167.
- Gross, Eugene P. (Interacting bosons) 223.
- Grosswald, Emil s. Paul T. Bateman 71.
- Grothendieck, A. (Fibres holomorphes sur la sphère de Riemann) 170.
- Grümm, H. (Kinetische Ausgleichsvorgänge im Kernreaktor) 212.
- und K. H. Höcker (Einflußfunktion in Reaktorkinetik) 212.
- Grün, Otto (Gruppentheorie. VI.) 28.
- Grzegorzcyk, A. (Computable real continuous functions) 248.
- Gubarov, A. I. (Scattering of electrons in a liquid) 223.
- Guess, Arnold W. s. Hari K. Sen 409.
- Guggenberger, Theo (Bremsstrahlung von Elektronen) 199.
- Guier, William H. and Robert W. Hart (Energy dependence of cross sections) 438.
- s. Robert W. Hart 434.
- Guiraud, Jean-Pierre (Pression initial à la pointe d'un profil) 406.
- Gulmanelli, P. s. G. F. Del'Antonio 205.
- Gundlach, Karl-Bernhard (Schar ganzer automorpher Formen zu hyperabelschen Transformationsgruppen) 104.
- Günther, Wilhelm s. Constantin Weber 394.
- Gupta, Hansraj, C. E. Gwyther and J. C. P. Miller (Tables of partitions) 62.
- M. R. (Bursts produced by mesons) 438.
- Suraj N. (Theories of gravitation) 418.
- Gužavin (Guzhavin), V. V. and I. P. Ivanenko (Lateral distribution of particles in an electron-photon shower) 213; (Particles in a cascade shower maximum) 438.
- Gwyther, C. E. s. Hansraj Gupta 62.
- Gygi, Hans (J. Ackeret und die schweizerische Maschinenindustrie) 244.
- Hack, M. N. (Modified plane waves and rearrangement collisions) 426.
- Hacques, Gérard (Effet de conicité d'une aile en écoulement) 182; (Courbure ou de l'épaisseur d'un profil d'aile) 406; (Effet d'incidence d'une surface portante annulaire) 406.
- Haefliger, André et Georges Reeb (Variétés à une dimension) 171.
- Haering, R. R. (Band structure of graphite) 230.
- Hahn, H. s. G. Leibfried 446.
- Hakkinen, Raimo J. s. Isaac Greber 408.
- Halanay (Chalanaj), A. and S. Sandor (Šandor) (Sturm type theorems) 107.
- Hale, J. K. s. L. Cesari 112.
- Hall jr., Marshall (Burnside problem for exponent 6) 30.
- Halmos, P. R. (Hilbert space) 124.
- Halperin, J. s. R. W. Stoughton 213.
- Hamel, B. (On-off controlled higher-order systems) 140.
- Hammer, Preston C. and A. Wayne Wymore (Multiple integrals. I.) 139.
- Hammitt, Andrew G. (Shock waves and turbulent boundary layers) 191.
- F. G. (Bending-stresses in tubes) 175.
- Handscorn, D. C. (Random disorientation of two cubes) 352.
- Hanin, Meir (Aperiodic wave in a viscous medium) 399; (Problem in wave propagation) 400.
- Hanner, O. (Locally normal spaces) 165.
- Hara, Osamu, Yasunori Fujii and Yoshio Ohnuki (Pion-nucleon interaction. I.) 429.
- Harada, Manabu (Dimension of modules and algebras) 267.
- Hardiman, N. J. (Two-dimensional problems in elasticity) 396.
- Harish-Chandra (Fourier transforms on a semisimple Lie algebra. II.) 329.
- Harper, P. G. (Interaction of electrons with lattice vibrations) 232.
- s. J. J. O'Dwyer 449.
- Harris, A. J. (Maximum-minimum problem) 362.
- Eugene K. (Probability of survival of bacteria) 358.
- Isadore and Laurie M. Brown (Radiative corrections to pair annihilation) 428.
- Hart, Robert W., Ernest P. Gray and William H. Guier (Energy dependence of cross sections near threshold) 434.

- Hart, Robert W., s. William H. Guier 438.
- Hartman, Philip (Hölder continuity) 314.
- S. et A. Hulanicki (Sous-groupes purs et leurs duals) 41.
- und S. Knapowski (Bruchteile von $p\alpha$) 72.
- Hartman, S. and C. Ryll-Nardzewski (Lokalkompakte abelsche Gruppen) 41.
- Hartree, D. R. (Exchange terms in Fock's equations) 439.
- Douglas R. (Calculation of atomic structures) 214.
- Hartunian, R. A. and W. R. Sears (Gas bubbles in liquids) 444.
- Haser, L. (Intensité dans la tête d'une comète) 240.
- Hasse, Helmut (H. L. Schmid) 244.
- Hatheway, W. H. and E. J. Williams (Plot size and variability of crop yields) 358.
- Hatori, Hirohisa (Distribution of completion times) 352.
- Hausner, Alvin (Tauberian theorem for group algebras) 131; (Ideals in Banach algebra) 131.
- Hayakawa, Satio and Toshio Marumori (Moments of inertia of rotating nuclei) 432.
- Hayashi, Chihiro (Initial conditions for nonlinear oscillations) 112.
- Yoshiaki (Dowker's problem) 386.
- Hayes, Wallace D. (Vorticity jump across a gasdynamic discontinuity) 186.
- Head, J. W. s. F. M. Colebrook 76.
- Heaps, H. S. (Reflection coefficient) 410.
- Hecquet, J. (Bihauteurs d'un tétraèdre) 144.
- Hedman, Sven (Velocity distribution in a curved duct) 405.
- Heider, L. J. (T -sets and abstract (L)-spaces) 128.
- Heimann, Walter (Digitalrechner) 140.
- Heinhold, J. (Konforme Abbildung schlichter Gebiete) 298.
- Heisenberg, W. (Quantum theory of fields) 204.
- Hellan jr., Kåre (Rotation moments in continuous structures) 397.
- Heller, I. (Linear systems with integral valued solutions) 19.
- Helmhold, H. B. (Finite-span blowing wing) 182.
- Hendriksen, Melvin and J. R. Isbell (Local connectedness in Stone-Čech compactification) 386.
- Henin, F. s. I. Prigogine 194.
- Henstock, Ralph (Ward's Perron-Stieltjes integral) 80.
- Hersch, Joseph (Récurrences d'ordre supérieur) 139.
- Herstein, I. N. (Submodules of simple rings with involution) 51; (Commutativity of rings) 54.
- Herz, Carl S. (Summability methods and spectral analysis) 321.
- Heselden, G. P. M. (Sum of a certain series) 91.
- Hettner, G. (Bremsstrahlung in Plasmen) 199.
- Higman, Graham (Automorphisms without non-trivial fixed elements) 32; (Finite groups) 32.
- Hintenberger, H. und L. A. König (Bildfehler in Massenspektrometern) 415.
- Hiong, King-Lai (Fonctions méromorphes) 296.
- Hirokawa, Hiroshi (Riemann-Cesàro methods of summability. II.) 286.
- Hirsch, P. B. s. H. H. Atkinson 447.
- Hirschman jr., I. I. (Entropy) 351.
- Hlawka, E. (Normal gleichverteilte Folgen auf kompakten Räumen) 73.
- Hobbs, Norman P. (Downwash resulting from encounter of an airfoil with a gust field) 407.
- Höcker, K. H. und F. Wagner (Zündneutronen in einem Reaktor) 212.
- — — s. H. Grümmer 212.
- Hodges, John H. (Bordered matrices) 13.
- Hoffman, A. J. s. Ky Fan 20.
- Paul J. (Predetermination of test weights) 355.
- jr., S. P. s. V. M. Volosov 112.
- Hofsommer, D. J. (Flux theorem) 198.
- Hohenberg, Fritz (Projektionen projektiver Räume) 146.
- Honda, Kin'ya (Theorem of Kulikov) 34.
- Hooker, P. F. and L. H. Longley-Cook (Life and other contingencies) 358.
- Hooley, C. (Asymptotic formula) 273.
- Hörig, J. (Frequenzspektrum einer periodischen Zeitfunktion) 139.
- Hove, Léon van (Approach to equilibrium in quantum statistics) 194.
- Hrivnák, Lubomír (Electrons in ionic crystals) 450.
- Huber, P. s. P. Frauenfelder 172.
- Huckel, Vera s. Homer G. Morgan 186.
- Hulanicki, A. (Paper of de Groot) 35.
- — s. S. Hartman 41.
- Hummel, J. A. (Coefficient regions of starlike functions) 295.
- Hunter, Joseph L. (Acoustics) 409.
- Huppert, Bertram (Lineare auflösbare Gruppen) 37; (Zweifach transitive Permutationsgruppen) 255.
- Hutcherson, W. R. and N. A. Childress (Surfaces obtained from involutions) 372.
- Hyman, Ray s. Robert R. Bush 76.
- Ibragimov, I. A. (Probability distribution of class L) 344.
- Ichijo, Yoshihiro (Darboux lines) 158.
- Il'in (Ilyin), V. A. (Uniform convergence of expansions in characteristic functions) 291; (Entwicklungen nach Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators) 292; (Fouriersche Methode für Schwingungsgleichung) 310.
- Ineichen, R. (Satz von Bernoulli) 2.
- Iochvidov, I. S. und M. G. Krejn (Bemerkung zu „Spektraltheorie der Operatoren“) 332.
- Isbell, J. R. s. Melvin Hendriksen 386.
- Isé, Kusuo s. Mitio Nagumo 301.
- Iséki, Kiyoshi (Complete orthonormal sets in Hilbert space) 129; (Function space of A. Grothendieck) 325.
- Ishida, Makoto (Dedekind's zeta-functions) 58.
- Ishii, Yoshihito (Conharmonic transformations) 157.
- Isii, Keiiti (Distribution functions and their moments) 344.
- Ismajlov, S. V. s. E. E. Fradkin 202.
- Italiani, Mario (Punto unito a Jacobiano nullo) 152.

- Ivachnin (Ivakhnin), I. I. (Stability of a conic shell) 175.
- Ivanenko, D. D. s. A. A. Sokolov 416.
- I. P. s. V. V. Gužavin 213, 438.
- Iwano, Yasushi s. Takayuki Tamura 250.
- Jablonskij, S. V. (Funktionen der Algebra der Logik) 9.
- Jackson, H. L. W. s. G. Power 123.
- J. D. s. H. Frauenfelder 210.
- Jacobson, N. (Separable and central simple algebras) 52.
- and L. J. Paige (Jordan algebras with two generators) 46.
- s. A. A. Albert 46.
- Jacobsthal, Ernst (Multiplizität der Fixpunkte) 294.
- Jaekel, K. (Nebensymmetrische Matrizen) 15; (Verteilungen von Warte- und Anschlußzeiten) 355.
- Jaeger, Thomas s. B. G. Neal 176.
- Jakimov (Iakimov), Ju. L. (Yu. L.) (Asymptotic solution to the equations of gas motion) 186.
- Jakimovski, Amnon (Tauberian properties of Hölder transformations) 288.
- Jakšić, B. (Bloch integral equation) 449.
- s. V. Glaser 231, 232.
- Jakubovič (Iakubovich), V. A. (Non-linear differential equations) 141.
- James, Glenn (editor) (Tree of mathematics) 2.
- Robert C. (Reflexivity and supremum of linear functionals) 127.
- Jancel, Raymond et Théo Kahan (Décharge dans une cavité électromagnétique) 444.
- Jankowski, W. (Zéros d'un polynôme) 22.
- Jánossy, L. (Energy of a particle) 439.
- Jans, J. P. (Indecomposable representations of algebras) 52; (Compact rings with open radical) 268.
- s. J. Gil de Lamadrid 56.
- Jarutkin, N. G. (Nachbarschaftsräume) 165.
- Javorskaja (Iavorskaia), I. M. (Oscillations of a cylinder of gas) 442.
- Jeger, M. (Axonometrisches Prinzip) 393.
- Jenkins, Francis A. and Harvey E. White (Fundamentals of optics) 412.
- Jennings, S. A. and Rimhak Ree (Lie algebras of characteristic p) 48.
- T. J. s. T. J. Gray 237.
- Jessen, Børge (Almost periodic functions) 104.
- Jha, P. (Guiding curves of rectilinear congruence) 379.
- Jones, H. (Specific heat of metals) 226.
- Jonscher, A. K. (Diffusion of minority carriers) 234; (Drift of minority carriers) 234.
- Jordan, P. (Schrägverbände) 44.
- Juncosa, M. L. and David Young (Crank-Nicolson procedure) 338.
- Jurkat, W. B. (Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes) 287.
- Just, K. (Heisenbergsche Feldgleichung) 204.
- Kaazik, Ju. Ja. (Yu. J.) (Iteration processes for operation equations) 333.
- Kabir, P. K. and E. E. Salpeter (Corrections to ground-state energy of helium) 202.
- Kaczér, Jan (Interaction energy of parallel Bloch walls) 451.
- Kaganov, M. I., I. M. Lifšic (Lifshitz) and L. V. Tanatarov (Relaxation between electrons and crystalline lattice) 232.
- s. É. A. Kaner 237.
- Kahan, Théo s. Raymond Jancel 444.
- Kahana, S. and D. L. Pursey (Coupling constant invariants in β -decay) 437.
- Kähler, Erich (Algebra und Differentialrechnung) 57.
- Kalaba, Robert s. Richard Bellman 352.
- Kaldor, Nicholas (Capitalist evolution) 359.
- Kalos, M. H. s. L. C. Biedenharn 431.
- Kamefuchi, Susumu (Landau's method of integration) 427.
- Kanazawa, Hideo (Coulomb interactions and the diamagnetism of free electrons. II.) 446.
- Kaner, É. A. (E. A.) and M. I. Kaganov (Dielectric constant high frequencies) 237.
- Kantorovič (Kantorovich), L. V. (Analyzing some extremum problems) 361.
- — — and I. P. Natanson (G. M. Fichtengol'c) 5.
- Kanwal, R. P. (Curved shocks in gas flows) 408.
- Kaplan, Wilfried (Stability theory) 302.
- Karagaplov, M. I. (Konjugiertheit der Sylowschen p -Untergruppen) 29.
- Karlin, Samuel s. Kenneth J. Arrow 360.
- Karp, Samuel N. (Application of Sturm-Liouville theory) 120.
- Karrer, Guido (Spektraltheorie der Automorphismen Hermitescher Formen) 16.
- Kaškarov, V. P. (Fadenströmungs-Bewegung einer zähen Flüssigkeit) 404.
- Kasuga, Takashi (Sobolev-Friedrichs' generalisation of derivatives) 83; (Kernel of non-Carleman type) 136.
- Katznelson, Yitzhak (Problème „ $M(r)$ “) 295.
- Kaufman, A. N. s. M. N. Rosenbluth 441.
- Kaul, R. N. and Ram Behari (Lie's theorem on null lines) 376.
- Kauzmann, Walter (Quantum chemistry) 217.
- Kawaguchi, Akitsugu and Detlef Laugwitz (Minkowski spaces) 383.
- Masaaki (Isotopic spin selection rule) 207.
- Kawai, Itizo (Locally convex lattices) 322.
- Mitsuji and Masayuki Nagasaki (Collision matrix for nuclear reactions. I.) 434.
- Kawamura, Hazimu (Deformation potential of potassium chloride) 450.
- Keirstead, R. s. G. W. Evans 339.
- Keith, H. D. (Ship waves) 193.
- Keller, Curt (Aerodynamische Wärmekraftanlagen) 244.
- H. B. and B. Wendroff (Time dependent transport equations) 220.
- Joseph B. (Teapot effect) 183.
- M. s. John B. Gibson 232.
- Kelly, Don C., Henry Margenau and Sanborn C. Brown (Cyclotron resonance) 219.
- P. J. and E. G. Straus (Inversive and conformal convexity) 162.

- Kemeny, John G. and J. Laurie Snell (Baccarat) 352.
- Kemp, Nelson H. (Hypersonic stagnation-point flow) 186.
- Kemperman, J. H. B. (Functional equation) 334.
- Kempner, Joseph (Stability equations for conical shells) 174.
- Kendall, David G. and G. E. H. Reuter (Ergodic projection for Markov chains) 348.
- Kerner, Edward H. (Forced and damped oscillator) 423.
- Keune, Friedrich and Werner Schmidt (Invarianzkriterium für Unter- und Überschall-Strömung an äquivalenten Körpern) 405.
- Khamrui, S. R. (Motion of an infinite viscous liquid due to the rotation of a cylinder) 404; (Flow of a viscous liquid through a tube) 404.
- Khuri, N. N. (Schrödinger scattering amplitude) 425.
- Kiefer, J. and Lionel Weiss (Sequential probability ratio tests) 354.
- Kikodze, É. B. (Zusammengesetzte Kommutatoren) 30.
- Kikuchi, Ken (Deuteron production) 435.
- Kimura, Naoki (Idempotent semigroups. I.) 251.
- King, K. M. s. D. H. Tycko 215.
- Kinney, J. Sterling (Structural analysis) 173.
- Kinoshita, Tochiro and Alberto Sirlin (Polarization of electrons in muon decay) 206.
- Kippenhahn, R. (Plasma-Konfigurationen mit Oberflächenströmen) 417.
- Kirby, D. (Isolated multiple point of a surface. I—III.) 370.
- Kiržnic (Kirzhnits), D. A. (Thomas-Fermi equation) 423.
- Kiš, O. (Mechanische Quadratur) 341.
- Kiškin, B. P. (Konzentration der Spannungen bei ebener Deformation) 175.
- Klarsfeld, S. s. C. Eftimiu 418.
- Klee jr., V. L. (Extremal structure of convex sets. I. II.) 125.
- Kleinecke, David C. (Operator commutators) 129.
- Kleinfeld, Erwin (Alternative nil rings) 261.
- Klemens, P. G. (Scattering problems in conduction theory) 232.
- Klingen, Helmut (Hermitesche Modulfunktionen) 103.
- Klinger, M. I. (Galvanomagnetic phenomena in semiconductors) 234.
- Knapowski, S. (Arithmetik der Polynome) 63.
- s. S. Hartman 72.
- Knox, Robert S. (Excited-state wave functions for argon) 215.
- Kober, H. (Burkill integral) 276.
- Kodama, Yukihiro (Homotopically stable points) 168.
- Koga, Isaac, Masanao Aruga and Yōichirō Yoshinaka (Plane elastic waves in a piezoelectric crystalline medium) 401.
- Kogonija (Kogonia), P. G. (Condensation points of the set of Markoff numbers) 274.
- Kohls, C. W. (Space of prime ideals) 263; (Ideals in rings of continuous functions) 327.
- Kolmogorov, A. N. (Théorèmes asymptotiques uniformes pour des sommes des variables aléatoires) 345.
- — — und M. A. Krasnosel'skij (M. G. Krejn) 5.
- Kondo, J. s. J. Yamashita 451.
- Jun (Band theory of superexchange interaction) 448.
- König, L. A. s. H. Hintenberger 415.
- Konoplev, V. P. (Asymptotic representation of second order linear differential equations) 110.
- Kontorovič (Kontorovich), V. M. (Reflection of sound by a shock wave) 409.
- Koosis, Paul (Irreducible unitary representation of a compact group) 328.
- Koppe, H. s. B. Mühlshlegel 216.
- Kornbichler, H. s. H. J. Brüchner 210.
- Korobov, N. M. (Rational trigonometrical sums) 71; (Zeros of $\zeta(s)$ function) 71.
- Korolev, L. N. (Coding) 11.
- Košev, (Koshelev), A. I. (Differentiability of solutions of elliptical differential equations) 315.
- Kostant, Bertram (Classical groups) 43.
- Kostomarov, D. P. (Boundary problems for eigen-values of ordinary differential equations) 107.
- Kostrikin, A. I. (Liesche Ringe) 261.
- Kotal, Miroslav (Relaxationsmethode) 338.
- Kotelnikow, W. A. (Stabilisierung von Regelsystemen) 141.
- Koutecký, Jaroslav (Surface states of electrons) 230; (Surface electronic states) 230.
- Koval', P. I. (Asymptotic behaviour of linear difference equations) 113.
- Kovalenko, I. N. (Correlation functions of processes associated with serving problems) 356.
- Kovancov, N. I. (Quasi-speziale Komplexe) 154; (Familien von Kongruenzen) 154.
- (Kovantsov), N. I. (Ruled surface geometry) 380.
- Kowalsky, Hans-Joachim (Einbettung metrischer Räume) 388.
- Krabbe, G. L. (Spectral invariance of convolution operators) 134.
- Kramar, F. D. and I. D. Moljukov (I. I. Somov) 5.
- Kramer, Henry P. (Perturbation of differential operators) 136.
- Krasil'shikova (Krasilshchikova), E. A. (Wing of finite span in compressible medium) 185.
- Krasnosel'skij (Krasnoselsky), M. A. and Ja. B. (J. B.) Rutickij (Rutitsky) (Nonlinear operators in Orlicz spaces) 333.
- — — s. A. N. Kolmogorov 5.
- Krasovskij (Krasovskiy), N. N. (Periodical solutions of differential equations) 114.
- Krastiń, A. F. (Rechnen mit Krakowianen) 336.
- Kraus, O. and W. H. Tanttla (Nuclear magnetization) 236.
- Kreisel, G. and H. Putnam (Unableitbarkeitsbeweismethode für intuitionistische Aussagenkalkül) 7.
- Georg et Daniel Lacombe (Ensembles récursivement mesurables) 9.
- Krejn, M. G. (Barische Basen des Hilbertschen Raumes) 325.
- — — s. I. S. Iochvidov 332.
- (Krein), S. G. (Correctness classes for boundary problems) 331.

- Krieger, T. J. and M. S. Nelkin (Slow-neutron scattering by molecules) 217.
- Kručković, G. I. (Bewegungen in halbreduziblen Riemannschen Räumen) 156.
- Krzywoblocki, M. Z. v. (Free molecule and Newtonian flows) 218.
- Kubota, Tomio (Unit groups of cyclic extensions) 58; (Galois group of maximal abelian extension) 268.
- Kuiper, N. H. (Convex sets) 163.
- Kuipers, L. and B. Meulenbeld (Legendre's associated differential equation. I. II.) 95.
- Kulikovskij (Kulikovskii), A. G. (Pulsations of a plasma filament) 442.
- Kunz, Kaiser S. (Numerical analysis) 336.
- Kupcov, N. P. (Konvergenz der Fourierintegrale) 320.
- Kuranishi, M. s. L. Auslander 383.
- Kurdgelaidze, D. F. (Meson and spinor field equations) 430.
- Kursunoglu, Behram (Theory of gravitation) 418.
- Kurth, R. s. G. Fielder 239.
- Rudolf (Statistisch-stationärer Zustand mechanischer Systeme) 193; (Ergodenproblem) 194.
- Kuščenko, V. S. (Logarithmischer Rechenstab) 342.
- Küssner, Hans Georg (Randwertproblem der elliptischen Tragfläche) 405.
- Labrador, J. F. (V. Volterra) 6.
- Lacombe, Daniel s. Georg Kreisel 9.
- Lagrange, René (Groupe de la famille des coniques du plan) 366; (Groupe ponctuel conservant la famille des coniques) 367.
- Laha, R. G. (Nonnormal distribution) 344.
- Lahiri, B. K. s. H. M. Sen-gupta 83.
- Lamadrid, J. Gil de s. Gil de Lamadrid, J. 56.
- Lambek, Joachim (Goursat's theorem) 252.
- Lamperti, John (Flows of measure-preserving transformations) 133.
- Lamprecht, Erich (Bewertungssysteme und Zetafunktionen algebraischer Funktionkörper. III.) 270.
- Lanczos, Cornelius (Electricity and general relativity) 421.
- Landau, E. (Number theory) 62.
- L. D. and E. M. Lifšic (Hydrodynamic fluctuations) 417.
- Landis, E. M. and I. G. Petrovskij (Petrovsky) (Limit cycles of $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$) 307; (Grenzyklen der Gleichung $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$) 308.
- Lane, N. D. (Arcs of order $n + 1$ in conformal n -space) 161.
- Lang, Serge (Divisors and endomorphisms on abelian variety) 61.
- s. Wei-Liang Chow 61.
- Lascu, Alexandru T. (Gruppi di omologia della varietà) 151.
- Laskar, Williams (Transitions radiatives dans le cortège électronique) 237.
- Last, J. T. s. W. Shockley 235.
- Lau, H. (Durchbruchspannungen in Gasen) 220.
- Laudet, M. (Calcul numérique des champs) 198.
- Laugwitz, Detlef s. Akitsugu Kawaguchi 383.
- Laumans, B. A. M. (Valuation by groups for policies) 358.
- Laval, Jean (Élasticité du milieu cristallin. I—III.) 228.
- Lavalle, R. s. M. Demeur 207.
- Lavruk, B. R. (Grenzprobleme für elliptische Systeme) 119.
- Lawden, D. F. (Mathematical problems of astronautics) 238.
- Lawrence, W. G. s. T. J. Gray 237.
- Lax, B. (Electronic band structure of solids) 448.
- Lee, C. N. (Coveringspaces) 165.
- Leech, John (Strings of beads) 11.
- Leeuw, K. de (Functions on subsets of the space of n complex variables) 102.
- Lehrer, Yehiel (Functions of matrices) 15.
- Lehto, Olli (Values and singularities of analytic functions) 297.
- Leibfried, G. und H. Hahn (Elastische Konstanten von Alkalihalogenidkristallen) 446.
- Lejman, L. Ja. (Existenzbedingungen für das Kolmogorovsche Integral) 276.
- Lekkerkerker, C. G. (Volume of compound convex bodies) 69.
- Lelong, Pierre (Integration on an analytic complex subvariety) 308; (Intégration sur un ensemble analytique complexe) 309.
- Lenz, Friedrich (Teilchenstrom bei Vielfachstreuung) 415.
- Hanfried (Geradlinige Potentialfelder) 411.
- Lepin, A. Ja. s. A. D. Myškis 332.
- Leser, Tadeusz s. John P. Vinti 96.
- Lessen, Martin (Thermoelastic damping) 401.
- Leung, K. T. (Lokal normale Varietäten) 370.
- Levi, Giuseppe (N. Beccari) 5.
- Levine, Philip (Incompressible potential flow about bodies in ducts) 181.
- Lévy, Paul (Processus strictement markoviens) 347.
- Lewandowski, Zdzisław (Théorèmes de Schild) 100.
- Li, Čžan s. Čžan Li 439.
- Lianis, George s. Hugh Ford 398.
- Libera, Sister Mary Andrew s. Andrew Libera, Sister Mary 143.
- Lidskij (Lidskii), V. B. (Continuity of the resolvent of a differential operator) 108; (Spectra of a perturbed differential operator) 120; (System of eigen elements) 331.
- s. I. M. Gel'fand 109.
- Lieberstein, H. M. (Radiation problem of A. Weinstein) 310.
- Lifšic, E. M. s. L. D. Landau 417.
- (Lifšitz), I. M. (Electrical conductivity of metals) 449.
- s. M. I. Kaganov 232.
- Lighthill, M. J. (Three-dimensions disturbances to a shear flow) 402; (Dissociating gas. I.) 443.
- Linfoot, E. H. s. G. Black 414.
- Linnik, Ju. V. (Gitterpunkte auf der Kugel) 70.
- Lippert, Werner (Kontrast flächenförmiger Objekte im Elektronenmikroskop) 415.
- Lippmann, Horst (Charakterisierung der Sinusfunktion) 162.
- Lister, W. G. s. J. Dixmier 48.
- Littlewood, D. E. (Inner plethysm of S -functions) 36; (Products and plethysms of characters) 36.
- Littman, Walter (Periodic waves near critical speed) 192.

- Ljusternik (Lyusternik), L. A. (Difference approximations of the Laplace operator) 120.
 — — — — s. A. F. Bermant 75.
 — — — — s. M. I. Višik 117.
- Löbell, Frank (Einfluß einer Flächentransformation auf geodätische Krümmungen) 377.
- Locher-Ernst, Louis (Raum und Gegenraum) 365.
- Lochov, Ju. N. s. A. G. Galanin 427.
- Lockwood, E. H. (Negative pedal of the ellipse) 367.
- Logunov, A. A. s. N. N. Bogolubov 426.
- Lomer, W. M. s. A. J. E. Foreman 227.
- Longley-Cook, L. H. s. P. F. Hooker 358.
- Longmire, C. L. s. M. N. Rosenbluth 443.
- Loonstra, F. (Erweiterungen von Grenzgruppen) 29.
- Lopatinskij (Lopatinsky), Ja. B. (Y. B.) Cauchy's problem for an equation of the Schrödinger type) 120.
- Lopes, L. s. M. Marcus 21.
- Łoś, J. (Abelian groups) 34.
- Lotkin, Mark (Partial summation by matrix methods) 10.
- Loud, W. S. (Forced nonlinear systems) 306.
- Lowdenslager, D. B. (Postulates for general quantum mechanics) 130.
- Lowenstein, Lloyd L. (Mathematics in business) 359.
- Lubelski, Salomon 5.
- Ludwig, G. (Ergodensatz und makroskopische Observablen) 194.
- Luu, Thoai-Sum (Déviation d'un jet principal) 182.
- Lykova, O. B. (Differential equations in the neighbourhood of closed orbits) 305.
- Mabey, Dennis G. (Swirling viscous flow) 183.
- Macke, Wilhelm (Wellen) 394.
- Mackie, A. G. (Drag in problems solved by the hodograph method) 402.
- MacNerney, J. S. (Quasi-harmonic operators) 332.
- MacRobert, T. M. (Integrals allied to Airy's integrals) 98.
- Madelung, Erwin (Mathematische Hilfsmittel des Physikers) 172.
- Maehara, Shōji (Skolem's theorem) 8.
- Mahalingam, S. (Forced vibration of systems) 178.
- Mahler, K. (Matrix representation of residue classes) 13.
- Mal'cev, A. I. (Models which possess the operation of generation) 7; (Freie topologische Algebren) 43; (Derivative operations and predicates) 245.
- Malgrange, Bernard (Plongement des variétés analytiques-réelles) 391; (Faisceaux sur des variétés analytiques réelles) 392.
- Malyšev, A. V. (Gitterpunkte auf Ellipsoiden) 69.
 — (Malyshev), A. V. (Integer points on a sphere) 70.
- Manaresi, Fabio (Serie multiple di Fourier) 293.
- Manarini, Mario (Asse centrale di un sistema di vettori applicati) 172; (Per un liquido che riempie un vaso) 181.
- Mandan, Sahib Ram (Möbius tetrads) 146.
- Manevič (Manevich), V. A. (Representation of collineation) 146; (Elemente von Systemen von Kollineationen) 366.
- Manfredi, Bianca (Equazione reologica) 177.
- Mapleton, Robert A. (Ionization and excitation of helium by protons) 217.
- Maranda, J.-M. (Factorization rings) 264.
- Marathe, C. R. (Moduli of rectangular matrices) 20.
- Maravall Casesnoves, Dario (Geraden konstanten Momenten) 173.
- Marčenko, V. A. s. Z. S. Agranovič 109.
- March, N. H. s. C. Carter 217.
- Marchionna, Ermanno (Varietà di prima specie) 369; (Superficie aritmeticamente regolari) 369.
- Marcus, M. and L. Lopes (Inequalities for symmetric functions) 21.
 — — and B. N. Moyls (Elementary symmetric functions of Hermitian forms) 21; (Maximum principle of Ky Fan) 21.
 — — — — and R. Westwick (Extreme value results for Hermitian matrices) 20.
 — Marvin (Convex functions of quadratic forms) 21.
 — S. P. Erdős 78.
 — Solomon (Critère de finitude pour les fonctions sous-additives) 83; (Fonctions convexes) 85.
- Margenau, Henry (Conductivity of plasmas to micro-waves) 440.
 — — s. Don C. Kelly 219.
- Marin, Joseph (Theories of strength for combined stresses) 176.
- Marinescu, G. (Distributions à valeurs dans le dual d'un espace de Banach) 134.
- Markov, A. A. (Inversion complexity of function systems) 246.
- Markušević, A. I. (Reihen) 86.
- Marmion, A. (Tétraèdre à bi-hauteurs égales) 144.
- Martin, P. C. and R. J. Glauber (Radiative orbital electron capture) 424.
- Martynov, A. V. (Local infinite divisibility of Markoff processes) 349.
- Marumori, Toshio s. Satio Hayakawa 432.
- Massera, J. L. and J. J. Schäffer (Berichtigung) 86.
- Matinjan, S. G. (Zerfall der K-Mesonen) 206.
- Matorin, A. P. (Maxima of the absolute values of a function) 85.
- Matschinski, Matthias (Équations de la plasticité) 176.
- Matsuda, Hirotsugu (Lattice model of liquid helium. III.) 445.
- Matsumoto, Makoto (Minimal hypersurfaces in flat spaces) 158.
- Matsumura, Hideyuki and Masayoshi Nagata (Sheets of an algebraic variety) 368.
 — — s. Yasuo Akizuki 368.
- Matthews, G. (Rings of infinite matrices) 12.
 — P. T. (Parity of elementary particles) 207.
- Mau, Vinh (Constantes de couplage de l'interaction β) 437.
- Maurer-Tison, Françoise (Tenseurs de courbure de deux connexions) 385; (Espace fibré des corepères affines) 385.
- Mautner, F. I. s. L. Ehrenpreis 132.
- Mazet, Robert (Vibrations thermoélastiques des structures) 177.
- Mazo, R. M. and A. C. Zemach (Diffraction of neutrons by imperfect gases) 210.

- Mazzarella, Franco (Lavoro compiuto dalle forze esterne nella deformazione di una membrana) 174.
- McCarroll, R. s. A. Dalgarno 440.
- McConnell, A. J. (W. R. Hamilton) 5.
- McCoy, N. H. (Classes of ideals in polynomial rings) 263.
- McCrea, W. H. (Population I stars. I.) 239.
- McDowell, C. H. (Dictionary of mathematics) 1.
- McLachlan, N. W. (Applications of nonlinear theory) 105.
- McLain, D. H. (Subgroups of given order) 254.
- McMinn, Trevor J. (Linear measures of sets of Cantor type) 79.
- Meligy, A. S. (Interpolation for Coulomb wave functions) 202.
- Mendlowitz, H. (Approach to spin in Dirac theory) 202.
- Mérie, Jean (Fonction «OC» du test binomial de Wald) 355.
- Merk, H. J. (Heat-driven oscillations of gas flows. III. IV.) 405.
- Merli, Luigi (Problema di Cauchy relativo $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$) 299.
- Meschkowski, Herbert (Interpolation durch Funktionen eines Orthonormalsystems) 293.
- Méthée, Pierre-Denis (Équation des ondes) 329.
- Meulenbeld, B. s. L. Kuipers 95.
- Meyer, C. (Anwendungen Dedekindscher Summen) 103.
- Curt (Klassenzahl Abelscher Körper) 60.
- L. s. Th. Ginsburg 244.
- Michler, Lothar (Teilbarkeitsbeziehung für endliche Gruppen) 30; (Isomorphismengruppoid eines algebraischen Erweiterungskörpers) 56.
- Mihailović, D. (Probleme der analytischen Geometrie) 145.
- Mikeladze, Š. E. (Numerische Differentiation im Komplexen) 340.
- Mikhail, M. N. (Random meromorphic function at its zeros. I. II.) 297; (Random meromorphic function at its poles) 297.
- Mikolás, Miklós (Functional equation for Riemann zeta-function) 99.
- Miles, J. W. (Sloshing of liquid in a tank) 193; (Damping of surface oscillations in a tank) 193.
- Millar, W. (Nonlinear resistive 3-pole) 196.
- Miller, J. C. P. s. Hansraj Gupta 62.
- Mills, W. H. (Holomorph of a finite abelian group) 33; (Lie algebras of characteristic 5 and 7) 49.
- — — and G. B. Seligman (Lie algebras of classical type) 48.
- jr., Blake D. (Nelson slide rule) 140.
- Minami, Katsumi s. Takayuki Tamura 250.
- Mindlin, R. D. s. D. C. Gazis 400.
- Minorsky, M. N. (Équation de M. Liénard) 307.
- Mirakov, V. E. (Majoranta principle) 333.
- Mirels, Harold (Free-stream vorticity) 190.
- Mirguet, Jean (Paratingentes secondes d'une surface) 161.
- Mišik, L. (Mittelwertsatz für additive Intervallfunktionen) 82.
- Mitchell, Andrew R. and John Y. Thomson (Finite difference methods) 190.
- B. E. (Quasi-idempotent matrices) 15.
- Mitra, A. N. (Fluctuation problem in μ -meson bursts) 438.
- — — and R. P. Saxena (Meson-meson interaction) 426.
- Mitrinović, D. S. (Mathematische Induktion) 2; (Mathematischer Unterricht) 2; (Ungleichungen) 76.
- Mitrović, Dragiša (Fonction ζ de Riemann) 99.
- Mitsui, Takayoshi (Partitions of a number into the powers of prime numbers) 271.
- Miyazawa, Hironari s. Jun-ichi Fujita 205.
- Mizel, Victor J. (Boundary layer problem for an elliptic equation) 315.
- Mizumoto, Hisao (Riemann surfaces) 297.
- Moiseev (Moiseyev), N. N. (Bodies floating in a bounded reservoir) 411.
- Ol'chovskij (Moiseev-Ol'khovskii), I. I. (Boltzmann's kinetic equation) 219.
- Moisil, Gr. K. (Relais-Kontaktschaltungen) 140.
- Molčanov (Molchanov), N. N. (Use of groups of transformations in investigating solutions of differential equations) 113.
- Moljukov, I. D. s. F. D. Kramar 5.
- Molnár, J. (Vermutung von G. Hajós) 163; (Hellyscher Satz) 163.
- Montaldi, E. s. P. Bocchieri 210.
- Mooney, David A. (Thermodynamics and heat transfer) 195.
- Moór, Arthur (Konformgeometrie Schouten-Haantjescher Räume. I. II.) 159; (Autoparallele Abweichung) 383.
- Moore, P. G. (Ranges in small and correlated samples) 354.
- Moorhouse, R. G. s. B. H. Bransden 205.
- Mordell, L. J. (Solutions in residue sets of quadratic congruences) 63; (Corrigendum) 64.
- Morelock, J. C. and N. C. Perry (Homogeneous polynomials) 23.
- — — s. N. C. Perry 142.
- Moreno, Theodore (Microwave transmission design data) 197.
- Morgan, Homer G., Harry L. Runyan and Vera Huckel (Flutter at high Mach numbers) 186.
- Morita, Tohru (Lattice model of liquid helium) 445.
- Moroz, E. M. (Charged-particle accelerators) 199.
- Moser, L. and M. Wyman (Stirling numbers) 91.
- Mostow, G. D. (Errata) 42.
- Mostowski, A. (Computable sequences) 247.
- Andrzej und Marcell Stark (Höhere Algebra) 249.
- Mouette, Léon (Théorie des triades) 10.
- Moyls, B. N. s. M. Marcus 20, 21.
- Mrówka, S. (Local topological properties) 164; (Properties of Q -spaces) 386.
- Mühlschlegel, B. und H. Koppe (Vielfachstreuung polarisierter Elektronen) 216.
- Mullin, C. J. s. G. W. Ford 424.
- Muracchini, Luigi (Trasformazioni puntuali) 153; (Applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali) 153.
- Muth, Richard F. s. Kenneth J. Arrow 360.

- Mutō, Yosio (Conformally curved Riemann spaces V_n) 157.
- Mycielski, Jan (Equalities in connected topological groups) 40; (Arithmetical classes) 245.
- s. S. Balcerzyk 28, 40.
- Myškiš (Myshkis), A. D. and A. Ja. (A. J.) Lepin (Generalized functions) 332.
- s. G. V. Gil' 190.
- Mysovskikh (Mysovskikh), I. P. (Eigenvalues of integral equations) 317.
- Nachbin, Leopoldo (Whitney's theorem) 328.
- Nagami, Keiō (Theorems in dimension theory) 387.
- Nagano, Tadashi s. Kentaro Yano 156.
- Nagarathnamma, H. S. (Intrinsic derivatives of the unit normal vector) 380.
- Nagasaki, Masayuki s. Mitsuji Kawai 434.
- Nagata, Jun-iti (Imbedding theorem) 388.
- Masayoshi (Unique factorization theorem) 54; (Imbeddings of surfaces in projective varieties) 151.
- s. Hideyuki Matsumura 368.
- Nagumo, Mitio and Kusuo Isé (Differential equations in neighborhood of an equilibrium point) 301.
- Naito, Kunio (Theory of unstable particle. II.) 431.
- Nakai, Yoshikazu (Linear system on non-singular variety) 368; (Characteristic linear systems of algebraic families) 369.
- Nakamura, Kirio (Ordnung gewisser Untergruppen von $GL(q, p)$) 255.
- Masahiro (Permutability in orthocomplemented lattice) 258.
- Nakano, Hidegorō (Extension theorem) 324.
- Nakao, Mamoru s. Takayuki Tamura 250.
- Nakaoka, Minoru (Cohomology mod p of the p -fold symmetric products of spheres) 390.
- Napolitano, Luigi G. (Interazione di due correnti) 138.
- Narasimha, R. s. S. Dhawan 407.
- Nardi, V. (Covariant quantization) 426.
- Nash, William A. and P. L. Sheng (Iteration method for problems of shallow shells) 139.
- Natanson, G. I. (Lozinsky theorem) 292.
- I. P. s. L. V. Kantorovič 5.
- Naumann, Herbert (Vektorsterne) 146.
- Nazarčuk (Nazarchuk), M. M. (Interior problem of boundary layer equations) 190; (One-dimensional stationary gas flows) 218.
- s. O. A. Geraščenko 190.
- Neal, B. G. (Biege steife Stahlstabwerke) 176.
- Nefed'ev, G. N. (Sätze über lineare Ungleichungen) 19.
- Nehari, Z. and E. Netanyahu (Coefficients of meromorphic schlicht functions) 100.
- Nelkin, M. S. s. T. J. Krieger 217.
- Nemyckij, V., M. Sludskaja und A. Čerkasov (Analysis. I.) 79.
- V. (Stationäre Zustände in dynamischen Systemen) 172.
- Netanyahu, E. s. Z. Nehari 100.
- Newlander, A. and L. Nirenberg (Complex analytic coordinates in almost complex manifolds) 161.
- Nieminen, Toivo (Decompositions of simplexes) 145.
- Niemz, Werner (Elektronische Digitalrechner zur Lösung flugmechanischer Probleme) 342.
- Nii, Katsuyuki s. Takayuki Tamura 250.
- Nijenhuis, Albert s. Alfred Frölicher 375.
- Nikolenko, L. D. (Non-oscillation of a differential equation) 111.
- Nikol'skij (Nikolsky), A. A. (Motion of an ideal fluid past a solid) 180; (Action of force due to hydrodynamic motion on flat bodies) 181.
- Nikolsky, S. M. (Approximation durch Polynome) 91.
- Nirenberg, L. s. A. Newlander 161.
- Nishigōri, Noboru (Properties of FC -groups) 29.
- Nishimiya, Han (Coefficient problem for analytic functions) 99.
- Nitsche, Johannes (Mit Minimalflächengleichung zusammenhängende analytische Funktion) 377.
- Nitsche, Johannes C. C. (Bernsteins' theorem) 377.
- Noguera, Juan Torres s. Torres Noguera, Juan 22.
- Noi, Salvatore Di s. Di Noi, Salvatore 152.
- Noll, W. (Verschiebungsfunktionen für elastische Schwingungsprobleme) 178.
- Walter s. Robert Finn 121.
- Nôno, Takayuki (Branches of logarithmic function of a matrix variable) 22; (Singularity of general linear groups) 42.
- Norden, A. P. (Lobatschewskische Geometrie) 364; (Differentialgeometrie. I. II.) 376.
- Norman, Robert Z. s. Edward J. Cogan 275.
- Northcott, D. G. (Global dimension of polynomial rings) 267.
- — and D. Rees (Regular local rings) 266.
- Nosov, V. G. (α -decay) 437.
- Novais, J. A. Vinha s. Vinha Novais, J. A. 45.
- Novožilov (Novozhilov), Ju. V. (Ju. V.) (Reduction of two-nucleon problem to a single-nucleon problem) 429.
- Nozawa, Ken (Populations of farm animals. I.) 357.
- Nye, J. F. (Surges in glaciers) 177; (Crystals) 226.
- Ó Raifeartaigh, L. (Einstein universe) 419.
- Öberg, T. (Formules approchées) 291.
- Očkur (Ochkur), V. I. (Collisions of slow electrons with hydrogen atoms) 439.
- O'Dwyer, J. J. (Dielectric breakdown of alkali halides) 235; (Dielectric breakdown in solids) 452.
- — and P. G. Harper (Transitions of electrons in polar crystals) 449.
- Odziemczyk, J. and T. Tietz (Atom form factor) 216.
- Ogawa, Junjiro (Limit theorem of Cramér) 344.
- Ogieveckij (Ogievetsky), I. I. (P. Civin's inequality) 280; (Tauberian theorems of N. Wiener's type) 289.
- Ohnuki, Yoshio s. Osamu Hara 429.
- Ohtsuka, Makoto (Capacité des ensembles produits) 121.

- Oikawa, Kôtarô (Distortion theorem on schlicht functions) 101.
- Okubo, Susumu (Decay of the Σ^+ hyperon) 206; (Photoproduction of K -mesons) 206.
- Oleinik (Oleinik), O. A. (Equations of unsteady filtration type) 314.
- Olsen, Haakon, Werner Romberg and Harald Wergeland (Reaction of sound waves) 192.
- Olsson, R. Gran s. Gran Olsson, R. 174.
- O'Neill, Barrett (Induced homology homomorphisms for set-valued maps) 169; (Fixed point theorem for multi-valued functions) 389.
- Onesti, Natalia Berruti s. Berruti Onesti, Natalia 81.
- Onicescu, O. (Une intégrale et ses applications) 82.
- Ono, Katuzi (Binary relations) 77; (Set theory) 77.
- Orlicz, W. (Perfect convergence in certain Banach spaces) 325.
- Osanaï, Tadao (Lateral vibration of thin bars) 399.
- Osborn, Roger (Mathematics of investment) 359.
- Osipov, P. N. (Double curvilinear integral) 375.
- Ostrow, T. G. (Transitivities in projective planes) 363.
- Ostrovskij (Ostrovsky), I. V. (Theorem stated by M. G. Krein) 101.
- Ostrowski, Alexander (Verschärfung des Schubfächerprinzips) 73.
- Owen, George E. s. Thomas Fulton 209.
- Pachale, Helmut (Stetige Differenzierbarkeit der Lösungen von $F(x, y, y') = 0$) 106.
- Paige, L. J. s. N. Jacobson 46.
- Palamà, Giuseppe (Risoluzione in numeri naturali dell'equazione $x^2 + mx + p = (p + m + 1)y^2$) 64.
- Palermo, F. P. (Cohomology ring of product complexes) 169.
- Pall, G. and O. Taussky (Representations of a binary quadratic form as a sum of four squares) 271.
- Palmer, D. S. (Statistical model of time series) 356.
- Pandres jr., Dave (Higher ordered differentiation) 13.
- Papoulis, A. (Network determinant) 18.
- Parameswaran, M. R. (Product theorems in summability) 284.
- Paria, Gunadhar (Mixed boundary-value problem of elasticity) 175.
- Park, David (Advances in physics) 394.
- Parodi, Maurice (Polynome caractéristique d'une matrice) 18.
- Parrott, J. E. (Electrical conductivity in semiconductors) 235.
- Parsons, D. H. (Invariance of the rank of partial differential equation) 310.
- Parzen, Emanuel (Central limit theorem) 346.
- Paškovskij (Pashkovsky), S. F. ((ϵ)-points of polynomials of best approximation) 291.
- Pasquale, Luigi di (Cartelli di matematica disfida di L. Ferrari) 241.
- Pathria, R. K. (Statistical thermodynamics of an assembly in mass-motion) 194.
- Patterson, E. M. (Right-multiplication algebras) 262.
- Pavlikov, A. A. (Elektronische Rechenmaschine) 342.
- Payne, L. E. (Multivalued functions) 317.
- Pearl, M. H. (Cayley's parameterization) 16.
- Pedoe, D. (Circles) 142.
- Peirce, William H. (Numerical integration) 341.
- Pekeris, C. L. and Z. Alterman (Radiation resulting from an impulsive current in an antenna) 411.
- Peltier, Jean (Mécanisation des problèmes linéaires) 140.
- Percival, I. C. and M. J. Seaton (Electron-hydrogen atom collisions) 215.
- Peremans, W. (Completeness of holomorphs) 83.
- Peretjagin (Peretiagin), B. M. (Limit cycles of $dy/dx = [cx + dy + P(x, y)]/[ax + by + Q(x, y)]$) 307.
- Peretti, Jean s. Yves Ayant 227.
- Perfect, Hazel (Forms and functions) 23.
- Perlmuter, M. s. R. Siegel 183.
- Perron, Oskar (Kettenbrüche von H. S. Wall) 289.
- Perry, N. C. and J. C. Morelock (Computation with approximate numbers) 142.
- — — s. J. C. Morelock 23.
- Peter, Martin (Dielectric constants) 452.
- Petrenko, A. I. (Coordinates and projections of Gauß, Mercator and Soldner on a sphere) 393.
- Petrov, P. I. (Invariants of the quaternary differential quadratic form) 381.
- Petrovskij, I. G. s. E. M. Landis 307, 308.
- Pettis, B. J. (Vector space construction by Hausdorff) 322.
- Phan-Van-Loc (Principe de Huygens) 207.
- Phariseau, P. (Diffraction of light by ultrasonic waves) 197.
- Phillips, R. J. N. (Time-irreversible nucleon-nucleon scattering) 432.
- Physikalisch-mathematische Wissenschaften in Armenien 5.
- Pignani, T. J. (Matrix equations) 19.
- Pignataro, Salvatore (Terne pitagoriche) 64.
- Pines, David (Superconductivity in the periodic system) 445.
- Pipes, Louis A. (Applied mathematics) 74.
- Pirogov, I. M. (Tension of a warped plate) 175.
- Pisareva, N. M. (Weylsche Räume) 161.
- Planck, Max (Abhandlungen und Vorträge. I—III.) 393.
- Plaskett, H. H. (Chromospheric emission) 240.
- Plíš, A. (Existence domain for partial differential equations) 114.
- Pliss, V. A. (Non-linear system of three differential equations) 306.
- Plotkin, B. I. (Klassen von unendlichen Gruppen) 253.
- Plunkett, R. (Optimum damping for continuous systems) 173.
- Podstrigač (Podstrigach), Ja. S. (Y. S.) (Thermal field in thin shells) 175.
- Pogrebyskij, I. B. s. Ju. D. Sokolov 6.
- Poincaré, H. (Mécanique céleste. I—III.) 238.
- Polkinghorne, J. C. (Yang-Feldman formalism) 203.
- Pollaczek, Félix (Phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet) 351.

- Položij (Poloshy), G. N. (Overall characteristics of the stressed state) 395.
- Poncet, Jean (Groupes de Lie compacts des transformations) 43.
- Pontrjagin, L. S. (Topologische Gruppen. I.) 39.
- (Pontryagin), L. S. (Zeros of transcendental functions) 100.
- Popov, B. S. (Résolution numérique des équations) 137.
- Popović (Popovici), A. (Field in conformal reciprocity theory) 418.
- Konstantin P. (Primfaktorenzerlegung in Ringen) 57.
- Porcelli, Pasquale (Stieltjes mean σ -integral) 276.
- Poßner, Lothar (Vorläufer zu Reuleaux) 4; (Berechnung der Stabbiegung mit Matrizen) 395; (Gegenstück zur Methode von Mohr) 395.
- Postnikov, M. M. (Homotopy theory of continuous mappings. I. II.) 169.
- Potapov, M. K. s. S. V. Smirnov 140.
- Potier, Robert (Mécanique ondulatoire du photon de masse nulle) 422.
- Power, G. and H. L. W. Jackson (General circle theorem) 123.
- Prange, R. E. and R. H. Pratt (High-energy Coulomb wave function) 436.
- Pratt, R. H. s. R. E. Prange 436.
- jr., George W. (Antiferromagnetic-ferromagnetic transitions) 451.
- Price, J. J. (Duality theorems) 41; (Orthonormal step functions) 92.
- Priestley, C. H. B. (Convection from the earth's surface) 240.
- Prigogine, I. et F. Henin (Équation de Liouville) 194.
- Prior, A. N. (Time and modality) 6.
- Prokof'ev, V. A. (Ausbreitung ebener erzwungener Wellen) 192.
- Prosser jr., F. W. and L. C. Biedenharn (Shift and penetration factors in nuclear reactions) 434.
- Protter, M. H. (Completely convex functions) 86.
- Prvanović, Mileva (Courbes cycliques d'un sous-espace) 158.
- Pursey, D. L. s. S. Kahana 437.
- H. (Launching and propagation of elastic waves in plates) 400.
- Putnam, H. s. G. Kreisel 7.
- Puzikov, L., R. Ryndin and Ja. (Ia.) Smorodinskij (Smorodinskii) (Scattering matrix of a two-nucleon system) 208.
- R. Woolley, R. v. d. s. Wooley, R. v. d. R. 239.
- Raaz, Franz und Hermann Tertsch (Kristallographie) 447.
- Rabin, Michael O. (Group theoretic problems) 248.
- Rabotnov, G. N. and S. A. Shesterikov (Creep stability of columns and plates) 398.
- Radhakrishna Rao, C. s. Rao, C. Radhakrishna 357.
- Radó, T. (Lebesgue area and Hausdorff measure) 278.
- Raevskij, S. Ja. (Dynamische Genauigkeit eines Folgesystems) 141.
- Ragab, F. M. (Integrals involving E -functions, Bessel-functions and generalized hypergeometric functions) 97; (Integration of E -functions) 98.
- Rahman, Qazi Ibadur (Derivatives of integral functions) 296.
- Raifeartaigh, L. Ó s. Ó Raifeartaigh, L. 420.
- Raj, Des (Parametric functions in stratified sampling designs) 355.
- Rajagopal, C. T. (Convergence in density) 88; (Tauberian theorem for Riemann-Liouville integral) 288.
- Rajkov (Raikov), D. A. (Inductive and projective limits) 322.
- Ramanathan, K. G. (Orthogonal groups) 256.
- Rao, C. Radhakrishna (Comparison of growth curve) 357.
- Rase, D. E. s. T. J. Gray 237.
- Raychaudhuri, Amalkumar (Anisotropic cosmological solution in relativity) 420.
- Redhead, P. A. (Townsend discharge in diode) 441.
- Ree, Rimhak s. S. A. Jennings 48.
- Reeb, Georges s. André Haefliger 171.
- Rees, D. (Grade of an ideal or module) 266.
- s. D. G. Northcott 266.
- Reeve, John E. (Volume des polyèdres entiers) 68.
- Regge, Tullio and John A. Wheeler (Schwarzschild singularity) 419.
- Regier, S. A. (Diffusion of the vortical layer) 191.
- Reid, William T. (Adjoint linear differential operators) 106.
- Reik, Helmut G. (Reibungsdrucktensor in inhomogenen Gasen) 218.
- Reiner, Irving (Automorphism of the general linear group) 39.
- Reissig, Rolf (Nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung) 112; (Beschränkte erzwungene Bewegungen mit Selbststeuerung) 112.
- Rembs, Eduard (Starrheitssatz von A. D. Alexandrow und E. P. Senkin) 378.
- Remmert, Reinhold (Abbildungen komplexer Räume) 102.
- Rendiconti del IV corso nella Villa Monastero a Varenna dal 15 Luglio al 4 Agosto 1956. 450.
- Rényi, A. (Partial sums of a series) 87; (Representations for real numbers) 89; (Theorem of Simmons) 344.
- Rethmeier, B. C. s. Z. W. Salsburg 222.
- Reuter, G. E. H. (Denumerable Markov processes) 347.
- s. David G. Kendall 348.
- Reynolds, William C. s. Donald C. Baxter 195.
- Reyntjens, Jacques (Création de paires) 428.
- Rham, Georges de (Courbes définies par des équations fonctionnelles) 161.
- Rhoads, Donald W. and John M. Schuler (Airplane dynamics in large-disturbance maneuvers) 188.
- Rice, H. G. (Recursive orders) 246; (Relative density of sets of integers) 247.
- O. K. (Liquid helium) 224.
- Richardson, John M. s. Burton D. Fried 172.
- Richtmyer, Robert D. (Difference methods for initial value problems) 337.
- Rider, Paul R. (Midrange of a sample) 355.
- Ridout, D. (Rational approximations to algebraic numbers) 274.

- Rieger, G. J. (Teiler der Ideale in algebraischem Zahlkörper) 57.
- Rindler, W. (Riemannian and kinematic techniques in cosmology) 422.
- Ripelle, Michel Fabre de la s. Fabre de la Ripelle, Michel 425.
- Rivlin, R. S. (Non-Newtonian fluids and turbulent Newtonian fluids) 179.
- — — s. A. E. Green 176.
- — — s. G. F. Smith 374.
- Rjabov (Riabov), Ju. A. (Yu. A.) (Convergence region of periodical series representing solutions of differential equations) 301.
- Rjzanova, M. Ja. (Schwingungen eines Balkens) 178.
- Roberts, J. B. (Binomial coefficient residues) 62.
- Robertson, Denise A. s. R. v. d. R. Wooley 239.
- Robin, Louis (Fonctions sphériques de Legendre. I.) 96.
- Robinson, A. (Problems of definability) 6.
- — — Jude s. J. C. Eaves 142.
- Raphael M. (Converse of Fermat's theorem) 63.
- Rodero Carrasco, Julian (Spezielle Reihen) 99.
- Rogers, C. A. (Coverings) 272.
- jr., Hartley (Law of large numbers) 345.
- Rohrlich, F. (Coulomb corrections to Delbrück scattering) 435.
- Rolewicz, S. (Linear metric spaces) 126.
- Romanovskij, P. I. (Fourierreihen) 75.
- Romberg, Günther (Schallströmung an Rotationshalbkörpern) 185.
- — — Werner s. Haakon Olsen 192.
- Romiti, Ario (Equilibrio limite dei materiali pesanti dotati di coesione ed attrito interno) 396.
- Rootselaar, B. van (Signaturfunktion in der Analysis) 2.
- Roquette, Peter (Einheiten und Divisorklassen) 269.
- Rosati, Luigi Antonio (Piani proiettivi desarguesiani) 364.
- Rose, M. E. (Angular momentum) 201.
- Roseau, Maurice (Équation intégrale de la diffraction des ondes élastiques) 319; (Théorème d'unicité applicable à diffraction) 399; (Diffraction d'ondes élastiques planes) 399.
- Rosen, Philip (Low-energy inelastic atomic collisions) 218; (Argon-argon collisions) 218.
- Rosenberg, R. M. (Forced oscillator equation) 306.
- Rosenbluth, M. N. and A. N. Kaufman (Plasma diffusion in a magnetic field) 441.
- — — and C. L. Longmire (Plasma confined by magnetic fields) 443.
- Rosenlicht, Maxwell (Rationality questions on algebraic groups) 257; (Algebraic group varieties) 257.
- Rossi, Francesco Saverio (Particolare congruenza) 63.
- Roth, Werner (Spurzapfen geringsten Reibungsmomenten) 179.
- Rothwell, Doris P. (Varying seasonal weights in price index construction) 360.
- Roumieu, Charles (Notion de distribution) 329.
- Rozenvasser (Rosenwasser), E. N. (Non-linear controlled systems) 343.
- Rúa, J. García s. García Rúa, J. 6.
- Rudin, Mary Ellen (Sets of real numbers) 167.
- — — Walter (Representation of functions by convolutions) 133; (Factorization in group algebra) 133.
- Rudinger, George (Reflection of shock waves from an orifice) 408.
- Rumjancev (Rumiantsev), V. V. (Motion of a heavy solid having a fixed point) 173.
- Runyan, Harry L. s. Homer G. Morgan 186.
- Russek, Arnold (Collective motion in shell model) 208.
- Ruston, A. F. (Conjugate Banach spaces) 127.
- Rutickij, Ja. B. s. M. A. Krasnosel'skij 333.
- Rvačev, V. L. (Aufgabe der Potentialtheorie) 121.
- Ryhming, I. (Axiale Rückwirkungen von Überschallschaufelgittern) 185; (Überschallsströmung durch Schaufelgitter mit Rückwirkung) 408.
- Ryll-Nardzewski, C. s. S. Hartman 41.
- Ryndin, R. s. L. Puzikov 208.
- Ryser, H. J. (Matrices of zeros and ones) 11; (Term rank of a matrix) 11.
- Rzewuski, J. (Non-local theories) 204.
- Saad, K. Nasr (Abstract random variables) 346.
- Saban, Giacomo (Congruences synectiques) 379.
- Šabanskij, V. P. s. V. L. Ginzburg 232.
- Sabidussi, Gert (Graphs with given group) 392.
- Sachnovič (Sakhnovich), L. A. (Spectral analysis of Volterra operators) 318.
- Šachnovskij, S. M. s. B. N. Fradlin 395.
- Sachs, Horst (Problem der eigentlichen Teiler) 268.
- Sack, R. A. (Relaxation processes and inertial effects. I. II.) 201.
- Sadovskij, L. E. (Verband der Untergruppen einer nilpotenten Gruppe) 253.
- Šafranov (Shafranov), V. D. (Shock waves in a plasma) 441.
- Sah, Chih-Han (Finite nilpotent groups) 255.
- Saint-James, Daniel (Bandes d'énergie d'un solide) 230.
- Saitō, Masahiko (Groupes de Lie résolubles. II.) 257.
- Sakurai, Akira (Mott-Smith's solution of Boltzmann equation) 219.
- Salechov (Salekhov), D. V. (Lebesgue-Orlitz points) 82.
- Salmon, Paolo s. Aldo Andreotti 150.
- Salpeter, E. E. s. P. K. Kabir 202.
- Salsburg, Z. W., E. G. D. Cohen, B. C. Rethmeier and J. de Boer (Cell-cluster theory. IV.) 222.
- — — s. E. G. D. Cohen 222.
- Salzer, Herbert E. (Quadrature formulas for inversion integrals) 342.
- Šamanskij (Shamansky), V. E. and V. N. Ševelo (Shevelo) (Oscillations of a rope) 178.
- Samuel, P. (Place dans un anneau) 55.
- Sanden, H. v. (Quadratwurzel mit der Rechenmaschine) 140.
- Sandor, S. s. A. Halanay 107.
- Sands, Arthur D. (Factorisation of finite abelian groups) 33.
- Santaló, L. A. (Konforme Abbildung im Kleinen) 377.
- Santoro, Paolo (Studio qualitativo del sistema) 305.

- Šapiro, Z. Ja. s. I. M. Gel'fand 135.
- Sargent, W. L. C. (Summability factor theorems for infinite integrals) 88.
- Sargsjan, I. S. (Entwicklungen nach Eigenfunktionen des Sturm-Liouvilleschen Operators) 300; (Spektralfunktion des Sturm-Liouvilleschen Operators) 300.
- Sarma, L. V. K. Viswanadha (Slow motion of a paraboloid in a rotating fluid) 402.
- Sasiada, E. (Direct indecomposable abelian group) 34.
- Satô, Hazimu (Zariski rings) 54. — Masako (Fourier series. VI.) 292.
- Saul'ev, V. K. (Problem of eigenvalues) 120.
- Savinov, G. V. und P. A. Cito- vič (Lineares nicht-autonomes System) 110.
- Sawada, S. s. S. Furuichi 430.
- Sawicki, J. (Polarization of nucleons) 435. — — and W. Czyż (Two-stage mechanism of (γ, d) reactions) 210; (γ, d) reactions. Addendum) 435.
- Sawyer, D. B. (Product of two linear forms) 68.
- Saxena, R. P. s. A. N. Mitra 426.
- Scagliotti, Lucia (Geometria intrinseca dei gruppi continui finiti) 153.
- Scarf, Herbert s. Kenneth J. Arrow 360.
- Ščerbakov, R. N. (Berichtigung) 153.
- Schäffer, J. J. (Almost-periodic differential equations) 304. — — s. J. L. Massera 86.
- Schatten, Robert (Space of operators on a Hilbert space) 128.
- Schechter, Martin (Elliptic partial differential operators) 117.
- Scheidegger, A. E. (Mathematics available for describing fracture) 397.
- Schenkman, Eugene and L. I. Wade (Mapping which takes each element of a group onto its n th power) 29.
- Scherz, G. (N. Stensens) 243. — — (edited by) (N. Steno) 243.
- Schilhansl, M. J. (Bending frequency of a beam) 399.
- Schirmer, H. und J. Friedrich (Leitfähigkeit eines Plasmas. I.) 440.
- Schmidt, E. T. s. G. Grätzer 45. — Werner (Invarianzkriterium für Strömungszusammenhänge) 184. — — s. Friedrich Keune 405.
- Schmieden, C. (Nichtlineare Schwingungen bei zwei Freiheitsgraden. I.) 173.
- Schoenberg, I. J. (Extremal problems for positive definite sequences) 100.
- Schöneborn, Heinz (Primäre Zerlegung torsionstopologischer Gruppen) 41.
- Schönhage, Arnold (Schubfächerprinzip) 73.
- Schöpf, Hans-Georg (Energie-Impulstensor Dirac-ähnlicher Felder) 420.
- Schouten, J. A. (Currents and their invariant derivatives. II. III.) 375.
- Schreiber, M. (Structure space of a ring) 50.
- Schröder, Johann (Newton-sches Verfahren) 136.
- Schrödinger, Erwin (Statistical thermodynamics) 194.
- Schuler, John M. s. Donald W. Rhoads 188.
- Schulz, P. (Elektrizitätsleitung in Gasen) 221.
- Schulze, A. (Elektrische Leitung) 231.
- Schwartz, Charles (Hyperfine structure) 215.
- Schwarze, G. (Stabilitätstheorie der Schalen) 395.
- Schweizer, Berthold (Approximate eigenvalues) 339.
- Seiama, D. W. (Pure gravitational field) 419.
- Scorza Dragoni, Giuseppe (Traslazioni piane generalizzate) 171.
- Scott, J. F. (History of mathematics) 3. — W. R. (Multiplicative group of a division ring) 54.
- Sears, W. R. s. R. A. Hartunian 444.
- Seaton, M. J. s. I. C. Percival 215.
- Seeger, Raymond J. (Teaching thermophysics) 193.
- Segedin, C. M. (Approximate length of arc of an ellipse) 92.
- Segre, Beniamino (Corrispondenze birazionali) 148; (Corrispondenze di Möbius) 368. — Corrado (Opere. I.) 147.
- Seide, Paul (Stability equations for conical shells) 174.
- Seidel, J. J. (Unterricht an Technischen Hochschulen) 2.
- Seifert, George (Limiting sets of trajectories of a pendulum-type system) 112; (Stability in the large for differential systems) 304.
- Seitz, Frederick and David Turnbull (edited by) (Solid state physics) 224.
- Seligman, G. B. s. W. H. Mills 48.
- Seligman, George B. (Classical Lie algebras) 49.
- Sen, Hari K. and Arnold W. Guess (Radiation effects in shock-wave structure) 409. — K. K. (Radiation in an electron atmosphere) 198; (Intensity of radiation due to scattering in stellar atmosphere) 198. — P. (Non-local quantum electrodynamics) 203; (Gauge invariant Lagrangian) 204.
- Sengupta, H. M. and B. K. Lahiri (Implicit functions) 83.
- Šerman (Sherman), D. I. (Problem in elasticity) 396.
- Ševelo, V. N. s. V. E. Šaman-ski 178.
- Sévély, Yves (Tracé pratique du diagramme du moteur shunt) 197.
- Shah, S. M. (Exceptional values of entire functions. II.) 296.
- Shanks, E. Baylis (Series with positive terms) 282.
- Shapiro, Harold N. s. Paul Erdős 63. — Victor L. (Localization on spheres) 92; (Divergence theorem) 279; (Green's theorem) 279.
- Sharma, Brahmadev (Thermal stresses in an elastic solid) 175.
- Sheldon, J. W., B. Zondek and M. Friedman (Time-step to be used for the computation of orbits) 338.
- Sheng, P. L. s. William A. Nash 139.
- Shenitzer, Abe s. V. K. Saul'ev 120.
- Shenton, L. R. (Expansion for definite integral. IV. V.) 277.
- Shepherd, W. M. and F. A. Gaydon (Plastic bending of a ring sector) 176.
- Shesterikov, S. A. s. G. N. Rabotnov 398.
- Shibata, Kêichi (Boundary values of pseudo-analytic functions) 298.
- Shiga, Kôjo s. Ichiro Amemiya 324.

- Shingai, Mitsuo s. Takayuki Tamura 250.
- Shirota, Taira (Initial value problem for linear partial differential equations. III.) 313.
- Shockley, W. and J. T. Last (Charge distribution for a flaw in a semiconductor) 235.
- Sideriades, M. L. (Systèmes non linéaires du premier ordre) 302.
- Sidorov, Ju. V. (Cauchysches Problem für $\partial^2 u / \partial t^2 + \Delta \Delta u = 0$) 311.
- Siegel, Carl Ludwig (Ungleichungen bei Bewegungsgruppen) 39.
- R. and M. Perlmutter (Heat transfer in swirling laminar pipe flow) 183.
- Šilov, G. E. s. M. I. Višik 124.
- Silverman, E. (Morrey's representation theorem) 279.
- Simmons, H. A. (Classes of maximum numbers) 22.
- Simon, Gerhard (Ultraschallwellen in Einkristallen) 191; (Dämpfung elastischer Wellen in Einkristallen) 236.
- R. L. (Oscillations d'une étoile gazeuse) 239.
- Simonsen, W. (Numerical differentiation) 139.
- Simpson, H. R. (Tsetse fly population) 358.
- Singal, M. K. and Ram Behari (Parallel hypersurfaces in a Riemannian V_n) 381.
- Singh, Basudeo (Definite divergence of conjugate Fourier series) 94.
- K. D. (Sous-espaces d'une variété kählérienne) 383.
- Sirk, Hugo (Mathematik für Naturwissenschaftler) 76.
- Širkov, D. V. s. N. N. Bogoljubov 206.
- Sirlin, Alberto s. Toichiro Kinoshita 206.
- Širšov (Shirshov), A. N. (Motion of flow on an apron) 411.
- Sitenko, A. G. (Ultra-relativistic particles) 416.
- — — s. A. I. Achiezer 437.
- Sjölander, Alf (Scattering of slow neutrons by KCl) 229; (Two-phonon processes) 229.
- Sjukijajnen, V. A. s. V. A. Sveklo 179.
- Škil' (Shkil), N. I. (Asymptotic representation of solutions of linear differential equations) 301.
- Sklar, Abe s. T. M. Apostol 59.
- Skolem, Th. (Remarks on set theory) 76.
- Skornjakov, L. A. (Homomorphismen projektiver Ebenen) 363.
- Slobodeckij, L. N. (Parabolische und elliptische Systeme) 311.
- Slowikowski, W. (Subclass of (DF) spaces) 322.
- Sludskaja, M. s. V. Nemyckij 79.
- Small, K. A. s. R. Cade 195.
- Smiley, M. F. (Bruck-Kleinfeld-Skornjakov theorem) 47.
- Smirnov, Ju. (Yu.) (Normal space contained in no bi-compact) 387.
- M. M. s. V. P. Basov 5.
- S. V. and M. K. Potapov (Nomogram for an incomplete Γ -function) 140.
- Smith, Fairfield H. (Multivariate analysis of covariance) 354.
- G. F. and R. S. Rivlin (Anisotropic tensors) 374.
- K. T. s. N. Aronszajn 136.
- P. A. (Generators and relations in a complex) 168.
- Smorodinskij, Ja. s. L. Puzikov 208.
- Snell, J. Laurie s. John G. Kemeny 352.
- Sobol', I. M. (Iterationsmethode zur Berechnung von Eigenwerten) 339.
- Sodha, M. S. and P. S. Eastman (Mobility of electrons in semiconductors) 234.
- Sokolov, A. A., D. D. Ivanenko and I. M. Ternov (Excitation of oscillations by quantum fluctuations) 416.
- Ju. D. and I. B. Pogrebyskij (I. Z. Štokalo) 6.
- N. P. (Affin-projektive Klassifikation reeller ebener Kurven) 147.
- Solntseff, N. (Theory of scattering measurements in nuclear emulsion. I.) 436.
- Solov'ev, A. D. s. M. A. Evgrafov 135.
- Sorkin, Ju. I. (Ringe als Mengen mit einer Operation) 45.
- Souriau, Jean-Marie (Physique relativiste) 421.
- Spalding, D. B. (Inflammability limits and flame-quenching) 218.
- Spampinato, Nicolò (V_8 di S_{11} determinate da una falda di Halphen di una superficie completa) 151; (Varietà del I/S_{19}) 151; (Superficie che oscula nel punto origine una falda di Halphen) 151; (Superficie di ordine 9 e classe 9) 151.
- Sparrow, E. M. (Görtler's series method) 190.
- Specker, Ernst (Axiomatik der Mengenlehre) 76.
- Sperner, Emanuel (Analytische Geometrie. I. II.) 365.
- Spiegel, Murray R. (Applied differential equations) 105.
- Sprenger, H. s. Th. Ginsburg 244.
- Springer, C. E. (Union parallel displacement) 379.
- Sprott, D. A. s. R. G. Stanton 11.
- Šrejder, Ju. A. s. G. M. Adelson-Vel'skij 256.
- Srinivasan, S. K. (Charge independence and nucleon-antinucleon interactions) 431.
- Srivastav, R. P. (β -Übergänge mittlere Kerne) 437.
- Srivastava, Abinash Chandra (Non-Newtonian liquid near a stagnation point) 183.
- Stallmann, Friedemann (Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. II.) 101.
- Stanton, R. G. and D. A. Sprott (Family of difference sets) 11.
- Stark, Marcell s. Andrzej Mostowski 249.
- Stavroulakis, Nicias (Nappes logarithmiques d'un espace riemannien) 381; (Points logarithmiques et points coniques) 381.
- Stečkin, S. B. (Trigonometrische Reihen) 293.
- Steffensen, J. F. (Discussion) 2.
- Stein, E. M. (Functions of exponential type) 131.
- Norman s. M. M. Postnikov 169.
- Sherman K. (Foundations of quasigroups) 24; (Continuous mapping) 164.
- — — s. Curtis M. Fulton 25.
- Steinberg, M. S. (Viscosity of the electron gas in metals) 449.
- Robert (Prime power representations of linear groups. II.) 256.
- Steinfeld, O. (Quasiideale von Halbgruppen) 26.
- Steinhaus, H. (Division des corps matériels en parties) 164.

- Steinmann, O. (Äquivalente periodische Potentiale) 230.
- Stekete, J. A. (Volterra's dislocations) 446.
- Stelson, Hugh E. (Mathematics of finance) 359.
- Sternberg, Shlomo (Poincaré's last geometrical theorem) 389.
- Sternheimer, R. M. (Effect of atomic core on nuclear coupling) 215.
- Sterrett, Andrew (Detection of defective members) 355.
- Stesin, I. M. (Umformung von Orthogonalentwicklungen) 291.
- Steuerwald, Rudolf (Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen. II.) 275.
- Stichel, Peter (Zeitumkehrinvarianz) 210.
- Sticker, Bernhard (Zeitmaß und Zeitmessung) 6.
- Stojanowitch, Rastko (Rigid body in Riemannian spaces) 158.
- Stolt, Bengt (Anzahl von Lösungen diophantischer Gleichungen) 271.
- Stone, Marshall H. (Future of mathematics) 1.
- Storer, W. O. (Mathematics teaching in russian schools) 2.
- Stouffer, Samuel A. (K. Pearson) 5.
- Stoughton, R. W. and J. Halperin (Heavy isotope buildup) 213.
- Štraškevič (Strashkevich), A. M. (Effect of space charge on electron-optic properties) 198.
- Stratton, R. (Interelectronic collisions) 231.
- Straus, E. G. (Problem of W. Sierpiński) 78.
- s. P. J. Kelly 162.
- Strebel, Kurt (Länge gewisser Kurven bei quasikonformer Abbildung) 298.
- Strohl jr., G. Ralph (Peano spaces) 167.
- Strother, W. L. and L. E. Ward jr. (Retracts from neighborhood retracts) 165.
- Strutt, Max J. O. s. Gregor Čremošnik 222.
- Stuchlik, Franz (Zahlentheorie Hermitescher Formen. I.) 68.
- Sudakov, V. N. (Kompaktheitskriterien in Funktionenräumen) 128.
- and K. A. Ter-Martirosjan (Ter-Martirosian) (Re-normalizability of pseudo-scalar meson theory) 428.
- Suffczyński, Maciej (Two-centre integrals in solids) 229.
- Sullivan, Roger D. and Coleman du P. Donaldson (Navier-Stokes equations) 183.
- Sunouchi, Gen-Ichirō (Functions regular in a half-plane) 294.
- Supek, I. (Leitfähigkeit der Metalle bei tiefen Temperaturen) 231.
- Suquet, P. (Diffusion des gaz au voisinage d'une bulle de cavitation) 195.
- Süss, Wilhelm s. A. D. Alexandrov 163.
- Sutton, George W. (Hydrodynamics of a melting surface) 223.
- Suzuki, Michio (Simple groups of odd order) 31.
- Švarc (Schwarz), A. S. (Homologies of spaces of closed curves) 170.
- Svekló, V. A. and V. A. Sjukijainen (Siukiyainen) (Diffraction of a plane elastic wave) 179.
- Svensson, N. L. (Bursting pressure of cylindrical vessels) 177.
- Swetharanyam, S. (Sums involving fractional parts of numbers) 67.
- Swinerton-Dyer, H. P. F. (Extremal problem) 308.
- Symonds, Bernard K. and Roderick M. Chisholm (Inference by complementary elimination) 7.
- Synge, J. L. (Hypercircle in mathematical physics) 138; (Theory of gravitation) 418.
- and W. F. Cahill (Torsion of a hollow square) 175.
- Szász, F. A. (Rings in which every proper left-ideal is cyclic) 51.
- G. (Relatively complemented lattices) 258.
- Szépálusy, P. (New exchange potential) 424.
- Szűsz, P. (Cantorsche Reihe reeller Zahlen) 62.
- Takács, L. (Probability problem concerning telephone traffic) 350; (Queueing problem concerning telephone traffic) 350.
- Takasu, Tsurusaburo (Non-linear N. E. geometry) 364.
- Takeno, Hyōitirō (Plane wave solutions of field equations) 420.
- Takeuti, Gaisi (Ordinal diagrams) 244.
- Talacko, Joseph (Operational methods in the calculus of finite differences) 113.
- Talbot, L. (Molecular flow forces and heat transfer) 444.
- Tamura, Takayuki (Finite semigroups. II.) 26; (Commutative nonpotent archimedean semigroup. I.) 251; (Supplement to „Construction of finite semigroups. II.“) 252.
- , Mamoru Nakao, Mitsuo Shingai, Yasushi Iwano, Katsumi Minami, Katsuyuki Nii and Hiroshi Tateyama (Distributive multiplications to semigroup operations) 250.
- Tanaka, Tadashi (Characterization of the torus) 167.
- Tanatarov, L. V. s. M. I. Kaganov 232.
- Taniuti, Tosiya (Hydromagnetic waves in compressible ionized fluid) 417.
- Tank, Franz (J. Ackeret) 244.
- Tanttila, W. H. s. O. Kraus 236.
- Tate, John (Homology of Noetherian rings) 55.
- Tateyama, Hiroshi s. Takayuki Tamura 250.
- Tati, Takao (Elementary particles) 207.
- Taussky, O. s. G. Pall 271.
- Tavernier, Jean (Fluctuations de masse dans un cristal) 227.
- Taylor, R. J. (Influence of a magnetic field on the stability of a gas discharge) 442.
- Tchakaloff, Vladimir (Cubatures mécaniques) 139.
- Temkin, A. Ja. (A. Ia.) (Slowing down of neutrons) 211.
- Temkin, Aaron (Scatterings of electrons from atoms) 216.
- Temko, S. V. (Fokker-Planck equation) 220.
- Temple, G. (Growth of mathematics) 1.
- Tenca, Luigi (La versiera di... G. Grandi) 242.
- Tenenbaum, Morris (Transforms of Tauberian series) 87.
- Ter-Martirosjan, K. A. s. V. V. Sudakov 428.
- Ternov, I. M. s. A. A. Sokolov 416.
- Terracini, Alessandro (Lavoro di C. Segre) 147.
- Tertsch, Hermann s. Franz Raaz 447.

- Tevikjan (Tevikian), R. V. (Green function in Bloch-Nordsieck approximation) 428.
- Thacher jr., Henry C. (Quadrature formulas in s dimensions) 139.
- Thébault, Victor (Hauteurs d'un tétraèdre) 144.
- Thiele, Helmut (Vollständigkeit im Stufenkalkül) 6.
- Thierrin, Gabriel (Idéaux complètement premiers) 50; (Anneaux et demi-groupes) 249.
- Thomas, Johannes (Eigenwertsystem mit Sturm-Liouville-scher Differentialgleichung) 108.
- Thomas, L. H. s. D. H. Tycko 215.
- T. Y. (Spherical blast waves) 186; (Sonic discontinuities in ideal gases) 186; (Decay of waves in elastic solids) 186; (Deformation energy) 186; (Discontinuities in plastic solids) 398.
- Thomson, John Y. s. Andrew R. Mitchell 190.
- Thybaut, A. (Hélices d'un complexe linéaire) 380.
- Tiemann, J. J. (High-energy potential scattering) 216.
- Tietz, T. s. J. Odziemczyk 216.
- Tillieu, J. (Susceptibilités magnétiques moléculaires) 235.
- Timan, A. F. (Converse theorems in the constructive theory of functions) 85; (Satz von S. M. Nikol'skij) 291.
- — — and M. F. Timan (Smoothness moduli of functions) 84.
- M. F. s. A. F. Timan 84.
- Tits, J. (Géométrie des R-espaces) 362.
- Tjablikov (Tiablikov), S. V. and A. C. (A. Ts.) Amatuni (Ground state of an anti-ferromagnet) 452.
- Tjapkin (Tyapkin), K. F. (Anomalies of potential fields) 317.
- Todorov, I. I. (Eindeutigkeitsatz für die Wellengleichung) 116.
- Tolsted, Elmer (Limits of subharmonic functions) 122.
- Tominaga, Hisao (Galois theory of simple rings. II.) 53.
- Topoljanskij (Topolyansky), D. B. (Functions of Chaplygin in boundary problems) 317.
- Toponogov, V. A. (Convexity of Riemannian spaces) 382.
- Torres Noguera, Juan (Kubische Gleichung) 22.
- Toscano, L. (Cercles de Schoute) 143.
- Letterio (Segmenti torricelliani) 143.
- Tosi, Armida („De centro gravitatis solidorum“ di L. Valerio) 242.
- Totaro, Carmelo (Condizioni al contorno dell'elettrodinamica dei corpi in moto) 418.
- Tóth, L. Fejes s. Fejes Tóth, L. 145, 164.
- Touschek, B. (Fermi Dirac fields) 426.
- Trautman, A. (Discontinuities of field derivatives) 421.
- Tremmel, Erwin (Temperaturspannungsfelder) 175.
- Trempont, J. (Transformation birationnelle involutive du plan) 149.
- Tresse, A. (Géométries non euclidiennes. I.) 364.
- Trèves, François (Domination et problèmes aux limites de type mixte) 332.
- Trilling, Leon s. Isaac Greber 408.
- Truckenbrodt, Erich (Übergang von der erweiterten zur einfachen Traglinientheorie) 405; (Auftriebsverteilung an Tragflügeln bei Schallanströmung) 407.
- Truesdell, C. (New Bernoulli edition) 4; (Eulers Leistungen in der Mechanik) 242; (Reciprocal deformation tensors) 374.
- Tukey, John W. (Antithesis or regression?) 357.
- Turnbull, David s. Frederick Seitz 224.
- H. W. s. J. F. Scott 3.
- Turri, Tullio (Trasformazioni involutorie in S_r) 148; (Trasformazioni antibirazionali involutorie in un S_n) 149.
- Tycko, D. H., L. H. Thomas and K. M. King (Wave functions and energies of helium) 215.
- Tzou, Kuo-Hsien (Comparaison des champs tensoriels aux champs de spin maximum) 203.
- Ugrin-Šparac, Dimitrije (Ternary cubic forms) 68.
- Uhlmann, W. s. J. Albrecht 338.
- Ui, Haruo (Scattering of neutrons) 209.
- Ulanov, G. M. (Deflection accumulation theory) 342.
- Ul'janov, P. L. (Divergenz Fourierscher Reihen) 292.
- Ullmo, J. (Théorie des probabilités et mécanique quantique) 202.
- Urazbaev, B. M. (Kleinste Diskriminante eines Abelschen Körpers) 58; (Completely critical cyclic fields of degree h) 58.
- Ursell, F. (Short-wave asymptotic theory of the wave equation) 121.
- Uspenskij, V. A. (Gleichmäßige Stetigkeit) 8.
- Vajnberg, M. M. (Fragen der Funktionalanalysis) 333.
- Vakselj, Anton (Faktorhalbgruppen) 26; (Algebraische Grundlage der Vektorrechnung) 372; (Vektordreibein einer analytischen Funktion) 373.
- Valette, Guy (Plan conforme sur le corps à trois éléments) 364.
- Vallée, Robert (Algebra and macroscopic observation) 394.
- Varini, Bruno (Teoria dei determinanti) 13.
- Vartak, Manohar N. (Hasse-Minkowski invariant) 270.
- Vašakidze, I. Š. (Winkelverteilung der Protonen) 209.
- Ventcel' (Wentzell), T. D. (Quasilinear parabolic systems) 313.
- Verblunsky, S. (R. M. Gabriel) 5; (Integral functions) 294.
- Vertgejm, B. A. (Nicht-lineare Funktionalgleichungen in Banachschen Räumen) 333.
- Vidav, Ivan (Formes linéaires positives) 130.
- Vignoli, Paola (Eccitazione nei sistemi a due gradi di libertà) 196.
- Villa, Mario (Trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo) 152.
- Villamayor, Orlando E. (Représentation matricielle de l'anneau d'endomorphismes) 52; (Théorie de Galois pour les anneaux associatifs) 53.
- Vincensini, M. Paul (Invariant du groupe des équivalences superficielles de l'espace euclidien) 378.

- Vincent, D. s. C. Carter 217.
- Vinha Novais, J. A. (Boolesche Algebren) 45.
- Vinograd, R. E. (Jump of the higher characteristic exponent) 111.
- Vinogradov, A. I. (Sieb von Eratosthenes) 272; (Brief an die Redaktion) 272.
- I. M. (Abschätzung trigonometrischer Summen mit Primzahlen) 71.
- Vinti, Calogero (Ripartizione del continuo) 84.
- John P. und Tadeusz Leser (Series involving Bessel functions) 96.
- Viola, Tullio (U. Amaldi) 5; (Problema di teoria degli insiemi) 79.
- Višik (Vishik), M. I. and L. A. Ljusternik (Lusternik) (Elliptical equations) 117; (Even order elliptical equations) 117.
- — — und G. E. Šilov (I. M. Gel'fands Seminar) 124.
- Viswanadha Sarma, L. V. K. s. Sarma, L. V. K. Viswanadha 402.
- Vitale, B. B. s. D. Amati 208.
- Vituškin (Vitushkin), A. G. (Variation of a set) 281; (Estimates from tabulation theory) 282.
- Vivargent, M. (Convergence des secteurs magnétiques à bords profilés) 199.
- Vocino, Luigi (Irrazionalità di π) 73.
- Vogel, Théodore (Systèmes dynamiques) 114.
- Vojtechovskaja (Voitsekhovskaya), K. F. (Stability of a rectangular plate) 177.
- Volkman, Bodo (Hausdorffsche Dimensionen von Mengen. VI.) 79.
- Volkov, I. I. (Lineare Matrixtransformationen) 283.
- Volosov, V. M. (Nonlinear differential equations) 112; (Differential equations of the second order) 112.
- Volterra, E. and E. C. Zachmanoglou (Vibrations of straight elastic bars) 178.
- Vito 6.
- Vorob'ev, Ju. V. (Momentenmethode bei Schwingungen linearer Systeme) 137.
- Vorovič, I. I. (Schwingungen flacher Schalen) 116.
- Vranceanu, G. (Groupes de mouvements des espaces) 160; (Espaces symétriques) 382.
- Vrkljan, V. S. (Schallgeschwindigkeit in Gasmischungen) 192.
- Vulich, B. Z. (Selbstadjungierte Operatoren im Hilbertschen Raume) 330.
- Wade, L. I. s. Eugene Schenckman 29.
- Waerden, B. L. van der (Berichtigung) 68.
- Wagner, F. s. K. H. Höcker 212.
- Wagner, K. (Nicht-archimedische Metrisierbarkeit) 78.
- Wahl, A. M. (Stress distribution in rotating disks) 175.
- Waldmann, L. (Boltzmann-Gleichung) 219.
- Walker, Helen M. (K. Pearson) 5.
- Wall, Drury W. (Sub-quasigroups of finite quasigroups) 25.
- Wallace, A. D. (Retractions in semigroups) 40.
- Walsh, J. L. s. M. Fekete 293.
- John E. (Experimental method for random digits) 344.
- Walters, G. W. (Applied mathematics) 2.
- Ward jr., Joe H. (Counseling assignment problem) 358.
- — L. E. (Completeness in semi-lattices) 260.
- — — s. W. L. Strother 165.
- Waters, William E. (Rippling of thin electron ribbons) 415.
- Watson, G. L. (Minimum of an indefinite quadratic form) 68; (Equivalence of quadratic forms) 272.
- Wattenwyl, René von (Ackeret und die Landesverteidigung) 244.
- Weber, Constantin und Wilhelm Günther (Torsionstheorie) 394.
- Weibull, Waloddi (Statistical handling of fatigue data) 356.
- Weier, J. (Soluzioni di una classe di trasformazioni) 389.
- Josef (Abbildungen dreidimensionaler in zweidimensionale Mannigfaltigkeiten) 390.
- Weil, André (Torellischer Satz) 370.
- Weiner, L. M. (Lie admissible algebras) 262; (Theorem of Pythagoras) 365.
- Weingarten, Victor I. (Buckling of a supported plate) 397.
- Weinitschke, H. J. (Buckling problem of shallow shells) 176.
- Weiss, Lionel s. J. Kiefer 354.
- Wende, H. (Linsengleichung und Bildkurve des Zylinder-Kondensators) 416.
- Wendroff, B. s. H. B. Keller 220.
- Wenk, Friedrich (Ionen in Wirbelströmungen) 402.
- Wentzel, Gregor (Diamagnetism of electron gas) 446.
- Wergeland, Harald s. Haakon Olsen 192.
- Werle, J. (Polarization of μ -mesons and electrons in K -meson decays) 431.
- Werner, E. s. F. Bopp 451.
- West, R. R. s. T. J. Gray 237.
- Westwick, R. s. M. Marcus 20.
- Whaples, G. (Local class field theory) 60.
- Wheeler, John A. s. Tullio Regge 419.
- White, Harvey E. s. Francis A. Jenkins 412.
- Whitehead, George W. (Homology suspension) 391.
- Whitford, R. K. s. J. R. Burnett 141.
- Wichers, J. (Neunpunktekreis und Steinersche Ellipse) 143.
- Wilansky, Albert (Convergence of an infinite series) 289.
- — und Karl Zeller (Inverse matrix in summability) 86.
- Wild, Wolfgang (Dreifach-Winkelkorrelationen bei Coulombanregung) 433.
- Wildermuth, K. (Kerneigenschaften und Zweikörperkräfte. II.) 431.
- — und Hans Wittern (Kernhydrodynamik) 433.
- Wilf, Herbert S. (Numerical integration of first order differential equations) 337.
- Wilkes, M. V. (D. R. Hartree) 5.
- Wilks, S. S. (Teaching statistical inference) 2.
- Williams, E. J. s. W. H. Hatheway 358.
- F. A. (Conservation equations for multicomponent gas mixtures) 193.
- R. F. (Effect of maps upon the dimension of subsets) 388.
- W. E. (Reflection and refraction at plane interfaces) 414.

- Williamson, J. H. (Functional representation of algebraic systems) 326.
- Wintner, Aurel (Fourier constants) 94; (Remarks to previous papers) 110; („Flat“ oscillations of low frequency) 110; (Student's distribution) 164; (Arithmetical summation processes) 284; (Schwarz's lemma and singularity of Briot-Bouquet) 299.
- Witthn, Hans s. Karl Wildermuth 433.
- Wiweger, A. (Topologisation of Saks spaces) 126.
- Woods, Betty D. (Diffraction of a dipole field by a half-plane) 197.
- L. C. (Aerofoil theory) 406.
- Wooley, R. v. d. R. (Equilibrium of clusters. III.) 239.
- — — — — and Denise A. Robertson (Equilibrium of clusters. II.) 239.
- Wright, Fred B. (Topological abelian groups) 256.
- Wu, Tai Tsun (High energy potential scattering) 425.
- Wunderlin, W. (A. Bohren) 5.
- Wurtele, M. G. (Three-dimensional lee wave) 240.
- Wyk, C. B. van (Charge conjugation) 203.
- Wyld jr., H. W. s. H. Frauenfelder 210.
- Wyman, M. s. L. Moser 91.
- Wymore, A. Wayne s. C. Preston Hammer 139.
- X. X. X. (Correspondence) 150.
- Xiroudakis, Georges (Systèmes multigrades) 65.
- Yafet, Y. (g value in conduction electron spin resonance) 234.
- Yamamoto, Nobuko (E. Hille's theorem) 328.
- Yamamuro, Sadayuki (Monotone completeness of linear spaces) 324.
- Yamanaka, Takesi (Théorie des distributions de M. J. Korevaar. II.) 329.
- Yamashita, J. and J. Kondo (Superexchange interaction) 451.
- Yamasuge, Hiroshi (Harmonic functions. II.) 316.
- Yang, Kwang-Tzu (Transient conduction in a solid) 195.
- Yano, Kentaro and Tadashi Nagano (Projective and conformal transformations) 156.
- Yaqub, Adil (Identities of certain algebras) 43.
- Yates, Frank s. Sir Ronald A. Fisher 352.
- Yonezawa, M. s. S. Furuichi 430.
- Yoshinaka, Yōichirō s. Isaac Koga 401.
- Yoshizawa, Taro („Boundedness and ultimate boundedness“) 302; (Uniform boundedness of solutions of $x' = F(t, x)$) 303.
- Yosida, Kōsaku (Semi-group theory) 330.
- Young, David s. M. L. Juncosa 338.
- Zacharov (Zakharov), V. K. (First boundary problem for an elliptical type of equation) 119; (Imbedding theorems) 119.
- Zachmanoglou, E. C. s. E. Volterra 178.
- Zadiraka, K. V. (Periodic solutions of nonlinear differential equations) 305.
- Zadojan, M. A. (Temperaturspannungen in Betonplatten) 176.
- Zagorskij (Zagorsky), T. Ja. (T. Y.) (Boundary problems for differential equations of the parabolic type) 313.
- Zajta, A. (Iteration der Potenzreihen) 98.
- Zamanov, T. A. s. G. N. Agaev 106.
- Zamfirescu, Ion (Théorème de Weierstrass-Stone) 91.
- Zappa, G. (Reticolo dei sottogruppi di un gruppo) 27.
- Guido (Automorfismi privi di coincidenze nei gruppi finiti) 32; (Gruppi di collezioni dei piani di Hughes) 363.
- Zariski, Oscar s. I. S. Cohen 56.
- Zavjalov (Zavialow), Ju. S. (Yu. S.) (Rotational flows of gas) 183.
- Zbornik, Josef (Uniformierung und allgemeine Lösung linearer Differentialgleichungen) 300.
- Ždanov (Zhdanov), G. A. (Modification of Galerkin's method) 331.
- Zeckendorf, E. (Équations quadratiques) 64.
- Zeeman, E. C. (Coefficient theorems for spectral sequences) 168.
- Zel'dovič (Zel'dovich), Ja. B. (Ja. B.) (Magnetic field in motion of a liquid) 200; (Perturbation theory for quantum mechanical problem) 423.
- Zeller, Karl s. Albert Wilansky 86.
- Zemach, A. C. s. R. M. Mazo 210.
- Zemanian, Armen H. (Fourier transforms of monotonic functions) 320.
- Ziegler, A. (Mehrgруппentheorie für Reaktorberechnungen) 211.
- Zil'berman, G. E. (Crystal located in magnetic field) 230.
- Ziman, J. M. (Transport properties of solids) 448.
- Žižčenko, A. B. (Teilkörper eines algebraischen Funktionenkörpers) 61.
- Zmorovič (Zmorovich), V. A. (Schwarz's integral formula) 294.
- Zondek, B. s. J. W. Sheldon 338.
- Zubov, V. I. (Stability problem) 303; (Reduction principle) 303.
- Zuchovickij, S. I. (Minimale Erweiterungen linearer Funktionaloperatoren) 129.
- — — s. G. I. Eskin 326.
- Zuffi, Lina (Velocità media dell'energia nei cristalli assorbenti) 449.
- Zulauf, Aehim (Sums and differences of primes and squares) 66.
- Žuravlev (Zhuravlev), Ju. I. (Yu. I.) (Separability of subsets of unit cube vertices) 9.
- Zwanzig, Robert W. (From quantum to „classical“ partition function) 194.
- Zwinggi, Ernst (Prämienrückerstattung) 358.
- Zykov, A. A. (Algebren von Komplexen) 24.